Indice de Funcionamiento de Normas de Paro en Control Estadístico de Calidad

Juan Manuel Saucedo Esquive1
Departamento de Estadística y Cálculo, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Buenavista, Saltillo Coah., México.

Abstract. Performance Index of Stopping Rules in Statistical Control of Quality. **This work deals with the idea of stopping rules, an instrument used like a means of securing the quality of end products in a manufacturing process. Its main purpose is to formulate a general stopping rule, and to obtain an expression for its index of operation. This objective is reached by applying some ideas of dynamic programming that will allow an approach to the problem from an algebraic perspective.**

Key Words: **Control Charts, Dynamic Programming, Conditional Expectation, Linear Equations.**

Resumen. Este trabajo trata sobre la idea de norma de paro, instrumento que se utiliza como medio de aseguramiento de la calidad de los productos finales en un proceso de fabricación. El propósito central es formular una regla general de paro y obtener una expresión para su índice de funcionamiento, objetivo que se alcanza aplicando ideas de programación dinámica que permiten abordar el problema desde una perspectiva algebraica.

Palabras Clave: Gráficos de control, Regla de paro, Programación dinámica Esperanza condicional, Ecuaciones lineales.

Introducción

Este trabajo trata sobre un problema fundamental que se presenta en cualquier proceso productivo, esto es, asegurar la calidad de los artículos finales. Aunque la noción en calidad es una idea compleja, este concepto puede definirse, desde una perspectiva operacional, como la aptitud para el uso que los productos tendrán, de tal forma que un propósito central en cualquier proceso de fabricación es lograr que las características esenciales de los objetos producidos, las cuales determinan la adecuación para el empleo que se les dará, permanezcan constantes, asegurando que la calidad de los productos finales que llegan al mercado sea similar. Cuando los rasgos esenciales de los artículos fabricados permanecen inalterados conforme se desarrolla la producción, se dice que el proceso productivo se encuentra bajo control estadístico, mientras que si uno o más de los rasgos relevantes se altera, el proceso se encuentra fuera de control. En términos generales, la estrategia que se sigue para detectar cambios no deseados en los rasgos de interés puede describirse como sigue (Godfrey y Mundel (1984)): A intervalos regulares (i) se toman muestras de artículos finales, (ii) se determina la característica de interés en cada uno de ellos, y (iii) los datos obtenidos se utilizan de cierta forma para detectar cambios no deseados en los rasgos relevantes; en este último punto la información recabada en las inspecciones muestrales sucesivas se traslada al área de toma de decisiones. Cuando se juzga que los datos acumulados indican que el proceso se encuentra fuera de control, el proceso productivo se revisa, buscando las causas que han propiciado la alteración de los rasgos esenciales; debido a que dicha revisión del proceso de fabricación puede implicar que se detenga la producción, en donde la regla que lleva a declarar al proceso como fuera de control se conoce como regla o norma de paro (Montgomery (1985), Duncan (1989) y John (1990)). Desde luego, los datos obtenidos en las inspecciones sucesivas pueden emplearse de muy diversas formas para declarar que el proceso se encuentra fuera de control, esto es, existen múltiples normas de paro que pueden utilizarse para detectar cambios en los rasgos relevantes de los artículos finales.

El objetivo de este trabajo es estudiar una norma general de paro y determinar su índice de funcionamiento. Dicho indicador proporciona una idea, a priori, acerca del número de productos finales que se fabricarán antes de que una alteración en la calidad de los mismos sea detectada aplicando una regla de paro. El resultado principal que se obtiene en esta nota está contenido en el Teorema 4.1, el cual establece una fórmula para el número esperado de inspecciones que se realizarán antes de detectar que el proceso se encuentre fuera de control, proporcionando una visión unificante de diversos resultados establecidos en la literatura (John (1990)). El enfoque que se utiliza depende de argumentos que involucran esperanzas condicionales. Estas ideas han sido exitosamente aplicadas en problemas de programación dinámica, los cuales se refieren a procesos secuenciales de toma de decisiones; Vea, por ejemplo, Sennott (1995, 1998), Puterman (1994), Cavazos-Cadena(l99 1, 1996).

El presente trabajo ha sido organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se describe el instrumento básico en el área de control de calidad, a saber, la idea de gráfico de control, cuya implementación permite organizar de manera visual la información que se recaba en las inspecciones muestrales que periódicamente se realizan en la línea de producción; de manera paralela, se introduce la noción de norma de paro, a través de la cual la información que se acumula en el gráfico se traduce a decisiones concretas de revisar el proceso productivo, o de continuarlo normalmente. En la Sección 3 se define el índice de funcionamiento de una norma de paro, el cual se construye tomando en cuenta el número de inspecciones que transcurrirán infructuosamente antes de detectar alteraciones del valor promedio del rasgo relevante de los artículos finales. A continuación, la Sección 4 contiene la formulación de la norma de paro general que es el objeto de estudio de este trabajo, estableciendo el resultado principal en el Teorema 4.1, el cual se demuestra en la Sección 6 después de presentar los resultados técnicos preliminares en la Sección 5. Finalmente, la presentación culmina en la Sección 6 con conclusiones y comentarios breves antes de la literatura citada.

Gráficos de Control y Normas de Paro

Un gráfico de control es un medio para organizar y representar visualmente la información obtenida al inspeccionar periódicamente muestras de productos finales. Este instrumento fue introducido por Shewart (1931), y desde sus orígenes se ha mantenido como la herramienta esencial para asegurar el control estadístico de un proceso productivo. Como punto de partida, sea q el valor de un rasgo de interés determinado y note que el objetivo básico es detectar cualquier cambio en q conforme el proceso productivo se desarrolla, esto es, se desea mantener q igual a su valor original θ_0, este último puede pensarse como el valor de diseño del rasgo relevante, el cual asegura que los artículos fabricados satisfagan, en una gran proporción, los requerimientos impuestos por el consumidor.

Para asegurar que el valor actual de q coincida con su nivel original θ_0, periódicamente se analizan muestras de productos y se determina el valor del rasgo relevante en cada uno de los artículos en la muestra. En el desarrollo de este trabajo, se supondrá que cada una de las muestras extraídas es de tamaño n y las observaciones obtenidas se representaran mediante $X_1, X_2, \ldots, X_n$. A partir estos números se construye el estadístico

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad (2.1)$$

la media muestra1 de $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Construcción de un Gráfico de Control. Con la notación dada en (2.1), los pasos para construir un gráfico de control asociado al nivel θ_0 del rasgo relevante, pueden describirse como sigue (Duncan (1989), John(199O)):

Etapa 1. Determinar o postular la distribución de Y cuando el parámetro θ asume su valor original θ_0.

Etapa 2. Determinar una región $\mathcal{A}$ tal que

$$P_{\theta_0}\left[Y \in \mathcal{A}\right] = 1 - \alpha \qquad \text{P.2]}$$

Esta igualdad significa que, bajo la condición de que θ asume su valor original θ_0, la probabilidad de que Y tome un valor en la zona $\mathcal{A}$ es $1-\alpha$; este último número es el nivel de inclusión de la región2, la cual se conoce como zona de predicción para Y con nivel $1-\alpha$ (Graybill (1986), Capitulo 5). Al seleccionar un $1-\alpha$ cercano a uno, entonces es 'prácticamente seguro' que la inclusión $y \in \mathcal{A}$ se satisfaga. Usualmente, se selecciona $\mathcal{A}$ como un intervalo $[L, U]$, donde

$$P_{\theta_0}\left[L \le Y \le U\right] = 1 - \alpha \qquad (2.3)$$

y en este caso L y U se conocen los límites de control inferior y superior, respectivamente.

Etapa 3. Marcar la zona $\mathcal{A}$ sobre el eje vertical del plano coordenado y delimitar la región

$$A = \{(x, y) \mid y \in \mathcal{A}\}.$$

la cual se denomina como la zona de aceptación.

Etapa 4. De los productos finales seleccione, a intervalos posiblemente regulares, bloques disjuntos de n artículos, calcule el valor Y_i de la media de la característica de interés de los n productos finales seleccionados en el i-ésimo grupo y marque el punto correspondiente (i, Y_i) en el plano coordenado; usualmente el tamaño n de los bloques inspeccionados es un número pequeño, como por ejemplo cuatro o cinco. El gráfico de control es la zona de aceptación A, junto con las marcas que sucesivamente se van incorporando al plano coordenado al realizar las inspecciones.

El Empleo Básico de un Gráfico de Control. Para entender la aplicación de un gráfico de control, observe primero que para cada dato Y_i se tiene la siguiente equivalencia:

$$Y_i \in \bar{A} \Leftrightarrow (i, Y_i) \in A$$

Por otro lado, debido a que el nivel de inclusión $1-\alpha$ se selecciona 'cercano a 1', el observador percibe como 'prácticamente seguro' que cuando el valor actual de θ es θ_0, cada dato Y_i pertenezca a $\bar{A}$, lo cual equivale a que los puntos (i, Y_i) que se marcan en el plano coordenado pertenezcan a la zona de aceptación $\bar{A}$. En otras palabras, el observador considerará 'dentro de lo normal' el hecho de que los puntos que sucesivamente se señalan en el plano coordenado se ubiquen dentro de A y pensará que el valor de θ se mantiene en el nivel original θ. Sin embargo, cuando una de esas marcas se localice fuera de la región A, habrá observado un evento que, bajo la condición de que $\theta = \theta_0$, tiene sólo una probabilidad α de ocurrir, percibiendo este hecho como una señal de que el valor de θ se ha modificado, alejándose del valor θ_0 que tenía originalmente, de manera que el valor medio de la característica de interés se ha alterado. En estas circunstancias, se emprenderán acciones que busquen detectar la causa del cambio en el valor de By se tomarán las medidas correctivas necesarias. La norma de actuación que se ha descrito es un ejemplo de regla de paro, pues la revisión del proceso de producción puede, en general, implicar un paro parcial o total de las actividades. Desde luego, ésta no es la única regla de paro que puede derivarse de un gráfico de control y, para describir otras reglas de uso común, es conveniente introducir una componente auxiliar de un gráfico.

La Franja de Advertencia. Además de la zona de aceptación de A descrita anteriormente, en un gráfico también se incluye, generalmente, una zona denominada de advertencia, la cual se denota mediante W, y que está formada por puntos en el plano que son cercanos a la frontera de la región de aceptación; la forma específica de W depende de la aplicación que se tenga en mente; esta idea se ilustrará por medio de un ejemplo más adelante. En este punto es conveniente mencionar que cuando una marca obtenida de una media muestral se ubica en W, el observador no declara de inmediato que el proceso se encuentra fuera de control, sino que se emite una señal de alerta que será tomada en cuenta, conjuntamente con las futuras observaciones, para establecer la necesidad de revisar el proceso productivo. **Norma de Paro.** Formalmente, una regla o norma de paro se obtiene especificando uno o más patrones de las marcas trazadas sucesivamente en el gráfico de control, de manera que cuando uno de dichos patrones es observado, se declara que el valor actual del parámetro de interés no coincide con su nivel original y se emite la orden de revisar el proceso de fabricación. Esta es una definición bastante general y es claro que existen varias de normas de paro posibles.

Los conceptos anteriores se ilustran en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. El gráfico de control más común en las aplicaciones se obtiene estableciendo las siguientes expresiones para los límites de control L y U en (2.3):

$$L = \theta_0 - 3\tau_0 \quad U = \theta_0 + 3\tau_0 . \qquad (2.4)$$

Especificación que se conoce como la regla de las tres desviaciones estándar; en estas igualdades, τ_0^2 es la varianza poblacional que se obtiene a partir de los datos obtenidos en la i-ésima inspección. Note que en este caso, la región $\bar{A}$ en la cual el observador considera como prácticamente seguro que las medias muestrales se ubiquen, es $A = [L, U] = [\theta_0 - 3\tau_0, \theta_0 + 3\tau_0]$ y que el correspondiente nivel de inclusión esta dado por

$$1 - \alpha = P[\theta_0 - 3\tau_0 \leq Y \leq \theta_0 + 3\tau_0];$$

bajo el supuesto de que $Y_i \sim N(\theta_0, \tau_0^2)$, se tiene que

$$1 - \alpha = P_{\theta_0}[Y \in A] = 0.99730 .$$

Por otro lado, note que la zona de aceptación A en el plano coordenado es

$$A = \{(x, y) \mid y \in \bar{A}\} = \{(x, y) \mid \theta_0 - 3\tau_0 \leq y \leq \theta_0 + 3\tau_0\} \quad (2.5)$$

En este momento se está en condiciones de enunciar la regla de paro más simple:

RP_1. Declarar el proceso como fuera de control cuando un punto (i, Y_i) se ubique fuera de A.

De acuerdo a esta norma de paro, se declara que el parámetro de interés ha alterado su valor original cuando una media observada se desvíe de θ_0 por más de tres desviaciones estándar. Por supuesto, esta norma no es la única que es posible enunciar. Considere, por ejemplo, la siguiente:

RP_2 Declarar el proceso como fuera de control cuando se acumulen dos marcas, no necesariamente consecutivas, fuera de A.

Otras reglas comúnmente utilizadas involucran a la región de advertencia. Como ya se ha mencionado, dicha zona esta formada por puntos 'cercanos' a la frontera de la zona de aceptación. En el caso que nos ocupa, es costumbre definir

$$W=\{(x,y)\theta_0-3\tau_0\le y\le\theta_0-2\tau_0\}\cup\{(x,y)\theta_0+3\tau_0\ge y\ge\theta_0+2\tau_0\},$$

y la siguiente regla utiliza esta zona para decidir cuándo debe revisarse el proceso productivo.

RP [illegible]: Declarar el proceso como fuera de control cuando se acumulen dos marcas consecutivas en la zona $W\bigcup A^c$, la unión de la región de advertencia W y el complemento de la zona de aceptación A.

El Indice de Funcionamiento de una Norma de Paro

En general, el propósito de una norma de paro es evitar que se produzcan artículos cuyo rasgo relevante se aleje del valor original θ_0. Debido a que los artículos finales son analizados solamente durante las inspecciones realizadas, una regla de paro será mejor en la medida en que detecta un cambio en la característica de interés al tomar un número menor de inspecciones. Para definir el índice de funcionamiento de manera formal, es conveniente introducir primero la siguiente noción auxiliar.

Definición 3.1 Considere una regla de paro determinada y suponga que al seleccionar la k-ésima muestra el valor esperado del rasgo de interés es θ_0, mientras que al analizar la muestra $k+1$, dicho valor es θ^*, el cual ya no sufre alteración posterior. Sea k + N el instante de inspección en que, de acuerdo a la regla de paro estipulada, el observador declara que es necesario revisar el proceso productivo.
En este caso, la sucesión de medias

$$Y_{k+1}, Y_{k+2}, \ldots, Y_{k+N},$$

las cuales se observan desde que θ altera su valor inicial hasta que se declara la necesidad de inspeccionar el proceso, se llama una corrida de datos, mientras que N es la longitud de la corrida.

Es importante notar que N, la longitud de la corrida en la definición anterior, es el número de inspecciones que se realizan en la línea de producción antes de que el proceso se revise. Cuando las muestras se toman a intervalos regulares y la tasa de producción es constante, N es proporcional al número de artículos producidos desde que el valor del rasgo de interés se alteró su valor, y el fabricante está naturalmente interesado en que N sea lo más pequeño posible. De esta forma, ante la posibilidad de elegir entre dos reglas de paro, se preferirá aquella que produzca menores longitudes de corridas, esto es, los valores de N pueden utilizarse para medir el desempeño de una norma de actuación. Sin embargo, N es una variable aleatoria y como índice de funcionamiento de una regla de paro se utiliza el valor esperado de N.

Definición 3.2. En el contexto de la Definición 3.1, la longitud promedio de la corrida se define mediante

$$\text{LPC} = LPC(\theta^*) = E_{\theta^*}[N], \tag{3.1}$$

y $LPC(\theta^*)$ es el índice de funcionamiento de la norma de paro considerada.

Antes de ejemplificar la determinación del índice de desempeño de una norma de paro, es oportuno describir el procedimiento general: En el momento en que se extrae la k-ésima muestra de n productos, el parámetro en cuestión conserva su valor original θ_0, pero al obtener la muestra k+1 el parámetro asume ya otro valor θ^*. Este cambio no es percibido de forma inmediata y el proceso productivo continúa hasta que, al seleccionar una muestra en la ocasión k+N, el inspector emite la señal de alerta declarando que el valor de θ ya no es el original. El valor de N es aleatorio y su distribución depende de la regla de paro que se utilice. De acuerdo a la Definición 3.2, la longitud promedio de la corrida es

$$LPC(\theta^*) = E_{\theta^*}[N] = \sum_{n=1}^{m} nP_{\theta^*}[N=n]. \tag{3.2}$$

así que un método para encontrar $LPC(\theta^*)$ consiste en determinar la distribución de N cuando el parámetro asume el valor θ^* y utilizar la expresión (3.2) para calcular la esperanza de N. Este enfoque se ilustra a continuación.

Ejemplo 3.1. *(i)* Considere la regla de paro **RP$_1$** introducida en el Ejemplo *2.1*. De acuerdo a esta norma el proceso se declara fuera de control tan pronto como una marca se ubique fuera de la zona *A* dada en *(2.5)*. Para determinar el índice de funcionamiento de **RP$_1$,** suponga que en la k-ésima inspección el valor esperado del rasgo relevante es su valor original θ_0, pero que al momento de extraer la muestra k+1 dicho valor se ha alterado, asumiendo el valor θ^*, el cual se mantiene fijo a partir de ese instante. Suponiendo que las medias Y_i obtenidas de las inspecciones sucesivas son independientes con distribución común $N(\theta^*, \tau_0^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned} P_{\theta^*}[N = n] &= P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in A, Y_{k+2} \in A, \ldots, Y_{k+n-1} \in A, Y_{k+n} \notin A] \\ &= P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in A] \times P_{\theta^*}[Y_{k+2} \in A] \times \ldots \times P_{\theta^*}[Y_{k+n-1} \in A] \times P_{\theta^*}[Y_{k+n} \notin A] \\ &= P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in A]^{n-1} \times (1 - P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in A]) \\ &= (1 - p(\theta^*))^{n-1} p(\theta^*), \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $p(\theta^*)$ está dado por

$$\begin{aligned} p(\theta^*) &= 1 - P_{\theta^*}[Y_{k+1} \in A] \\ &= 1 - P_{\theta^*}[\theta_0 - 3\tau_0 \le Y_{k+1} \le \theta_0 + 3\tau_0] \\ &= 1 - P_{\theta^*}\left[\frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} - 3 \le \frac{Y_{k+1} - \theta^*}{\tau_0} \le \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} + 3\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} + 3\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} - 3\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} - 3\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} - 3\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

Donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución Normal estándar. De acuerdo a *(3.3)*, la longitud de la corrida N que tiene una distribución Geométrica con parámetro $p(\theta^*)$, de manera que su valor esperado es

$$IF(\theta^*) = E_{\theta^*}[N] = \sum_{n=1}^{m} n P_{\theta^*}[N = n] = \frac{1}{p(\theta^*)}$$

(ii) Para la norma **RP,** descrita en el Ejemplo *2.1,* no es difícil ver que N tiene distribución Binomial negativa con parámetros *2* y $p(\theta^*)$, de manera que

$$IF(\theta^*) = E_{\theta^*}[N] = \sum_{n=1}^{m} n P_{\theta^*}[N = n] = \frac{1}{p(\theta^*)}.$$

En el ejemplo anterior, el índice de funcionamiento de las normas consideradas se calculó determinando la distribución exacta de la longitud N de una corrida. Sin embargo, para reglas de paro más complejas, este enfoque no es aplicable, pues dado el enorme número de reglas de paro potenciales, no es de esperarse que calcular la distribución exacta de N para una norma arbitraria sea un problema susceptible de tener una solución simple. Por esta razón, es interesante explorar la posibilidad de obtener el indicador de funcionamiento de una norma a través de métodos indirectos, esto es, que no involucren la distribución exacta de N. Las ideas que se emplearan en esta dirección se ilustran en el siguiente teorema y han sido adaptadas de argumentos utilizados en problemas de programación dinámica, en donde la propiedad de Markov permite emplear esperanzas condicionales de manera simple y fmctífera (Sennot (19%), Puterman (1994), Cavazos-Cadena (1991, 1996)). A continuación se determina el índice de funcionamiento de la regla $\mathbf{RP}_{\mathbf{w}\mathbf{A}^c_2}$ introducida en el Ejemplo 2.1. Para establecer el resultado en forma precisa, defina

$$A_2 = \{(x,y) | \theta_0 - 2\tau_0 \le y \le \theta_0 + 2\tau_0\}$$

y

$$p_{A_2} = p_{A_2}(\theta^*) = P_{\theta^*}[(i,Y_i) \in A_2^c] \tag{3.5}$$

y observe que

$$W \cup A^c = A_2^c,$$

de tal forma que de acuerdo a $\mathbf{RP}_{\mathbf{w}\mathbf{A}^c_2}$, se emite la señal de revisión del proceso productivo cuando dos marcas consecutivas se ubican fuera de $\boldsymbol{A_2}$.

Teorema 3.1 Para la regla $\mathbf{RP}_{\mathbf{w}\mathbf{A}^c_2}$, la longitud promedio de una corrida es

$$LPC(\theta^*) = \frac{1}{1 - p_{A_2}(\theta^*)} + \frac{1}{(1 - p_{A_2}(\theta^*))^2},$$

donde $p_{A_2}(\theta^*)$ está dada por (3.5).

Demostración. Como punto de partida, es conveniente introducir la siguiente notación: C_k denota 'el estado' en el que se tienen k puntos consecutivos fuera de $\boldsymbol{A_2}$ desde el último momento en que se observó un punto dentro de $\boldsymbol{A_2}$, y $E_{\theta^*}[N|C_k]$ es la esperanza condicional de N dado que se tienen acumuladas k observaciones fuera de A_2. Observe que

$$LPC(\theta^*) = E_{\theta^*}[N|C_0],$$

pues una corrida se cuenta a partir de un momento 'normal' en el que el parámetro θ conserva su valor original θ_0. Además,

$$E_{\theta^*}[N|C_2] = 0,$$

pues al acumular dos datos consecutivos fuera de $\boldsymbol{A_2}$ se emite la señal de revisar el proceso. Considere ahora los siguientes casos que pueden presentarse en el momento de seleccionar las muestras conforme se desarrolla el proceso:

Caso 1. Se tienen acumuladas cero observaciones fuera de la franja $\boldsymbol{A_2}$, esto es, se está observando el estado C_0. En esta situación, se extrae la muestra y se calcula su media. Esta última puede caer dentro de $\boldsymbol{A_2}$, con probabilidad $p_{A_2}(\theta^*)$, aumentando en 1 la longitud de la corrida y dejando en cero el número de observaciones acumuladas fuera de $\boldsymbol{A_2}$, de manera que al realizar la siguiente inspección se enfrentara la misma situación. Por otro lado, la media observada puede caer fuera de $\boldsymbol{A_2}$, con probabilidad $1 - p_{A_2}(\theta^*)$, incrementando en uno la longitud de la corrida y provocando que la siguiente inspección se realice teniendo una observación acumulada fuera de $\boldsymbol{A_2}$, esto es, ante el estado C_1. Luego,

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N|C_0] &= 1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{A_2}(\theta^*) + (1 + E_{\theta^*}[N|C_1])(1 - p_{A_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{A_2}(\theta^*) + E_{\theta^*}[N|C_1](1 - p_{A_2}(\theta^*)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Caso 2 Ahora suponga que se inicia la inspección teniendo una observación acumulada fuera de la franja $\boldsymbol{A_2}$, esto es, ante el estado C_1. En este caso, se extrae la muestra y se calcula su media; si ésta se ubica dentro de $\boldsymbol{A_2}$, entonces se incrementa en uno la longitud de la corrida y en la siguiente extracción se estará ante el estado C_0. Por otro lado, si la media observada cae fuera de A_2, entonces se aumenta en uno la longitud de la corrida, pero se declara la señal de revisión, pues ya se tendrán acumulados dos puntos fuera de la franja de advertencia A_2 Por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N|C_1] &= (1 + E_{\theta^*}[N|C_0])p_{A_2}(\theta^*) + 1 \times (1 - p_{A_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{A_2}(\theta^*) \end{aligned} \tag{3.7}$$

A partir de estas igualdades puede despejarse $E[N|C_0]$. Con este propósito, observe que (3.6) puede escribirse equivalentemente como

$$E_{\theta^*}[N|C_0](1 - p_{A_2}(\theta^*)) = 1 + E_{\theta^*}[N|C_1](1 - p_{A_2}(\theta^*))$$

y reemplazando la expresión para $E[N|C_1]$ obtenida en (3.7) se obtiene que

$$\begin{aligned} E_{\theta^*}[N|C_0](1 - p_{A_2}(\theta^*)) &= 1 + (1 + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{A_2}(\theta^*))(1 - p_{A_2}(\theta^*)) \\ &= 1 + (1 - p_{A_2}(\theta^*)) + E_{\theta^*}[N|C_0]p_{A_2}(\theta^*)(1 - p_{A_2}(\theta^*)) \end{aligned}$$

y entonces, finalmente

$$E_{\theta^*}[N|C_0] = \frac{2 - p_{A_2}(\theta^*)}{(1 - p_{A_2}(\theta^*))^2} = \frac{1}{1 - p_{A_2}(\theta^*)} + \frac{1}{(1 - p_{A_2}(\theta^*))^2}, \tag{3.8}$$

estableciendo la conclusión deseada.

Ejemplo 3.2. Suponga que las medias Y_i, $i = \dots k+1$ son independientes con distribución común $N(\theta^*, \tau_0^2)$. A partir de la definición de $p_{A_2}(\theta^*)$, esta cantidad puede expresarse en términos de la distribución Normal estándar:

$$\begin{aligned} p_{A_2}(\theta^*) &= 1 - P_{\theta^*}[Y_i \in [\theta_0 - 2\tau_0, \theta_0 + 2\tau_0]] \\ &= 1 - P_{\theta^*}\left[-2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0} < \frac{Y_i - \theta^*}{\tau_0} < 2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right] \\ & 1 - \left[\Phi\left(2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right) - \Phi\left(-2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right)\right] \end{aligned}$$

Luego, sí $\theta^* = \theta_0 + c\tau_0$, entonces

$$\begin{aligned} p_{A_2}(\theta^*) &= 1 - \left[\Phi\left(2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right) - \Phi\left(-2 + \frac{\theta_0 - \theta^*}{\tau_0}\right)\right] \\ &= 1 - [\Phi(2 - c) - \Phi(-2 - c)] \\ &= [1 - \Phi(2 - c)] + \Phi(-2 - c) \\ &= \Phi(c - 2) + \Phi(-2 - c). \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $\theta^* = \theta_0 + c\tau_0$ entonces $p_{A_2}(\theta^*) = \Phi(-1) + \Phi(-3) = 0{,}15866 + 0{,}00270 = 0{,}16136$ Luego,

$$LPC(\theta_0+\tau_0)=\frac{1}{1-.16136}+\frac{1}{(1-.16136)^2}=2.614241$$

Similarmente, si $\theta^* = \theta_0 + 2\tau_0$. entonces $p_{A^*}(\theta^*) = \Phi(0)+\Phi(-4) \approx 0.50000$,, de manera que

$$LPC(\theta_0+2\tau_0)\approx\frac{1}{1-0.50000}+\frac{1}{(1-0.50000)^2}=6.$$

La Norma RP_{1-m} y el Resultado Principal

En esta sección se determina la longitud promedio de una corrida para una regla de paro generalizada. Para describir esta regla de toma de decisiones, sea *A* una zona en el plano coordenado en la cual se considera 'normal' que se ubiquen las marcas sucesivas que se señalan en la Sección 2. El complemento de *A* se denota mediante *R** y se refiere como la zona de rechazo, es decir,

$$R^* = \bar{A}\ .$$

Por otro lado, suponga que se ha delimitado una región de advertencia *W** de tal manera que

$$W^* \subset A,.$$

y defina la zona de aceptación absoluta mediante

$$A^* = A \setminus W^* = \{(x,y) \mid (x,y)\in A \quad (x,y)\notin W^*\}$$

La norma de paro RP_{1-m} se describe a continuación:

RP_{1-m}: El proceso se declara fuera de control estadístico si se encuentra un punto en la zona de rechazo *R** o cuando se tienen m puntos consecutivos en la región de advertencia *W**.

Como en la sección precedente, sea C_k el estado en el cual hay k puntos acumulados consecutivamente en la zona de advertencia y observe que mediante un argumento de esperanza condicional similar al utilizado en la demostración del Teorema 3.1, se obtiene que para $k = 1,2,\dots,m-1$,

$$E_\theta[N|C_k]=1\times p_{R^*}(\theta)+(1+E_\theta[N|C_0])p_{A^*}(\theta)+(1+E_\theta[N|C_{k+1}])p_{W^*}(\theta) \qquad (4.1)$$

Note que en este caso

$$E_\theta[N|C_m]=0,$$

pues la regla emite la señal de revisión cuando se tienen m puntos consecutivos en la zona de advertencia. Observe, además, que

$$p_{A^*}(\theta)+p_{W^*}(\theta)+p_{R^*}(\theta)=1 \qquad (4.2)$$

El siguiente teorema, en el cual se determina $E_\theta[N|C_k]$ para todo $k = 1,2,\dots, m-1$, es el principal resultado de este trabajo.

Teorema **4.1.** Bajo la regla RP_{1-m} las siguientes conclusiones *(i)* y *(ii)* son válidas.

(i) La longitud promedio de una corrida está dada por

$$LPC(\theta) = E_\theta[N|C_0] = \frac{1 - p_{W^*}(\theta)^m}{1 - p_{A^*}(\theta) - p_{W^*}(\theta) + p_{A^*}(\theta) p_{W^*}(\theta)^m} \qquad (4.3)$$

Más aún,

(ii) Para $k = 1,2,\ldots,m-1$

$$E_\theta[N|C_k] = \frac{1 - p_{W^*}(\theta)^{m-k}}{1 - p_{A^*}(\theta) - p_{W^*}(\theta) + p_{A^*}(\theta) p_{W^*}(\theta)^m} \qquad (4.4)$$

Resultados Técnicos Auxiliares

En esta sección se presentan los resultados técnicos preliminares que se usarán para demostrar el Teorema *4.1*. EL análisis se refiere a un sistema especial de ecuaciones lineales

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y},$$

donde, para ciertos números $a, b \in \mathbf{R}$, la matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ está dada por

$$\mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-a & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

y el vector Y tiene todas sus componentes iguales a uno, esto es,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

Por conveniencia notacional, las filas y columnas de una matriz se numeran empezando desde cero, con una convención similar para vectores. El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema *5.1.(i)* Para la matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ definida en *(5.1)* se tiene que

$$\det \mathbf{A} = \begin{cases} 1 - na; & si \quad b = 1 \\ \dfrac{1 - b - a(1 - b^n)}{1 - b}; & si \quad b \neq 1 \end{cases}$$

(ii) Si a y b son dos números no negativos que satisfacen $a + b \leq 1$, entonces $\det A \neq 0$.
Mas aún. en este caso.

(iii) La única solución al sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$ es el vector X cuyas componentes son

$$x_k = \frac{1 - b^{n-k}}{1 - b - a\left(1 - b^n\right)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Demostración. ***(i)*** Para calcular el determinante de la matriz $A_{n\times n}$ se utilizará el desarrollo a través de la última fila; ésta es una elección conveniente, entre otras razones, debido a que sólo dos elementos en dicha fila son no nulos, a saber, el primero (con valor -a) y el último (cuyo valor es 1). Realizando la expansión, el coeficiente de -a es $(-1)^{n+1}$ multiplicado por el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la primera columna y última fila de **A,** mientras que el coeficiente de 1 es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la última fila y la última columna de **A** multiplicado por $(-1)^{n+n-1}$:

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = (-1)^{n+1}(-a)\cdot\det\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \end{bmatrix}$$

$$+(1)\times\det\begin{bmatrix} 1-a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las dos matrices cuyo determinante aparece en el lado derecho de esta igualdad son de orden $(n-1)\times(n-1)$. La primera es triangular superior con sus elementos diagonales iguales a $-b$, por lo que su determinante es $(-b)^{n-1}$ mientras que la segunda matriz es no es otra cosa que la versión de **A** en (5.1) con orden $(n-1)\times(n-1)$. Luego,

$$\begin{aligned} \det A_{n\times n} &= (-1)^{n+1}(-a)\times(-b)^{n-1} + (1)\times\det A_{n-1\times n-1} \\ &= -ab^{n-1} + \det \mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Esta ecuación permite expresar el determinante de una matriz **A** en términos de otra matriz del mismo tipo, pero de orden menor; una fórmula de esta clase se denomina recursiva. Aplicando (5.3), pero ahora empezando con una matriz de orden $(n-1)\times(n-1)$ se obtiene que $\det \mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)} = -ab^{n-2} + \det \mathbf{A}_{(n-2)\times(n-2)}$, y reemplazando esta expresión en (5.3) se obtiene

$$\det A_{n\times n} = -ab^{n-1} - ab^{n-2} + \det \mathbf{A}_{(n-2)\times(n-2)}$$

El mismo procedimiento se puede aplicar repetidamente para llegar a expresar $\det \mathbf{A}_{n\times n}$ en términos de un determinante que pueda ser fácilmente calculable, digamos hasta llegar a la expresión que involucra $\det \mathbf{A}_{2\times 2}$. Haciendo esta tarea se obtiene

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = -ab^{n-1} - ab^{n-2} - \ldots - ab^2 + \det \mathbf{A}_{2\times 2}$$

Observe ahora que $\det \mathbf{A}_{2\times 2} = \det \begin{vmatrix} 1-a & -b \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a - ab$, igualdad que al combinarse con la anterior ecuación implica

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_{n\times n} &= -ab^{n-1} - ab^{n-2} - \ldots - ab^2 + [1 - a - ab] \\ &= 1 - a\left[b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^2 + b + 1\right] \end{aligned} \tag{5.4}$$

A continuación, note que, para b=1 la suma entre corchetes es

$$\left[b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^2 + b + 1\right] = [1 + 1 + \ldots + 1 + 1] = n,$$

de manera que

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = 1 - an, \quad si \quad b = 1$$

mientras que para $b \neq 1$, se aplica la fórmula para la adición de términos que cambian geométricamente, obteniendo

$$\left[b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^2 + b + 1\right] = \frac{1-b^n}{1-b}, \qquad b \neq 1,$$

y entonces (5.4) implica que

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = 1 - a\frac{1-b^n}{1-b} = \frac{1 - b - a(1-b^n)}{1-b}, \qquad si \quad b \neq 1.$$

estableciendo la conclusión deseada.

(ii) Suponga que a y b son dos números positivos con $a + b \leq 1$. En este caso, necesariamente se tiene que $b < 1$ y entonces la parte (i) implica que

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = 1 - a\frac{1-b^n}{1-b} = \frac{1 - b - a(1-b^n)}{1-b}$$

Note ahora que $a > a(1-b^n)$ y entonces $1 \geq b + a \geq b + a(1-b^n)$, de donde se desprende que $1 - b - a(1-b^n) > 0$, de manera que el numerador en el cociente para $\det \mathbf{A}_{n\times n}$ es no nulo, con lo cual $\det \mathbf{A}_{n\times n} \neq 0$.

(iii) El hecho de que el vector X determinado por

$$x_k = \frac{1-b^{n-k}}{1 - b - a(1-b^n)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1,$$

La solución de $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$ puede verificarse directamente, esto es, sustituyendo los valores postulados de las componentes de X en las ecuaciones del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{1}$. Debido a que $\det \mathbf{A} \neq 0$, ésta es la única solución del sistema (Hoffman y Kunze (1973), Grossman (1983), o Harville (1997)).

Antes de proceder a demostrar el Teorema 4.1, observe que debido a la igualdad $p(a) + p(a) + p(a) = 1$ la ecuación (4.1) es equivalente a

(ii) Si a y b son dos números no negativos que satisfacen $a+b\le 1$, entonces $\det A \neq 0$.

Mas aún. en este caso.

(iii) La única solución al sistema $\mathbf{AX}=\mathbf{1}$ es el vector X cuyas componentes son

$$x_k = \frac{1-b^{n-k}}{1-b-a\left(1-b^n\right)}, \qquad k=0,1,2,\dots,n-1$$

Demostración. ***(i)*** Para calcular el determinante de la matriz $A_{n\times n}$ se utilizará el desarrollo a través de la última fila; ésta es una elección conveniente, entre otras razones, debido a que sólo dos elementos en dicha fila son no nulos, a saber, el primero (con valor -a) y el último (cuyo valor es 1). Realizando la expansión, el coeficiente de -a es $(-1)^{n+1}$ multiplicado por el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la primera columna y última fila de **A,** mientras que el coeficiente de 1 es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la última fila y la última columna de **A** multiplicado por $(-1)^{n+n}=1$:

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = (-1)^{n+1}(-a)\cdot\det\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \end{bmatrix}$$

$$+(1)\times\det\begin{bmatrix} 1-a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1 & -b & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b \\ -a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las dos matrices cuyo determinante aparece en el lado derecho de esta igualdad son de orden $(n-1)\times(n-1)$. La primera es triangular superior con sus elementos diagonales iguales a $-b$, por lo que su determinante es $(-b)^{n-1}$, mientras que la segunda matriz es no es otra cosa que la versión de **A** en (5.1) con orden $(n-1)\times(n-1)$. Luego,

$$\begin{aligned}\det A_{n\times n} &= (-1)^{n+1}(-a)\times(-b)^{n-1} + (1)\times\det A_{n-1\times n-1} \\ &= -ab^{n-1} + \det \mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)}\end{aligned} \tag{5.3}$$

Esta ecuación permite expresar el determinante de una matriz **A** en términos de otra matriz del mismo tipo, pero de orden menor; una fórmula de esta clase se denomina recursiva. Aplicando (5.3), pero ahora empezando con una matriz de orden $(n-1)\times(n-1)$ se obtiene que $\det \mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)} = -ab^{n-2} + \det \mathbf{A}_{(n-2)\times(n-2)}$, y reemplazando esta expresión en (5.3) se obtiene

$$\det A_{n\times n} = -ab^{n-1} - ab^{n-2} + \det \mathbf{A}_{(n-2)\times(n-2)}$$

además, n = m. Observe ahora que en el contexto de la norma $\mathbf{RP}_{1\text{-}m}$, las probabilidades $p_{W^*}(\theta)$ y $p_{A^*}(\theta)$ son claramente no negativas y satisfacen

$$p_{W^*} + p_{A^*} \leq 1,$$

de manera que las condiciones del Teorema 5.1 *(ii)* se verifican, implicando que el sistema (5.7) tiene la única solución dada por

$$\begin{aligned} E_\theta\left[N \mid C_k\right] &= x_k \\ &= \frac{1-b^{m-k}}{1-b-a\left(1-b^{n}\right)} \\ &= \frac{1-p_{W^*}(\theta)^{m-k}}{1-p_{W^*}(\theta)-p_{A^*}(\theta)\left(1-p_{W^*}(\theta)^{m}\right)}; \end{aligned}$$

en particular, la longitud promedio de una corrida es

$$LPC(\theta) = E_\theta\left[N \mid C_0\right] = \frac{1-p_{W^*}(\theta)^{m}}{1-p_{W^*}(\theta)-p_{A^*}(\theta)\left(1-p_{W^*}(\theta)^{m}\right)},$$

Conclusiones

En este trabajo se ha formulado una norma de paro general derivada de un gráfico de control y su correspondiente índice de funcionamiento se ha determinado sin requerir la distribución probabilística de la longitud de una corrida de datos. Los argumentos presentados fueron motivados por técnicas empleadas en el estudio de problemas de programación dinámica, y se basan en argumentos de esperanza condicional, los cuales permiten establecer un sistema de ecuaciones lineales en cuya solución se incluye al indicador del desempeño de la regla general de paro; de esta forma, el enfoque de programación dinámica permite abordar el problema de calcular el índice de funcionamiento a través de una perspectiva algebraica.

Literatura Citada

1. Cavazos-Cadena, R. (1991), A counter example on the optimality equation in Markov decision chains with the average cost criterion, ***Systems & Control Letters,*** 16, 387-392.

2.Cavazos-Cadena, R. (1996), Value iteration in a class of communicating Markov decision chains with the average cost criterion, ***SIAM Journal on Control and Optimization,*** 36, 1848-1873.

3. Duncan, A. J. (1989), ***Control de Calidad y Estadística Industrial, Alfaomega,*** México, D.F.

4. Godfrey, A. B. y Mundel A. (1984),Guide for selection of an acceptance sampling plan, ***Journal of Quality Technology,*** 16,50-55.

5. Graybill, F. A. (1985), ***Theory and Application of the Linear Model, Wadsworth,*** Belmont, CA

6. Grossman, S. **1.** (1983), ***Algebra Lineal, Grupo Editorial Iberoamérica,*** México D. F.

7. Harville D. A. (1997), ***Matrix Algebra from a Statistician Perspective, Spainger- Verlag,*** New York.

8. Hofhan, K. y R. Kunze (1973), ***Algebra Lineal, Prentice Hall Hispanoamericana,*** México, D.F.

9. John, P. W. M. (1990), ***Statistical Methods in Engineering and Quality Assurance, Jeley,*** New York.

10. Montgomery, D. C. (1985), ***Statistical Quality Control, Wiley,*** New York.

11. Puterman M. (1994), ***Markov Decision Processes, Wiley,*** New York.

12. Shewhart, W. A. (1931), ***The Economic Control of Quality of Manufactured Product, Van Nostrand,*** New York.

13. Sennoti L. **1,** (1995), ***Another set of conditions for average optimality in Markov control processes, Systems & Control Letters,*** 24, 147-151.

14. Sennoti L. **1,** (1998), ***Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queuing Systems, Wiley,*** New York.