

Caracterización y Aplicación de la Distribución Birnbaum-Saunders como Modelo de Tiempos de Vida

Edgar Espinosa Cuello

Mario Cantú Sifuentes

Departamento de Estadística y Cálculo, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, México

Víctor Leiva Sánchez

Departamento de Estadística, Universidad de Valparaíso, Chile.

Abstract. *Characterization and Application of the Birnbaum-Saunders Distribution as Life Time Model.* The Birnbaum-Saunders distribution was developed originally to modeling lifetimes of materials exposed to fatigue tests. In this work three examples with real data, where such a distribution is applied, are studied. It is taken into account both cases: complete and censored data. As a fourth example, a computational algorithm for simulation of data from a Birnbaum-Saunders distribution is presented.

Key words: Birnbaum-Saunders distribution, Fatigue of materials, Goodness-of-fit tests.

Resumen. La distribución Birnbaum-Saunders fue desarrollada originalmente para modelar tiempos de vida de materiales expuestos a pruebas de fatiga. En el presente trabajo se estudian tres ejemplos con datos reales donde se aplica dicha distribución. Se toman en cuenta tanto el caso de datos completos como el caso de datos censurados. En un cuarto ejemplo se presenta un algoritmo computacional para generar datos provenientes de una distribución Birnbaum-Saunders.

Palabras clave: Distribución Birnbaum-Saunders, Fatiga de materiales, Pruebas de bondad de ajuste.

Introducción

En 1969, motivados por los problemas de vibración encontrados en los nuevos aviones comerciales y por los problemas de fatiga de materiales, Birnbaum y Saunders (1969a) presentaron un modelo probabilístico ingenioso para tiempos de vida de estructuras bajo carga dinámica. La distribución Birnbaum-Saunders (BS) fue derivada a partir de un modelo que muestra que las fallas se deben al desarrollo y crecimiento de una fractura dominante. Así, la distribución BS describe totalmente el tiempo de falla que ha transcurrido cuando cierta clase de daño acumulado excede un umbral. Su función de densidad de probabilidad (FDP) es de la forma

$$f(t) = \frac{1}{\alpha\beta} \xi'(t/\beta) \phi[\alpha^{-1} \xi(t/\beta)],$$

donde $\xi(t) = t^a - t^{-1/2}$, $\xi'(t) = d\xi(t)/dt$, $t, a, \beta > 0$ y ϕ es la FDP de la distribución Normal estándar. En palabras, una variable aleatoria (v.a.) positiva T se dice que se distribuye Birnbaum-Saunders, denotado

por $T \sim BS(\alpha, \beta)$ si la transformación de la v.a. $Z = \alpha^{-1}[(T/\beta)^{1/2} - (T/\beta)^{-1/2}]$ tiene una distribución Normal estándar. El parámetro β es un parámetro de escala y también la mediana de la distribución. El parámetro α es un parámetro de forma para la distribución.

Algunas propiedades básicas de la distribución BS son:

$$i \quad E(T) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right),$$

$$ii \quad VAR(T) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5\alpha^2}{4} \right),$$

$$iii \quad \text{si } T \sim BS(\alpha, \beta), \text{ entonces } T^c \sim BS(\alpha, \beta^c)$$

y $cT \sim BS(\alpha, c\beta)$ para cualquier real $c > 0$,

$$v. \quad \text{si } Z = \alpha^{-1} \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{T}{\beta} \right)^{-1/2} \right] \text{ entonces}$$

$$T = \beta \left\{ \frac{\alpha Z}{2} + \left[\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\}^2,$$

donde $E(T)$ y $VAR(T)$ denotan la media y la varianza, respectivamente.

Birnbaum y Saunders (1969b) obtuvieron los estimadores de máxima verosimilitud para α y β . Engelhardt et al. (1981) desarrollaron intervalos de confianza y pruebas de hipótesis usando muestras completas grandes y pequeñas. Los procedimientos para muestras grandes están basados en la normalidad asintótica de los estimadores de verosimilitud máxima, mientras que en el caso de las muestras pequeñas los métodos se basan en simulación. Desmond (1983, 1985 y 1986) obtuvo una derivación de la distribución BS más general y estableció una conexión entre la distribución Inversa Gaussiana y la distribución BS. Rieck y Nedelman (1991) propusieron un modelo log-lineal para la distribución BS y desarrollaron métodos de estimación. McCarter (1999) discute la estimación de parámetros para el caso de muestras censuradas tipo II. Hay varias generalizaciones de la distribución BS, entre ellas están la propuesta por Owen y Padgett (1999) quienes hacen una generalización de dos a tres parámetros junto con su caracterización y algunos ejemplos. Díaz y Leiva (2002) presentan otra generalización de la distribución BS, generándola desde una distribución de Contornos Elípticos, la caracterizan y obtienen una familia de distribuciones de vida en situaciones diferentes y variadas, tales como distribuciones de vida que no tienen momentos, cuando las colas son más pesadas o menos pesadas, o cuando la distribución sea bimodal.

El objetivo de este trabajo es aplicar métodos estadísticos relacionados con la distribución BS a problemas de fatiga en materiales. Se darán cuatro ejemplos, tres con datos reales tomados de la literatura existente relacionada con el tema y un cuarto en donde se presenta un ejemplo basado en simulación.

Ejemplo 1

Para este ejemplo se usan los datos que emplearon originalmente Birnbaum y Saunders para sustentar la distribución que lleva su nombre. Se presentan tres conjuntos de datos que corresponden a tiempos de vida en ciclos $\times 10^{-3}$ de piezas de aluminio 6061-T6 cortadas en un ángulo paralelo a la dirección de rotación y oscilando a 18 ciclos por segundo a una presión máxima de 31000, 26000 y 21000psi, donde psi (Pounds per

Square Inch) es una medida de presión. Estos conjuntos de datos son completos (y los denotaremos por T) y se presentan en los Cuadros 1, 2 y 3, para 31000, 26000 y 21000psi, con tamaños de muestras de 101, 102 y 101, respectivamente.

Cuadro 1. Tiempos de vida en ciclos $\times 10^{-3}$ de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 31000 psi.

70	90	96	97	99	100	103	104	104	105
107	108	108	108	109	109	112	112	113	114
114	114	116	119	120	120	120	121	121	123
124	124	124	124	124	128	128	129	129	130
130	130	131	131	131	131	131	132	132	132
133	134	134	134	134	134	136	136	137	138
138	138	139	139	141	141	142	142	142	142
142	142	144	144	145	146	148	148	149	151
151	152	155	156	157	157	157	157	158	159
162	163	163	164	166	166	168	170	174	196
212									

Cuadro 2. Tiempos de vida en ciclos $\times 10^{-3}$ de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 26000 psi.

233	258	268	276	290	310	312	315	318	321
321	329	335	336	338	338	342	342	342	344
349	350	350	351	351	352	352	356	358	358
360	362	363	366	367	370	370	372	372	374
375	376	379	379	380	382	389	389	395	396
400	400	400	403	404	406	408	408	410	412
414	416	416	416	420	422	423	426	428	432
432	433	433	437	438	439	439	443	445	445
452	456	456	460	464	466	468	470	470	473
474	476	476	486	488	489	490	491	503	517
540	560								

Cuadro 3. Tiempos de vida en ciclos $\times 10^{-3}$ de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 21000 psi

370	706	716	746	785	797	844	855	858	886
886	930	960	988	999	1000	1010	1016	1018	1020
1055	1085	1102	1102	1108	1115	1120	1134	1140	1199
1200	1200	1203	1222	1235	1238	1252	1258	1262	1269
1270	1290	1293	1300	1310	1313	1315	1330	1355	1390
1416	1419	1420	1420	1450	1452	1475	1478	1481	1485
1502	1505	1513	1522	1552	1530	1540	1560	1567	1578
1594	1602	1604	1608	1630	1642	1674	1730	1750	1750
1763	1768	1781	1782	1792	1820	1868	1888	1890	1893
1895	1910	1923	1924	1945	2023	2100	2130	2215	2268
2440									

Análisis Exploratorio

Para la variable T, se procedió a aplicar tres criterios de bondad de ajuste.

Gráficos P-P

Si se tienen n observaciones que se cree que provengan de una distribución F, se puede construir un gráfico de las probabilidades empíricas versus probabilidades teóricas de dichas observaciones. Si estos puntos están aproximadamente alineados será un indicio de que las observaciones provienen de dicha distribución.

A continuación se presentan los gráficos P-P para la v.a. T con una presión máxima por ciclo de: 31000psi (Figura 1), 26000psi (Figura 2) y 21000psi (Figura 3) para las distribuciones de vida usadas comúnmente para

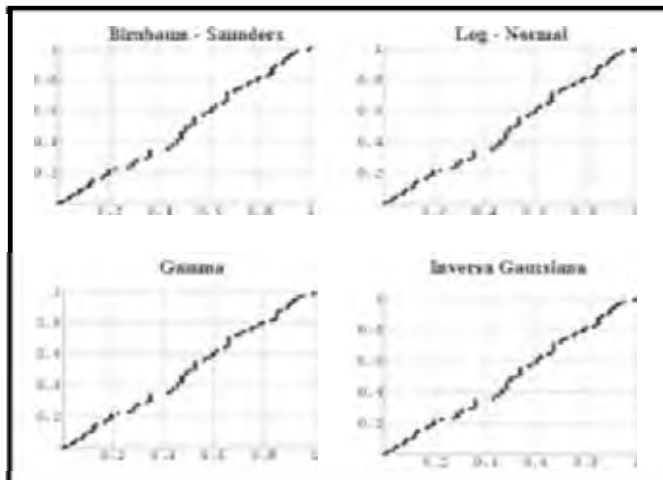


Figura 1. Gráficas P-P de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 31000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

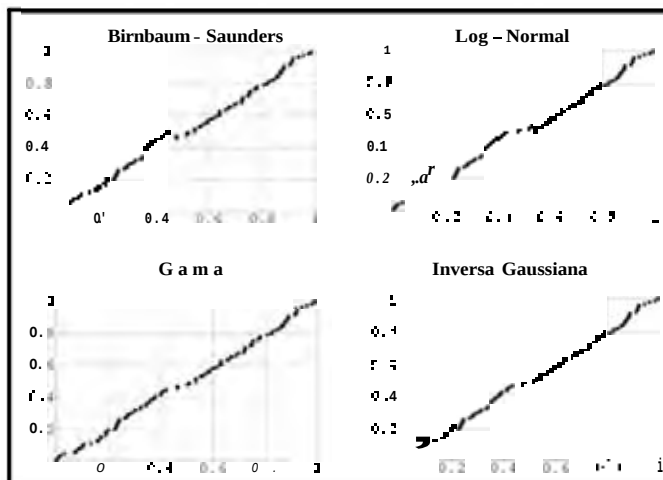


Figura 2. Gráficas P-P de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 26000psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Log-normal, Gamma e Inversa Gaussiana.

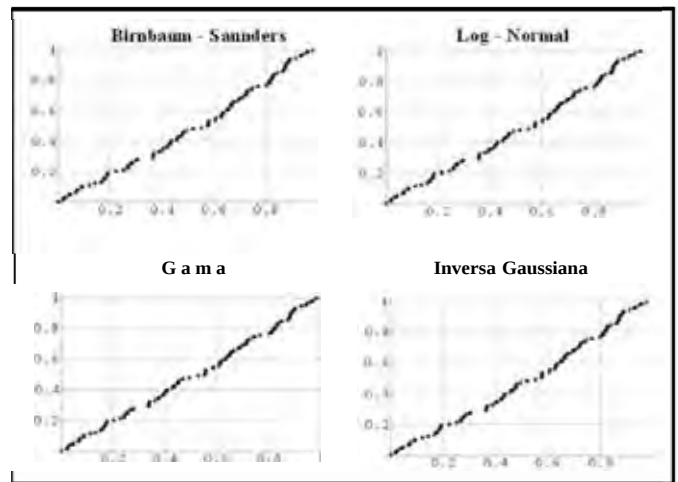


Figura 3. Gráficas P-P de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 21000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

modelar fallas debido a fatiga: Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

Según este criterio, y para todos los niveles máximos de presión indicados, no hay evidencia que permita descartar alguna de las distribuciones de vida por fatiga que se utilizan frecuentemente. Para tomar una determinación se utilizarán otros criterios.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) se utiliza para decidir si una muestra proviene o no de una población con una distribución específica $F(x)$, basándose en la función de distribución empírica (FDE). Específicamente, dados n puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$, se define la FDE $F_n(x) = \frac{m(x)}{n}$, donde $m(x)$ es el número de puntos menores que x , y es una función que aumenta con n.

La prueba KS se basa en la distancia máxima entre $F(x)$ y $F_n(x)$. Más concretamente, ésta consiste en contrastar

$$H_0: F(x) = F^*(x) \text{ versus } H_1: F(x) \neq F^*(x),$$

donde $F^*(x)$ es la distribución que se sospecha siguen los datos.

La estadística de prueba viene dada por

$$KS = \max_x |F_n(x) - F(x)|$$

La hipótesis con respecto a la forma distribucional de los datos se rechaza si la estadística de prueba KS es mayor que el percentil $1-\alpha$ de la distribución de Kolmogorov-Smirnov, la cual viene implementada en la mayoría de los software estadísticos, por ejemplo S-Plus.

A continuación se presentan las pruebas KS para la v.a. T con una presión máxima por ciclo de: 31000psi

(Cuadro 4), 26000psi (Cuadro 5) y 21000psi (Cuadro 6) para las distribuciones de vida por fatiga Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana, donde el criterio es tomar la distribución que tenga el mayor valor p.

Cuadro 4. Concentrado de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para los datos de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 31000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	Estadístico KS	p-value
Gamma	0.0727	0.659
Lognormal	0.0842	0.075
Birnbaum-Saunders	0.1095	0.000
Inversa Gaussiana	0.3849	0.000

Cuadro 5. Concentrado de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para los datos de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 26000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	Estadístico KS	p-value
Inversa Gaussiana	0.0369	1.000
Birnbaum-Saunders	0.0370	1.000
Gamma	0.0442	0.989
Lognormal	0.0539	0.500

Cuadro 6. Concentrado de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para los datos de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 21000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	Estadístico KS	p-value
Gamma	0.0581	0.885
Birnbaum-Saunders	0.0750	0.543
Lognormal	0.0742	0.500
Inversa Gaussiana	0.3655	0.330

Según este criterio, sólo en el segundo conjunto de datos (Cuadro 5) la distribución Birnbaum-Saunders fue la distribución de vida por fatiga que mejor se ajusta a los datos.

Criterio de Información de Schwartz

Este criterio, para un modelo con parámetro $\theta \in \mathbb{R}^p$, está dado por:

$$SIC = -2\log[f(y|\theta)] + p\log(n),$$

donde $f(y|\theta)$ es la densidad asociada a los datos y n es la cantidad de observaciones. Así, cuando se disponga de varios modelos hipotéticos que se puedan ajustar a un conjunto de datos, un criterio es seleccionar aquel modelo que tenga el menor SIC.

A continuación se utiliza este criterio para los tiempos de vida T con estrés máximo por ciclo de: 31000psi (Cuadro 7), 26000psi (Cuadro 8) y 21000psi (Cuadro 9) para las distribuciones de vida por fatiga Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

Cuadro 7. Resultados del criterio de información de Schwartz de selección de modelos para los datos de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 31000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	SIC
Gamma	921.886
Lognormal	923.468
Birnbaum-Saunders	923.771
Inversa Gaussiana	923.802

Cuadro 8. Resultados del criterio de información de Schwartz de selección de modelos para los datos de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 26000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	SIC
Gamma	1142.39
Lognormal	1144.56
Birnbaum-Saunders	1144.65
Inversa Gaussiana	1144.68

Cuadro 9. Resultados del criterio de información de Schwartz de selección de modelos para los datos de tiempos de vida de piezas de aluminio 6061-T6 sujetas a una presión máxima de 21000 psi para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	SIC
Gamma	1503.73
Lognormal	1510.42
Birnbaum-Saunders	1511.97
Inversa Gaussiana	1512.36

Según este criterio, en ninguno de los casos la distribución BS fue la distribución de vida por fatiga que mejor se ajusta a los datos.

Como conclusión de este ejemplo, podemos decir que los datos que emplearon Birnbaum y Saunders para justificar la distribución que lleva su nombre, se ajustan mejor con otros modelos. En la mayoría de los casos, parece ser la distribución Gamma la que mejor ajusta los datos. Sin embargo, debido a su génesis, la distribución BS se utiliza con más frecuencia para modelar tiempos de vida debido a fatiga.

Ejemplo 2

Considere los datos de fatiga biaxial reportados por Brown y Miller (1978) y el modelo log-lineal $Y_i = X_i + \varepsilon_i$ propuesto por Rieck y Nedelman (1991). En el ejemplo de Brown y Miller la respuesta, N, es el número de ciclos hasta que ocurre la falla y la variable independiente, W, es el esfuerzo por ciclo (medida en MJ/m³). Se consideraron 46 observaciones para establecer un modelo adecuado de predicción, las que se presentan en el Cuadro 10.

Cuadro 10. Datos de tiempo a fatiga de Brown y Miller (1978).

W	N	W	N	W	N	W	N
11.5	3280	24.0	804	40.1	750	60.3	283
13.0	5046	24.6	1093	40.1	316	60.5	212
14.3	1563	25.2	1125	43.0	456	62.1	327
15.6	4707	25.5	884	44.1	552	62.8	373
16.0	977	26.3	1300	46.5	355	66.5	125
17.3	2834	27.9	852	47.3	242	67.0	187
19.3	2266	28.3	580	48.7	190	67.1	135
21.1	2208	28.4	1066	52.9	127	67.9	245
21.5	1040	28.6	1114	56.6	185	68.8	137
22.6	700	30.9	386	59.9	255	75.4	200
22.6	1583	31.9	745	60.2	195	100.5	190
24.0	482	34.5	736				

Análisis Exploratorio

Para la variable N, número de ciclos hasta que ocurre la falla, se aplicaron los tres criterios de bondad de ajuste usados en el ejemplo 1. Los resultados fueron los siguientes.

Gráficos P-P

A continuación se presentan los gráficos P-P para los datos de fatiga biaxial de Brown y Miller (1978) para las

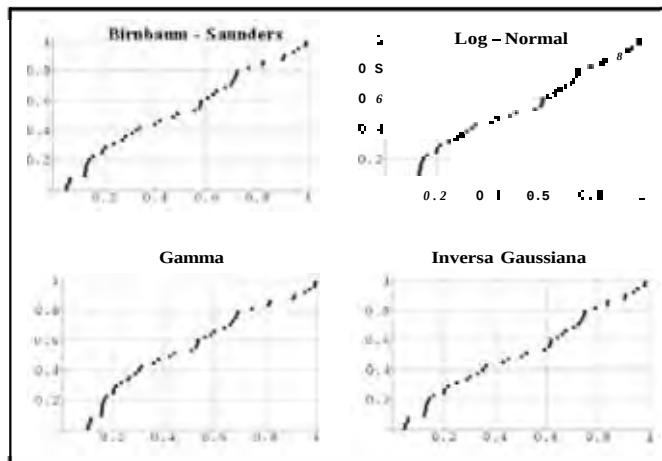


Figura 4. Gráficas P-P de los tiempos de vida de Brown y Miller (1978) para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

distribuciones de vida por fatiga Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

Según este criterio, aunque casi todas las distribuciones de vida por fatiga que se presentan se ajustan bien al conjunto de datos, la distribución BS es una de las que mejor se comporta.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

A continuación se presenta la prueba KS para los datos de fatiga biaxial de Brown y Miller (1978) para las distribuciones de vida por fatiga Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

Cuadro 11. Concentrado de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS) para los datos de Brown y Miller (1978) para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	Estadístico KS	p-value
Birnbaum-Saunders	0.0228	0.542
Inversa Gaussiana	0.0499	0.526
Lognormal	0.0917	0.500
Gamma	0.8953	0.000

Según este criterio, la distribución de vida por fatiga que mejor se ajusta a los datos es la distribución BS.

Criterio de Información de Schwartz

A continuación se presenta el criterio de información de Schwartz para los datos de fatiga biaxial de Brown y Miller (1978) para las distribuciones de vida por fatiga Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana.

Cuadro 12. Resultados del criterio de información de Schwartz de selección de modelos para los datos de Brown y Miller (1978) para las distribuciones Birnbaum-Saunders, Lognormal, Gamma e Inversa Gaussiana

Distribución	SIC
Inversa Gaussiana	717.391
Birnbaum-Saunders	718.530
Lognormal	720.538
Gamma	729.490

Con este criterio, la distribución de vida por fatiga que mejor se ajusta a los datos es la distribución Inversa Gaussiana, seguida muy de cerca por la distribución BS.

En base a los tres criterios empleados, se concluye que la distribución que mejor se ajusta a los datos de fatiga biaxial es la distribución BS, cuyas estimaciones de sus parámetros son $\hat{\alpha} = 1.08574$ y $\hat{\beta} = 600.91$.

Análisis Confirmatorio

En la Figura 5(a), 5(b), 5(c) y 5(d) se presentan los diagramas de dispersión de W versus N, W versus Log(N), Log(W) versus N y Log(W) versus Log(N), respectivamente.

Se ve que el modelo exponencial (Figura 5(d)) es el más adecuado, esto es, el modelo log-lineal

$$\text{Log}(N_i) = \beta_1 + \beta_2 \text{Log}(W_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, 46$$

donde $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Las estimaciones de verosimilitud máxima de $\beta = [\beta_1 \quad \beta_2]'$ son (con sus errores estándar estimados entre paréntesis):

$$\hat{\beta}_1 = 12.289 (0.406) \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_2 = -1.673 (0.113)$$

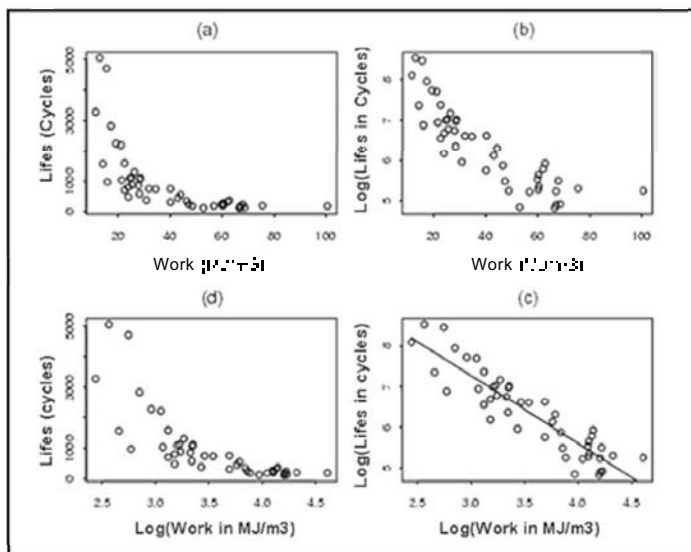


Figura 5. Para los datos de Brown y Miller (1978) se presentan los diagramas de dispersión; en la Fig. 5 (a) el de W v.s N; en la 5(b) el de W v.s Log(N); en la 5(c) el de Log(W) v.s N y en la 5 (d) el de Log(W) v.s Log(N).

ambos coeficientes $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\}$ son estadísticamente significativos, con valores-p de 4.17416×10^{-31} y 9.92861×10^{-19} , respectivamente. El valor-p de la ANOVA es 9.92861×10^{-19} , el cual también es altamente significativo. El porcentaje de variabilidad explicado por el modelo es del 83.3%.

Ejemplo 3

En el siguiente ejemplo se consideran los datos de fatiga biaxial reportados por Brown y Miller en 1978, en los cuales, para aplicar la metodología de datos censurados, se consideró una censura tipo II al 20%, obteniéndose los siguientes datos.

Cuadro 13. Datos de fatiga biaxial de Brown y Miller, con censura tipo II al 20%. * indica censura por la derecha.

125	127	135	137	185	187	190	190
195	200	212	242	245	255	283	316
327	355	373	386	456	482	552	580
700	736	745	750	804	852	884	977
1040	1066	1093	1114	1125	1125*	1125*	1125*
1125*	1125*	1125*	1125*	1125*	1125*		

Análisis Estadístico

En el Cuadro 14 se presentan las estimaciones de α y β de la distribución BS, a partir de una muestra censurada tipo II al 20%, junto con sus intervalos de confianza al 95%. En el Cuadro 15, con carácter referencial, se presentan los mismos resultados para los datos completos de Brown y Miller.

Cuadro 14. Estimación de los parámetros y sus intervalos de confianza al 95% de la distribución BS para los datos de fatiga biaxial de Brown y Miller con censura tipo II al 20 %.

Parámetro	Estimación	Límite inferior	Límite superior
α	0.9516	0.9137	0.9894
β	538.0290	516.0131	560.0448

Cuadro 15. Estimación de los parámetros y sus intervalos de confianza al 95% de la distribución BS para los datos de fatiga biaxial de Brown y Miller completos.

Parámetro	Estimación	Límite inferior	Límite superior
α	1.0857	0.0000	1.1184
β	600.9100	593.3405	608.4794

Ejemplo 4

Procedimiento de Generación de Números Aleatorios BS

Sea T una variable aleatoria con distribución BS con parámetros de forma α y de escala β . Denote su función de distribución por

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi(g(t; \alpha, \beta)),$$

donde

$$g(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$$

y Φ es la función de distribución Normal estándar. Esto implica que la variable aleatoria $g(t; \alpha, \beta)$ sigue distribución Normal estándar. Como se sabe, $g(t; \alpha, \beta)$ es estrictamente creciente y por lo tanto tiene inversa, dada por $g^{-1}(t; \alpha, \beta)$. Sea Z una variable aleatoria que sigue una distribución Normal estándar. Entonces,

$$g(t; \alpha, \beta) \xrightarrow{u} Z \Rightarrow T \xrightarrow{u} g^{-1}(Z; \alpha, \beta) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{2} + \alpha Z \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{4}} \right),$$

donde T fue dada anteriormente.

Ahora, si se dispone de un generador de números aleatorios con distribución Normal estándar, entonces se puede considerar el siguiente procedimiento:

- i. Generar una muestra aleatoria de tamaño n con distribución Normal estándar, la cual se denotará por $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.
- ii. Tome

$$T_i = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2 Z_i^2}{2} + \alpha Z_i \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z_i^2}{4}} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

De este modo, $T_1, T_2, \dots, T_n$ es una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de una distribución BS con parámetros α y β .

Datos Simulados

Con el procedimiento visto en la sección anterior, se generaron tres conjuntos de 10, 100 y 1000 números aleatorios tomando como parámetro $\alpha = 0,170385$ y $\beta = 131.819$. Como muestra, se presentan en el Cuadro 14 un conjunto de 100 datos generados con el procedimiento anterior ordenados ascendentemente.

En el Cuadro 15 se presentan los verdaderos valores de los parámetros α y β (valores que se consideraron para el procedimiento de generación de números aleatorios) comparados con los valores estimados desde las muestras de tamaños 10, 100 y 1000. En el Cuadro 16 se muestra el error relativo entre los verdaderos valores y sus estimaciones.

Las gráficas de la función de distribución BS con los parámetros utilizados para la generación de números aleatorios se presenta en la Figura 6, donde los puntos negros representan la frecuencia acumulada para los datos generados aleatoriamente.

Cuadro 16. Cien datos aleatorios provenientes de una distribución BS.

82.60	88.78	92.59	96.40	97.42	100.72	100.94	101.10	103.13
104.83	104.99	105.97	106.23	106.76	107.60	107.85	109.35	110.45
110.66	111.34	112.05	112.13	112.49	113.98	114.43	116.31	116.82
116.95	116.96	117.23	117.37	117.42	118.23	118.52	119.40	121.21
121.37	123.05	123.20	124.18	124.22	125.02	125.74	127.13	127.85
129.49	129.69	130.05	130.07	131.16	131.33	132.13	132.50	132.65
132.95	133.75	136.37	136.76	136.79	137.04	137.18	137.76	138.45
138.67	139.79	141.34	142.30	144.46	145.18	147.87	148.32	149.11
149.50	149.97	150.46	150.67	151.45	151.72	152.55	152.86	153.21
153.58	155.02	156.17	157.78	158.13	158.44	159.78	165.28	166.21
167.84	170.07	170.90	170.98	174.12	174.91	187.15	189.55	198.94
201.07								

Cuadro 17. Valores reales y estimados de los parámetros de la distribución BS para muestras simuladas de tamaño 10, 100 y 1000.

Tamaño muestra	Valor real		Valor estimado	
	α	β	α	β
10	0.170385	131.819	0.163712	126.881
100	0.170385	131.819	0.182288	131.170
1000	0.170385	131.819	0.167278	132.971

Cuadro 18. Error relativo de los estimadores de los parámetros del modelo BS usando muestras aleatorias simuladas de tal distribución para tamaños de muestra 10, 100 y 1000.

Tamaño	Para α	Para β
10	0.0391642	0.0374605
100	0.0698594	0.00492342
1000	0.0182352	0.00873926

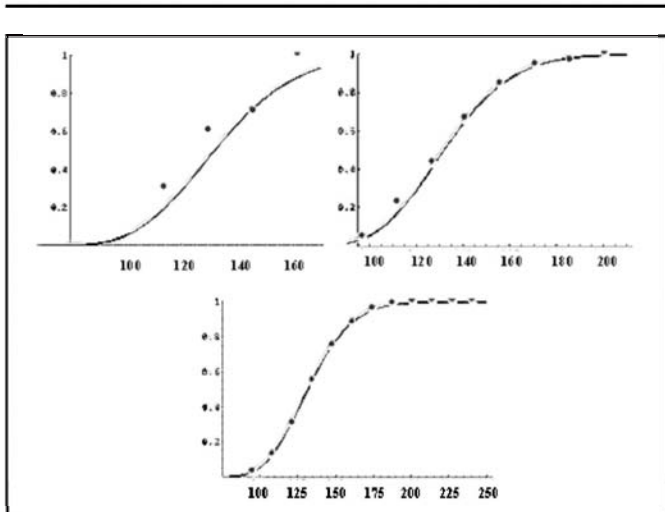


Figura 6. Comparación entre la distribución acumulada empírica (puntos en negro) y la teórica (línea continua) para los datos simulados de la distribución BS con tamaños de muestra 10, 100

Conclusiones

En el trabajo se utilizaron métodos para analizar datos desde una perspectiva de datos completos (ej. 1 y 2) y censurados (ej. 3). Para desarrollar las aplicaciones se implementaron programas en los software S-plus y Matemática.

En el ejemplo uno se descubrió que los datos de fatiga que se utilizaron en el artículo original de Birnbaum y Saunders de 1969 se ajustan mejor a otras distribuciones, lo que se confirmó a través de tres métodos de bondad de ajuste.

Es importante destacar que cuando el problema de estimación de la distribución BS generalizada planteada por Díaz y Leiva (2002) esté resuelto, sería interesante realizar nuevamente la bondad de ajuste y observar si alguna de las distribuciones de esa extensa familia de distribuciones de vida pudiera ajustarse mejor que las que existen hasta ahora.

Literatura Citada

- Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C. (1969a). A new family of life distributions. Journal of applied probability 6: 319-327.
- (1969b). Estimation for a family of life distribution with applications to fatigue. Journal of applied probability 6: 328-347.
- Brown, M.W., Miller, K.J. (1978). Biaxial fatigue data. Report CEMR1178, University of Sheffield. Department of mechanical engineering.
- Desmond, A.F. (1983). A local maxim of stationary stochastic processes and stochastic modeling of fatigue. Ph.D. Thesis, University of Waterloo.
- (1985). Stochastic models of failure in random environments. Canadian journal of statistics 13: 171-183.
- (1986). On the relationship between two fatigue-life models. IEEE transactions on reliability 35: 167-169.
- Díaz García, J.A., Leiva Sánchez, V. (2002). A new family of life distributions based on Birnbaum-Saunders distribution. Reporte Técnico CIMAT 03.09.2002,I-02-17(PE), Centro de Investigaciones Matemáticas, Guanajuato, México. (<http://www.cimat.mx/biblioteca/RepTec>).
- Engelhardt, M., Bain, L.J. and Wright, F.T. (1981). Inferences on the parameters of the Birnbaum-Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. Technometrics 23: 251-256.

- 9 McCarter, K.S. (1999). Estimation and prediction for the Birnbaum-Saunders distribution using Type-II censored samples, with a comparison to the Inverse Gaussian Distribution. Unpublished Ph. D. Thesis. Kansas State University, Department of Statistics, College of Arts and Sciences.
- 10 Owen, W.J., Padgett, W.J. (1999). Accelerated test models for system strength based on Birnbaum-Saunders distribution. Kluwer academic publishers. Lifetime data analysis 5: 133-147. Boston.
- 11 Rieck, J.R. (1995). Parameter estimation for the Birnbaum-Saunders distribution based on symmetrically censored samples. Commun. Statist. Theory Meth. 24 (7): 1721-1736.
- 12 Rieck, J.R., Nedelman J. (1991). A log-linear model for the Birnbaum-Saunders distribution. Technometrics 33: 51-60,



Area de Fisiotecnica Vegetal

Tels. (844) 411-02-96 y 411-02-97 · fborrego@uaaan.mx

El Area de Fisiotecnica Vegetal del Departamento de Fitomejoramiento de la UAAAN cuenta con Laboratorio e Invernadero en el Campus Buenavista, y lotes en campos experimentales y con agricultores cooperantes, en donde se realiza investigación tecnológica para generar fitotipos (plantas modelo) de variedades mejoradas con mayor eficiencia metabólica, y con mayor cantidad y calidad de rendimiento en cultivos con adaptación a factores adversos, para agricultura intensiva y sustentable en zonas áridas y semiáridas.

Actualmente se realizan proyectos en los cultivos de nopal, tomate, melón y papa, se brinda apoyo en estudios específicos de tolerancia a sequía en trigo y maíz, y se realizan análisis de crecimiento en cilantro y calabacita, así como estudios de estomas y clorofila en pino, eficiencia fotosintética en chile y vid, e incremento en calidad alimenticia en nopal para forraje. Se ha trabajado en convenios con CONACYT, FONCAN, La Forestal F.C.L. y Nevada Chemicals, para proyectos específicos con candelilla, nopal, orégano y en eficiencia fisiológica de ácidos húmicos en melón.

Se cuenta con instrumental científico avanzado y de alta precisión, como fotosintetómetro portátil (LI-6200), transpirómetro portátil (LI-1600), medidor portátil de Índice de Área Foliar (LAI-2000), sensores de radiación, temperatura y humedad, medidor electrónico de área foliar (LI-3000), cámaras bioclimáticas, estufas de secado, etc. Se realizan determinaciones de clorofila, ácido ascórbico, estomas, vitaminas, etc.

Asimismo se imparte docencia a Licenciatura, Maestría y Doctorado, así como Talleres y Cursos de Educación Continua a nivel nacional e internacional sobre aprovechamiento integral de nopal, a través de la FAO.

Personal

Coordinador del Area: Dr. Fernando Borrego Escalante

Jefa de Laboratorio: Dra. Ma. Margarita Murillo Soto

Docentes: M.C. Ma. Cristina Vega Sánchez, M.C. Arnoldo Oyervides García, Ing. José Luis Guerrero Ortiz





Centro de Investigación en Reproducción Caprina

Periférico y Carretera a Santa Fe, A.P. 940 Torreón, Coahuila, México

Tel: (871) 733-1270, 733-1090 . Fax: (871) 733-1210

Responsable: Dr. José Alberto Delgadillo Sánchez . delgadil@ul.uaaan.mx

Quienes somos

El Centro de Investigación en Reproducción Caprina (CIRCA) es un espacio académico que, transfiere la tecnología que genera y ofrece asistencia técnica integral a los caprinocultores desde 1992, y en el que interactúan docentes, alumnos y productores. El Centro brinda el ambiente ideal para que los interesados -escolarizados o no- aprendan, en la práctica, técnicas y manejo reproductivos de los caprinos.

Objetivo general

Realizar investigación científica y tecnológica sobre el comportamiento reproductivo de los caprinos de la Comarca Lagunera (México) en particular, y el de las zonas subtropicales en general, que permita la vinculación de la UAAAN con el sector productivo, e interactuar con instituciones nacionales e internacionales relacionadas con la biología de la reproducción animal, así como apoyar la formación de alumnos de licenciatura y postgrado.

Objetivos específicos

- Determinar las características reproductivas de los caprinos de la Comarca Lagunera y su interacción con el medio ambiente.
- Implementar técnicas de control reproductivo acordes con los sistemas de explotación.

En la actualidad el CIRCA colabora en aspectos académicos, científicos y tecnológicos con las siguientes instituciones:

- Estación de Fisiología de la Reproducción y del Comportamiento. INRA de Nouzilly, Francia.
- Centro Nacional de Neurobiología. UNAM, Juriquilla, Querétaro.
- Centro de Investigación en Reproducción Animal. CINVESTAV-U.A.T.
- caprinocultores de la Comarca Lagunera (México).

Debido a la relevancia de su quehacer y de los resultados obtenidos hasta la fecha, el CIRCA recibe apoyos económicos de fuentes de financiamiento externas a la Universidad, tales como:

- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.
- Fundación Internacional para la Ciencia, Estocolmo, Suecia.
- Sistema Regional de Investigación Alfonso Reyes. ANUIES-SEP-CONACyTIECOS.

Reconocimientos

- Fundación Internacional para la Ciencia, 2001 (Premio por investigación)
- Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología de Coahuila, 2002 (Reconocimiento por investigación).

Investigaciones en proceso

- Determinación de los mecanismos fotoperiódicos responsables del ciclo anual de reproducción de los caprinos de la Comarca Lagunera.
- Determinación de las interacciones entre la tasa de ovulación, la mortalidad embrionaria, los abortos y la fertilidad de las cabras y los sistemas de explotación
- Determinación del efecto del sistema de explotación sobre el ciclo anual de reproducción de los machos **cabríos**, así como la respuesta de éstos a los tratamientos fotoperiódicos para inducir la actividad sexual.
- Identificación de los mecanismos involucrados en la respuesta de las hembras al efecto macho (comportamiento sexual, olor, vocalizaciones..).
- Manipulación de la relación madre-cría, para incrementar la producción de leche y disminuir el anestro postparto.
- Determinación de las causas de la mortalidad perinatal de los cabritos explotados extensivamente.

