# Teoría General sobre el Listado de un Conjunto

**Gerardo Sánchez Martínez**

Depto. de Estadística y Cálculo, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Buenavista, Saltillo, Coah., México

---

***Abstract. General Theory on the listing of a set.*** **The aim of this note is to focus on the problem of producing a list of all members of a set. The main purpose is the construction of an order relationship in the studied set. A general algorithm for the listing must be developed, which has a great importance for the calculation of estimators using nonparametric methods.**

**Key Words: Permutation, Order Relation, Successor of an Element, Minimum, Maximum, Lexicographical Order, Algorithm.**

**Resumen.** El propósito de este trabajo es dar un enfoque al problema de predecir una lista de todos los miembros de un conjunto. La intención principal es la construcción de una relación de orden en el conjunto de interés. Se elaborará un algoritmo general para el listado, el cual es de gran importancia para el cálculo de estimadores usando métodos no paramétricos.

**Palabras clave:** Permutación, Relación de orden, Sucesor de un elemento, Mínimo, Máximo, Orden lexicográfico, Algoritmo.

---

## Introducción

En este trabajo se analiza el siguiente problema general de enumeración o listado: Dado un conjunto finito *A,* producir una lista en la que cada elemento de *A* aparezca solo una vez. A primera vista, éste parece ser un problema simple; después de todo, una manera de especificar un conjunto es precisamente proporcionando una lista de todos los elementos. Por ejemplo, al escribir **A** = **(3,** 6, 9, 12,151, se están enumerando los miembros de ***A.*** Sin embargo, existe otra forma de determinar un conjunto, la cual se denomina método de comprensión o regla, de acuerdo a la cual los elementos de conjunto se distinguen mediante una propiedad que los caracteriza; vea por ejemplo, Suples (1971), o Dolciani et *al.* (1986). Por ejemplo, si ***B*** es el conjunto de todos los enteros positivos menores de 17 que son múltiplos de tres, se puede establecer con toda seguridad que (a) 2 $\notin$ ***B,*** pues a pesar de que dos es un entero positivo y menor a 17, dos no es múltiplo de tres, (b) 21 $\notin$ ***B,*** pues aunque 21 si es un entero positivo múltiplo de tres, 21 no es menor a 17, y (c) 9 $\in$ ***B,*** pues nueve es un entero positivo que es tanto múltiplo de tres como menor a 17. El aspecto fundamental en esta discusión es que la propiedad que se estipula para los miembros de ***B*** permite decir, sin ambigüedad alguna, si un objeto determinado pertenece o no a dicho conjunto. Aun cuando originalmente se especifique un conjunto mediante una caracterización de sus miembros, frecuentemente es necesario disponer de una lista de elementos, esto es, debe utilizarse la propiedad que distingue a los objetos que constituyen ***B*** para producir una lista de todos sus miembros—equivalentemente, para enumerar todos los elementos de ***B.*** En el caso especificado en el párrafo precedente, no es difícil mostrar que ***B*** = **(3,** 6, 9, 12, 15¦. es decir ***B*** coincide con ***A*** , de manera que en estas circunstancias es sencillo pasar de la caracterización del conjunto ***B*** por el método de comprensión, a la descripción de ***B*** mediante el listado o enumeración de sus miembros. Sin embargo, en general la situación es más compleja. Considere, por ejemplo, el conjunto C que consiste de todos los dígitos (enteros entre cero y nueve, inclusive), que aparecen por lo menos cuatro ocasiones dentro de las primeras veinte cifras de la parte fraccionaria en la expansión decimal del númeron:. En este caso, C consta de a lo más cinco miembros; producir una lista de C sin embargo, requiere de que se tenga la expansión de π hasta 20 cifras significativas, y es necesario de disponer de algoritmos especiales para este fin. Este ejemplo muestra que, a pesar de que un conjunto tiene pocos miembros—a lo más cinco en caso de C—generar una lista de sus elementos no es, en todos los casos, un problema simple; más bien, con frecuencia reclama un análisis esmerado y, tal vez, complejo. En el caso del conjunto C puede mostrarse que consiste de un único elemento, a saber, cinco (Papadopoulus (1997)).

El propósito general de este trabajo es diseñar un procedimiento para enumerar los miembros de un conjunto finito arbitrario, y para alcanzar este objetivo, la expansión ha sido organizada de la manera siguiente: En la Sección 2 se discute la relevancia del problema de listado en el campo de la estadística no paramétrica, tratando de ubicar el problema general abordado desde una óptica que muestre su relevancia. Posteriormente, en la Sección 3 se discute la relación entre el problema general de listado, y la construcción de un orden total en el conjunto de interés, y se introducen las nociones de elemento máximo y mínimo en un conjunto ordenado. La Sección 4 trata sobre la idea de sucesor de un elemento, la cual es una noción central para formular, en la Sección 5, el resultado principal de este trabajo, a saber, el algoritmo general de listado. Después de establecer este procedimiento, en la Sección 6 se introduce una relación de orden total entre vectores de $R^n$, a saber, el denominado orden lexicográfico (Munkres (1975)). y la exposición concluye con algunos comentarios breves en la Sección 7.

## El Angulo Estadístico

Antes de emprender la tarea de diseñar un método para enumerar los miembros de un conjunto finito arbitrario, es conveniente enfatizar, una vez más, la razón por la cual este problema es de gran importancia en el análisis estadístico. El punto de partida es la observación de que enumerar (listar) los elementos de un conjunto finito puede ser un problema complejo por dos razones:

(a) Es difícil determinar explícitamente los elementos del conjunto, por ejemplo, este en el caso para el conjunto $\boldsymbol{C}$ considerado en la Sección 1.
(b) El conjunto de interés tiene un número grande de elementos.

En el análisis estadístico, particularmente al emplear métodos de estimación no paramétrica, la dificultad para enumerar los miembros de un conjunto de interés se origina, frecuentemente, por la segunda de las causas mencionadas. Por ejemplo, considere las siguientes tres clases de objetos construidos a partir de una población $\boldsymbol{P}$ que consta de N objetos, los cuales, sin pérdida de generalidad alguna, se supone que son los primeros N enteros positivos, i.e.,

$$\boldsymbol{P} = \{1, 2, \ldots, \boldsymbol{N}\} \tag{2.1}$$

- La clase $\boldsymbol{P}(N, N)$, la cual consiste de todas las permutaciones de tamaño N de la población $\boldsymbol{P}$.

$$P(N,N)=\left\{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in P, i=1,2,\ldots,n, a_i \neq a_j, 1 \leq i \neq j \leq N\right\} \tag{2.2}$$

## Relaciones de Orden

La observación clave para abordar el problema de listar un conjunto finito $\boldsymbol{A}$, es que cuando se produce una lista de sus miembros, de inmediato se induce un 'orden' en el conjunto, donde los elementos que se escriben primero son 'menores' que aquéllos que aparecen después. Para aclarar esta idea, considere el conjunto

$$\mathbf{A} = \{\mathrm{A}, *, 0, !\} \tag{3.1}$$

Suponga ahora que se pide producir una lista de los miembros de $\boldsymbol{A}$. Ante este requerimiento, se podría responder con

$$!, \mathrm{A}, *, 0 \tag{3.2}$$

En este caso, si se convienen en que un elemento es menor que cualquiera de los que están a su derecha en la lista, se tendría que

'!' es menor que 'A' '!' es menor que '*' y '!' es menor que '0'
'A' es menor que '*', 'A' es menor que '0' y '*' es menor que '0' (3.3)

Esta 'relación de orden' fue inducida por el listado (3.2), y es claro que al formar otra lista de los miembros de $\boldsymbol{A}$, la relación de orden se alterará. Por ejemplo, si en vez de (3.2) se enumeran los miembros de $\boldsymbol{A}$ como

$$\mathrm{A}, !, *, 0$$

Entonces la primera afirmación en (3.3) debe de cambiarse a 'A' es menor que '!'. La discusión puede extenderse a cualquier conjunto, en el sentido de que al disponer de una lista de miembros, puede definirse una relación de orden. El propósito de esta sección es establecer la proposición inversa: Si se dispone de una relación de orden adecuada en un conjunto finito ***A***, entonces, dicha relación puede utilizarse para generar un listado de ***A***, el resultado se demostrará posteriormente en el Teorema 3.1. Por el momento, es oportuno definir, de manera precisa, cual es la idea de relación de orden que se utilizará.

**Definición 3.1.** [Munkres (1975), Suples (1971)]. Sea ***A*** un conjunto finito, y considere una relación, denotada mediante '$\prec$' definida en el conjunto. Esta relación es un orden completo en ***A*** si satisface los siguientes requerimientos:

(a) [Transitividad] Para a, b, c $\in$ ***A***,

$$a \prec b \ \text{ y } \ b \prec c \ \Rightarrow a \prec c.$$

(b) [Completez] Para todos los miembros a, b $\in$ ***A***, se tiene que exactamente una de las siguientes alternativas es valida.

$$a \prec b, \ a = b, \ b \prec a.$$

En esta definición, la condición (a) es bastante natural desde un punto de vista intuitivo, mientras que el requerimiento (b) impone la condición de que dos elementos distintos de ***A*** sean comparables, i.e., si a $\neq$ b, debe tenerse que a $\prec$ b, o bien b $\prec$ a. Es costumbre leer la expresión a $\prec$ b como 'a precede a b', en lugar de 'a es menor a b'; el propósito es no confundir la relación de orden recientemente introducida, con el orden usual en los números reales cuando ***A*** $\subset$ R. Por otro lado, el hecho de que a preceda a b, esto es, a $\prec$ b, también se escribe como b $\succ$ a, esto es,

$$a \prec b \Leftrightarrow b \succ a. \tag{3.4}$$

La expresión b $\succ$ a se lee como 'b sucede a **a**', o 'b es posterior a **a**'; similarmente 'a $\prec$ b' con frecuencia se expresa verbalmente como 'a es anterior a b'.

**Ejemplo 3.1.** Sea ***A*** = **{A,** *, 0, !} el conjunto considerado al inicio de esta sección. La relación (3.3) puede expresarse, con la notación recientemente introducida, como

$$! \prec A, \ ! \prec *, \ ! \prec 0, \ A \prec *, \ A \prec 0 \ \text{ y } \ * \prec 0 \tag{3.5}$$

Con esta definición de la relación de precedencia, no es difícil verificar que las propiedades de transitividad y completez se satisfacen. Por lo tanto (3.5) determina un orden completo en ***A***.

Dado un conjunto finito ***A*** dotado con un orden completo '$\prec$', existen dos elementos especiales, a saber, el elemento mínimo y el elemento máximo.

**Definición 3.2.** Sea ***A*** un conjunto finito dotado con un orden completo '$\prec$'. En este caso, (a) **m** $\in$ ***A*** es un elemento mínimo si para todo **a** $\in$ ***A*** con **a** $\neq$ **m**, se tiene que **m** $\prec$ **a**. Similarmente, (b) **M** $\in$ ***A*** es un elemento máximo si siempre que **a** $\in$ ***A*** sea tal que **a** $\neq$ **M**, entonces **a** $\prec$ M.

**Teorema 3.1.** Sea ***A*** un conjunto finito y no vacío dotado de un orden completo. En este caso,
(a) ***A*** posee un elemento mínimo, Más aún, (b) ***A*** tiene exactamente un elemento mínimo. Similarmente, (c) ***A*** posee un elemento máximo, y (d) El elemento máximo de ***A*** es único.

**Demostración.** (a) El argumento es por inducción en el número de elementos de ***A***, el cual se denota por n. Primero observe que si ***A*** tiene n = 1 elementos, entonces la afirmación es clara. Suponga que si un conjunto dotado con un orden completo tiene k miembros, entonces tiene un elemento mínimo, y sea ***A*** un conjunto de n = k + 1 elementos. En estas circunstancias, se verificará que ***A*** posee un elemento mínimo. Con esta finalidad, seleccione un elemento cualquiera, a* $\in$ ***A***, y defina conjunto $\tilde{A}$ mediante

$$\tilde{A} = A \setminus \{a^*\} \tag{3.6}$$

En este caso, $\tilde{A}$ es un conjunto de k elementos, y por lo tanto tiene un miembro mínimo, por la hipótesis de inducción. Sea $\tilde{m} \in \tilde{A}$ un miembro mínimo de $\tilde{A}$, i.e.

$$a \in \tilde{A} \ \text{ y } \ a \neq \tilde{m} \Rightarrow \tilde{m} \prec a. \tag{3.7}$$

Para demostrar que el conjunto original tiene un mínimo, primero observe que $\tilde{m} \in \tilde{A}$, y por lo tanto $\tilde{m} \neq a^*$ (vea(3.6)). Considerando que dos elementos distintos de ***A*** son comparables, por definición 3.1, esto implica que ocurre alguna de las siguientes dos alternativas:

$$a^* \prec \tilde{m}, \ \text{ o } \ \tilde{m} \prec a^*$$

**Caso 1:** $a^* \prec \tilde{m}$. En estas situación se verificará que $a^*$ es un elemento mínimo de ***A***, i,e.,

$$a^* \prec a, \ \text{ si } \ a \in A \ \text{ y } \ a \neq a^*$$

En efecto, si $a \in A$ es diferente de $a^*$, entonces $a \in \tilde{A}$ (vea (3.6)). Por lo tanto, $a = \tilde{m}$, **o bien** $\tilde{m} \prec a$; bajo la primera alternativa se tiene que $a^* \prec a$, pues se supone que $a^* \prec \tilde{m}$ y $\tilde{m} = a$, mientras que si la segunda posibilidad ocurre, se obtiene que $a^* \prec \tilde{m}$ y $\tilde{m} \prec a$, de tal forma que usando la transitividad de la relación de orden, se obtiene $a^* \prec a$ Este argumento muestra que la implicación (3.8) es válida, y por lo tanto, $a^*$ es un elemento mínimo de *A*.

**Caso 2:** $\tilde{m} \prec a^*$ en estas circunstancias, $\tilde{m}$ es un miembro mínimo de ***A***. En efecto, seleccione $a \in A$ tal que $a \neq \tilde{m}$ y observe que existen dos alternativas posibles: (1) $a = a^*$, circunstancia en la que se tiene

$$\tilde{m} \prec a \tag{3.9}$$

pues $a = a^*$, y (2) si $a \neq a^*$, entonces $a \in \tilde{A}$ (vea(3.6)), y como $\tilde{m}$ es un mínimo de $\tilde{A}$. se tiene que (3.9) también ocurre cuando $a \neq \tilde{m}$. En resumen: Suponiendo que un conjunto con k miembros siempre tiene un elemento mínimo, se ha mostrado que cualquier conjunto k+1 elementos también posee un mínimo, completando el argumento que establece la parte (a) por el método de inducción.

(a) Suponiendo que $m$ y $m_1$ son dos elementos mínimos de ***A,*** se demostrará que $m = m_1$. Primero, observe que

$$a \in A \;\; y \;\; a \neq m \Rightarrow m \prec a \tag{3.10}$$

(Vea la Definición 3.2), y similarmente

$$a \in A \;\; y \;\; a \neq m_1 \Rightarrow m_1 \prec a \tag{3.11}$$

Suponga ahora que $m \neq m_1$. En este caso, a partir de(3.10) con $a = m_1$ se desprende que

$$m \prec m_1$$

Mientras que utilizando (3.11) con $a = m$, se obtiene que

$$m_1 \prec m$$

Sin embargo, las dos últimas desigualdades desplegadas ocurren de forma simultánea, contradiciendo la condición de completez en la Definición 3.1. Esta contradicción muestra que el supuesto del que se origina, i.e., $m \neq m_1$, es falso, de manera que $m = m_1$, completando la demostración de la parte (b). El resto del teorema puede demostrarse mediante argumentos análogos a los utilizados para establecer las partes (a) y (b).

## El Sucesor de un Elemento

En esta sección se presenta una importante idea para la formulación de un algoritmo general de listado de los miembros de un conjunto. En forma simple, esta noción es la de 'elemento siguiente', o 'sucesor inmediato' a un miembro de un conjunto ordenado.

**Definición 4.1.** Sea **A** un conjunto finito dotado de un orden completo. Dado $a \in A$. **sea** $b \in A$ un elemento que satisface las siguientes condiciones:

$$a \prec b \tag{4.1}$$

Y

$$Si\ c \in A\ satisface\ a \prec c,\ entonces\ b \preceq c \tag{4.2}$$

En este caso, b de denomina sucesor de **a;** note que en (4.2), $a \preceq b$ es una forma abreviada de la expresión $a \prec b$ o $a = b$:

$$a \preceq b \Leftrightarrow a < b \;\; o \;\; a = b$$

Para entender esta idea, suponga, que los elementos de ***A*** recolocan en una línea horizontal, de manera que si x, y $\in$ ***A*** son tales que $x \prec y$, entonces x se encuentra a la izquierda de y. Suponga ahora que se recorren los miembros de ***A*** de izquierda a derecha; en este caso, un sucesor de **a** es un elemento b $\in$ ***A*** que se ubica a la derecha de ***A*** con la propiedad de que al moverse de **a** hacia b no se encontrará elemento alguno de ***A*** 'en el camino'. El siguiente teorema muestra que, con la excepción del máximo, todos los miembros de ***A*** tienen un sucesor, y que éste es único.

**Teorema 4.1.** Sea **A** un conjunto finito dotado con un orden completo, y suponga que **a** $\in$ **A** es diferente del máximo elemento de **A.** En este caso, **a** posee un suceso, el cual es único.

**Demostración.** Considere el conjunto

$$S(a) = \{ c \in A \mid a \prec c \} \tag{4.1}$$

esto es, $S(a)$ contiene a todos los miembros de ***A*** que sucede al elemento $a$. Debido a que $a \neq M$, se tiene que $a \prec M$, de tal forma que $M \in S(a)$. Por lo tanto $S(a)$ es un conjunto no vacío, el cual posee un único elemento mínimo, por el Teorema 3.1, el cual se denotará mediante $b$. Puesto que $b \in S(a)$, se tiene que

$$a \prec b$$

vea (4.1), Ahora considere un elemento arbitrario $c \in A$ tal que $a \prec c$. En este caso, se tiene que $c \in S(a)$, de manera que $b \preceq c$, pues $b$ es el mínimo de los elementos de $S(a)$. Esta discusión puede resumirse como sigue: Se ha demostrado que $a \prec b$ y que $b \preceq c$

para todo $c$ que satisface $a \prec c$. Por lo tanto, $b$ es un sucesor de $a$. Para concluir, suponga que $b$ y $b_1$ son dos sucesores de $a$. En este caso,

$$a \prec b \quad y \quad a \prec c \Rightarrow b \preceq c \tag{4.2}$$

Similarmente

$$a \prec b_1 \quad y \quad a \prec c \Rightarrow b_1 \preceq c \tag{4.3}$$

Usando la implicación en **(4.2)** con $c = b_1$, se desprende que

$$b \preceq b_1$$

mientras que a partir de la implicación en **(4.3)** con $c = b$, se obtiene

$$b_1 \preceq b$$

y por lo tanto, si $b \neq b_1$, las dos últimas relaciones desplegadas implican que $b \prec b_1$ y $b_1 \prec b$ ocurren simultáneamente, lo cual se opone a la propiedad de completez en la Definición de orden total. Por lo tanto, $b = b_1$, estableciendo la unicidad del sucesor de **A**.

**Definición 4.1.** Suponga que **A** es un conjunto finito que consiste de más de un elemento. Defina la función

$$Suc: A \setminus \{M\} \to A$$

mediante

$$Suc(a) = \text{sucesor de } a, \qquad a \in A \setminus \{M\}.$$

**Ejemplo 4.1.** Considere el conjunto **A** introducido en el Ejemplo **3.1,** eso es, **A** = $\{A, *, 0, !\}$ en el cual la relación de orden completo está dada por

$$! \prec A,\ ! \prec *,\ ! \prec 0,\ A \prec 0,\ y\ * \prec 0 \tag{4.4}$$

Como se mencionó anteriormente, **M** = 0 es el máximo de **A**. El sucesor de cada elemento de **A** diferente de 0 está dado, de acuerdo a **(4.4),** por

$$\textbf{Suc(!)} = \textbf{A}, \quad \textbf{Suc(A)} = *, \quad \textbf{Suc(*)} = 0. \tag{4.5}$$

Como consecuencia del Teorema **4.1** y de la definición de la función **Suc,** se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.** Dado un conjunto finito con más de un elemento, la función **Suc** es uno a uno. Más aún, **Suc** es una biyección entre **A** \ **{M}** y **A** \ **{m}.**

**Demostración.** Primero se verificará que **Suc** es una función uno a uno, esto es, que la siguiente afirmación es válida:

$$Suc(a) = Suc(\tilde{a}) \Rightarrow a = \tilde{a} \tag{4.6}$$

Para verificar esta afirmación se utilizará el método de contradicción. Con este fin, denote mediante b al valor común de $Suc(a)$ y $Suc(\tilde{a})$, esto es,

$$b = Suc(a) = Suc(\tilde{a}),$$

y suponga que $a \neq \tilde{a}$. En este caso, alguna de las dos alternativas ocurre:

$$a \prec \tilde{a} \quad o \quad \tilde{a} \prec a$$

y sin perdida de generalidad alguna, se supondrá que la primera de estas posibilidades es válida. En este caso, se tiene que

$$a \prec \tilde{a} \prec Suc(\tilde{a}) = b,$$

donde la segunda relación de procedencia se debe a la definición de sucesor de $\tilde{a}$. Sin embargo, b es también el sucesor de **a** de manera que la anterior relación desplegada implica que

$$a \prec \tilde{a} \prec Suc(a) = b$$

y entonces $\tilde{a}$ sucede a **a,** pero es anterior a **Suc(a)** = b, lo cual se opone al hecho de que b es el sucesor de **a.** Esto muestra que el supuesto $a \neq \tilde{a}$ conduce a una contradicción, y por lo tanto la implicación **(4.6)** es válida. Para concluir, recuerde que el dominio de la función **Suc** es **A \ {M}.** Además, **m,** el elemento mínimo de **A** no puede ser el sucesor de ningún miembro de **A** pues, por la Definición **3.2(a), m** no sucede a ningún elemento de **A.** Por lo tanto, **Suc** toma valores en **A \ {m},** es decir, **Suc** transforma cada miembro de **A\ {M}** en un elemento de **A \ {m};**

Puesto que ambos conjuntos en este enunciado tienen el mismo número de elementos y la función **Suc** es uno a uno, se desprende que **Suc** transforma **A \ {M}** sobre **A \ {m},** esto es, **Suc** es una biyección entre ambos conjuntos.

**Ejemplo 4.2** De nueva cuenta, sea **A** = **{A, *, 0, !}** dotado con el orden descrito en **(4.4).** Como ya se ha determinado con anterioridad, en este caso **m** = ! es el elemento mínimo de **A,** mientras que **M** = 0 es el miembro máximo. En este caso,

$$A \setminus \{M\} = \{A, *, !\}, \quad y \quad A \setminus \{m\} = \{A, *, 0\}$$

Note que de acuerdo a **(4.5),**

**Suc (!) = A**

**Suc(A) = ***

**Suc (*) = 0,**

De manera que **Suc** establece una biyección entre **{A, *, !}** y **{A, *, 0},** en concordancia con el Corolario **4.1.**

## El Procedimiento General

Después de la teoría desarrollada en las secciones precedentes, ha llegado el momento de presentar el resultado central de este trabajo, a saber, un procedimiento que permite enumerar, o listar todos los elementos de un conjunto finito una sola vez. La premisa fundamental es que se ha definido un orden completo en el conjunto de interés, y la idea detrás del algoritmo es la siguiente: Inicie la lista con un elemento mínimo del conjunto, y vaya agregando el sucesor del elemento que se ha anotado más recientemente, deteniendo el procedimiento cuando el último elemento incorporado no tenga sucesor, lo cual puede ocurrir sólo cuando dicho término es el máximo de los miembros del conjunto (vea el Teorema (4.1)).

### Algoritmo General de Listado

**Datos:** (a) Un conjunto finito A con dos o más elementos, dotado con un orden completo.

(b) Se conoce el elemento mínimo de A, denotado por **m,** así como la función **Suc,** esto es, se puede determinar el sucesor de cualquier elemento que no sea el máximo, y además se puede detectar si un elemento dado no tiene sucesor, de tal forma que dicho elemento es el máximo de A.

**Fase 1:** [Inicialización.] Defina k = 1, $a_1 = m$, el elemento mínimo de A

**Fase 2:** [Fase de prueba.] Suponga que se tiene la lista (posiblemente) parcial de elemento de A:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

(1) Si $a_k$ tiene un sucesor, vaya a la Fase 3.

(2) Si $a_k$ **no** tiene sucesor, vaya a la Fase 4.

**Fase 3:** [Fase de iteración.](1) Incremente k en una unidad y defina $a_{k+1}$ como el sucesor de $a_k$, esto es,

$$k \leftarrow k+1, \quad a_{k+1} = Suc(a_k)$$

(c) Retorne a la Fase 2.

**Fase 4:** [Fin de algoritmo.] La lista completa de los miembros de A es

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

Antes de demostrar la validez del algoritmo general de listado, se ilustrará su aplicación en el caso que ha sido utilizado anteriormente para ilustrar las ideas introducidas en este capítulo.

**Ejemplo 5.1.** Como antes, sea A = { A, *, 0, ! }, dotado con la relación de orden (4.4). Como se verificó en el Ejemplo 3.2, el elemento mínimo de A es **m** = ! y la función **Suc** está determinada en (4.5); vea el Ejemplo 4.5. La aplicación del algoritmo de listado es como sigue:

**Fase 1:** **k** = 1, $a_1$ = !, pues el elemento mínimo de A es !

**Fase 2:** En este momento se tiene la lista parcial

!

Puesto que $a_1$ = ! tiene sucesor, la ruta es hacia la Fase 3.

**Fase 3:** (1) Se incrementa k en 1 y de define $a_2 = Suc(!) =$ A. Después de hacer estos cambios, se tiene.

$$k = 2, \quad y \quad a_1 = !, a_2 = A$$

**Fase 2:** En este momento k = 2 y la lista parcial es

!, A

Puesto que $a_2$ = A tiene sucesor, la ruta es hacia la Fase 3.

**Fase 3:** (1) Se incrementa k en 1 y de define $a_3$ = Suc(A) = *. Después de hacer estos cambios, la situación se resume en

$$k = 3, \quad y \quad a_1 = !, a_2 = A, a_3 = *.$$

(2) Se retorna a la fase 2.

**Fase 2:** Ahora el más reciente de los elementos incorporados a la lista es $a_3$ = *. Puesto que $a_3$ tiene sucesor, la ruta es hacia la Fase 3.

**Fase 3:** (1) Se incrementa k = 3 en 1 y se define $a_4 = SUC(*) = 0$. Después de hacer estos cambios, la situación se resume en.

$$k = 4, \quad y \quad a_1 = !, a_2 = A, a_3 = *, a_4 = 0.$$

(2) Se retorna a la Fase 2.

**Fase 2:** El último elemento agregado a la lista es $a_4$ = 0 y no tiene sucesor. Por lo tanto, la ruta es hacia la Fase 4.

**Fase 4:** El Algoritmo concluye: A tiene k = 4 elementos, y la lista de los elementos de A generada por el algoritmo es !, A, *, 0.

**Teorema 5.1.** Dado un conjunto finito A dotado con un orden completo, el algoritmo general de listado produce una enumeración de todos sus elementos.

**Demostración.** El argumento es por inducción en el número de elementos de A.

Se demostrará que:

Si A tiene m elementos, entonces el algoritmo termina después de m visitas a la Fase 2 (5.1)

Esta afirmación es claramente válida para m = 2. Suponga que (5.1) ocurre cuando un conjunto A dotado con un orden completo tiene m = n ≥ 2 elementos, y sea A un conjunto con n + 1 miembros, entre los cuales se ha construido un orden total. Si M es el máximo de A defina el nuevo conjunto

$$\tilde{A} = A \setminus \{M\},$$

el cual tiene n miembros (uno menos que el número de elementos de $A$ ). Por lo tanto, aplicando el algoritmo al conjunto $\tilde{A}$ la hipótesis de inducción implica que, después de n visitas a la Fase 2, se habrá completado una lista de todos los miembros de $\tilde{A}$ . De hecho, en la visita número n, se encontrará que $a_n$ no tiene sucesor en $\tilde{A}$ . y la bifurcación será a la Fase 4. Sin embrago, esto último ocurre si el interés se centra en $\tilde{A}$ . Si lo que se busca es listar los miembros del conjunto original $A$, se detectará que $a_n$ si tiene sucesor (el cual es M) y la bifurcación será hacia la Fase 3, en el cual se pasará de k = n a k = n + 1 y se definirá $a_{n+1} = Suc(a_n) = M$ . Después de este paso, se retornará a la Fase 2 haciendo la visita n + 1, en la cual se detectará que M no tiene sucesor, y el flujo se dirigirá hacia la Fase 4, finalizando la lista de los miembros del conjunto original con n + 1 pasos por la Fase 2. Este argumento verifica que (5.1) es válido con m = n +1, y concluye el argumento de inducción.

## El Orden Lexicográfico

Cuando un conjunto finito $A$ está dotado con un orden total (completo), el algoritmo propuesto en la sección anterior produce una lista de todos los miembros. De hecho, combinando el Teorema 5.1 con los comentarios plasmados en la sección 2, es claro que los problemas de generar una lista de los miembros de un conjunto finito y de definir una relación de orden total entre sus miembros, son problemas equivalentes. En las aplicaciones, la utilización del Teorema 5.1 para generar listados, depende de que se tenga a la mano una relación de orden completa. Los ejemplos presentados hasta ahora han tenido una finalidad ilustrativa, y han dejado a un lado la consideración de los conjuntos más complejos -la clase de permutaciones y la familia de subconjuntos– que son de interés primordial. Para dichos conjuntos, el problema de generar una lista de sus miembros tiene gran importancia en la *Estadística* no paramétrica; sin embargo, dichos conjuntos se ubican dentro de $\mathbb{R}^p$ para algún entero $p \geq 2$ , y es necesario introducir una relación de orden en este espacio multidimensional.

Definición **6.1** La relación de orden lexicográfico en $\mathbb{R}^p$ está determinada de la siguiente manera: Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ son los miembros arbitrarios de $\mathbb{R}^p$, entonces.

$a \prec b$ si y sólo si existe un entero $k \leq p$ tal que

$$a_i = b_i \quad \textbf{para} \quad 1 \leq i < k, \quad y \quad a_k < b_k.$$

Verbalmente, esta relación puede describirse como sigue: Para comparar los miembros a, b $\in \mathbb{R}^p$, recorra a y b de izquierda a derecha simultáneamente, hasta encontrar la primera posición en que las componentes correspondientes de a y b difieran. En este caso, de declara que a $\prec$ b si en dicha posición la componente de b es mayor que la de a, mientras que b $\prec$ a en otro caso; por supuesto, si todas las componentes de a y de b coinciden, se tiene que a = b. Por ejemplo, considere el caso de p = 5 y sean

$$\mathbf{a} = (5, 5, 4, 7, 10), \quad \mathbf{b} = (5, 5, 4, 10, 11).$$

En este caso, al recorrer a y b de izquierda a derecha, se observa que difieren en la posición número k = 4, y que la cuarta componente de b es 10, la cual es mayor a la cuarta componente de a (la cual es 7):

$$a_i = b_i, \quad 1 \leq i < 4, \quad a_4 < b_4$$

De acuerdo a la Definición 6.1, se desprende que a $\prec$ b. El siguiente teorema establece que la relación introducida en la Definición 6.1 es, efectivamente, una relación de orden total.

Teorema **6.1.** La ordenación lexicográfica en $\mathbb{R}^p$ es completa (total) en el sentido de la Definición 3.1

Demostración. Se verificará que el orden lexicográfico tiene las propiedades de transitividad y completez:
(a) [Transitividad.] Suponga que a, b, c $\in \mathbb{R}^p$ son tales que

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b}, \ y \ \mathbf{b} \prec \mathbf{c} \tag{6.1}$$

En tal caso, existen enteros $k_1$ y $k_2$ entre 1 y p tales que

$$a_i = b_i, \ 1 \leq i < k_1, \ a_{k_1} < b_{k_1}, \quad y \quad b_i = c_i, \ 1 \leq i < k_2, \ b_{k_2} < c_{k_2} \tag{6.2}$$

Considere ahora los siguientes casos: (1) $k = k_2 = k_3$. En estas circunstancias, (6.2) implica que $a_i = c_i$ siempre que $1 \leq i < k$ mientras que $a_k = a_{k_1} < b_{k_1} = b_{k_2} < c_{k_2} = c_k$, esto es, es la primera posición para la cual los componentes de **a** y **c** difieren, la componente **c** es mayor. Por lo tanto,

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{c}.$$

(2) $k_1 < k_2$. En este caso, defina $k = k_1$. Utilizando (6.2), se tiene que

$$a_i = b_i, \quad 1 \leq i < k, \quad \text{y} \quad a_k < b_k$$

Además, debido a que $k < k_2$, se tiene que $b_i = c_i$, $1 \leq i \leq k$, por lo tanto, la última relación desplegada implica que

$$a_i = c_i, \quad 1 \leq i < k, \quad \text{y} \quad a_k < c_k$$

de tal forma que $\mathbf{a} \prec \mathbf{c}$. (3) $k_1 > k_2$. En este caso, defina $k = k_2$. De nueva cuenta, utilizando (6.2), se obtiene, puesto que $k_1 > k = k_2$, que

$$a_i = b_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

mientras que

$$b_i = c_i, \quad 1 \leq i < k, \quad b_k < c_k.$$

Por lo tanto, a partir de estas relaciones desplegadas se obtiene

$$a_i = b_i, \quad 1 \leq i < k, \quad a_k = b_k < c_k,$$

de tal forma que, $\mathbf{a} \prec \mathbf{c}$. Este argumento ha demostrado que, en cualquier circunstancia, se tiene que $\mathbf{a} \prec \mathbf{c}$ siempre que (6.1) sea válida, esto es,

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} \prec \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \prec \mathbf{c},$$

estableciendo la propiedad de transitividad.

(b) [Completez.] Dados dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, debe demostrarse que exactamente una de las siguientes alternativas ocurre:

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \text{o} \quad \mathbf{b} \prec \mathbf{a} \qquad (6.3)$$

Suponga que $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. En este caso, **a** y **b** difieren en alguna componente; defina k como el primer entero en el que las componentes correspondientes de **a** y **b** son distintas, esto es,

$$a_i = b_i, \quad 1 \leq i < k, \quad a_k \neq b_k$$

Si $a_k < b_k$, la Definición 6.1 implica $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, mientras que si $a_k > b_k$, entonces $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$. Por lo tanto, se ha demostrado que si $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, entonces exactamente una de las otras dos relaciones en (6.3) ocurre; esto establece que el orden lexicográfico es completo, y concluye la demostración del Teorema.

## Conclusión

En este trabajo se ha estudiado el problema general de listado (enumeración) para un conjunto finito ***A***. La presentación puso de manifiesto la equivalencia entre este problema y la construcción de una relación de orden total entre los miembros de ***A***, y se formuló un algoritmo general de listado, el cual permite enumerar todos los miembros de un conjunto finito arbitrario, tan pronto como se haya definido una relación de orden total entre sus miembros. Sin embargo, debe señalarse que la aplicación efectiva de dicho procedimiento depende de las siguientes condiciones:

(a) Construir un orden total en el conjunto de interés;

(b) Determinar el elemento mínimo del conjunto;

(c) Especificar completamente la función **Suc,** la cual transforma un miembro de ***A*** que no sea el máximo, en su sucesor.

El punto (a) fue considerado en la Sección 6, donde se introdujo el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^n$, y se demostró que es un orden total, de manera que un conjunto contenido en $\mathbb{R}^n$, siempre puede considerarse dotado del orden lexicográfico. Sin embrago, los aspectos (b) y (c) son específicos del conjunto ***A*** bajo consideración, esto es, la dificultad de determinar el mínimo de ***A*** y la función **Suc** dependen de las características de cada conjunto contenido en $\mathbb{R}^n$, e implican un análisis detallado cuya complejidad depende del caso específico analizado.

## Literatura citada

1 Dolciani, M. P. , E. Beckenbach. E. Reilich (1986), Algebra II Publicaciones culturales, 1976, México, D.F.

2 Munkres, J. R. (1975), Topology, A First Course, Prentice – Hay, Englewood Cliffs, New Jersey.

3 Papadopoulos, J. S. (1997), Calculate PI, ABCode, 2, June, 1997.

4 Suppes, P. (1971), Set Theory, Van – Nostrand, New York.