

MODELO DE VIDA ACELERADA BIRNBAUM-SAUNDERS: TEORIA Y APLICACIONES

MIGUEL ANGEL MENDOZA ZAMORA

TESIS

*Presentada como Requisito Parcial para
Obtener el Grado de:*

MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTADISTICA EXPERIMENTAL

Universidad Autónoma Agraria
"ANTONIO NARRO"



BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA
"ANTONIO NARRO"
PROGRAMA DE GRADUADOS

Buenavista, Saltillo, Coahuila, México
Diciembre de 2003

Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro

Subdirección de Postgrado

MODELO DE VIDA ACELERADA

BIRNBAUM-SAUNDERS: TEORÍA Y APLICACIONES

TESIS

Por:

MIGUEL ANGEL MENDOZA ZAMORA

Elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y aprobada como

requisito parcial, para optar al grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS

EN ESTADÍSTICA EXPERIMENTAL

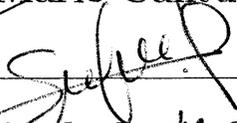
Comité Particular

Asesor principal:



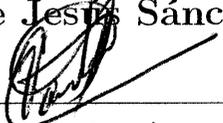
Dr. Mario Cantú Sifuentes

Asesor:



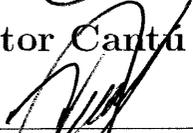
M.C. Felix de Jesús Sánchez Pérez

Asesor:

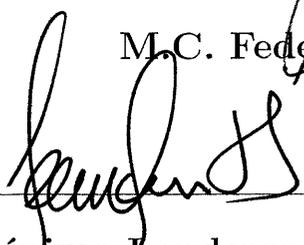


M.C. Victor Cantú Hernández

Asesor:



M.C. Federico Zertuche Luis



Dr. Jerónimo Landeros Flores

Subdirector de Postgrado

14052

AGRADECIMIENTOS

Gracias, a mis amigos, a mis compañeros de trabajo, a mis alumnos y sobre todo a los que con su ejemplo me han motivado para seguir y llegar hasta aquí.

A Mario Cantú, por su ayuda tan valiosa, por su amistad y por su forma de ser tan auténtica. Muchas Gracias.

A los que me acompañaron en mi andar por la NARRO, El Manuel Zambrano, El Gerardor, El Mario Nájera y El Manolo. Gracias.

A mis maestros, Félix, Emilio, Díaz, Victor y Cavazos. Muchas Gracias.

A mis sinodales, Victor Cantú y Federico Zertuche, por el apoyo y el tiempo que me han dedicado en la realización de esta tesis, les agradezco profundamente su respaldo y ayuda.

A la persona más sincera, más alegre y más trabajadora que he conocido, Muchas Gracias Maestra Nidia, de verdad Muchas Gracias. El tiempo de conocerla fue grandioso, Dios la Bendiga.

DEDICATORIA

A mi Esposa

A mi Sebastián

Y

A mi Bebito.

COMPENDIO

Modelo de Vida Acelerada Birnbaum-Saunders: Teoría y Aplicaciones

POR

MIGUEL ANGEL MENDOZA ZAMORA

MAESTRÍA EN CIENCIAS

ESTADÍSTICA EXPERIMENTAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA “ANTONIO NARRO”

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. DICIEMBRE DE 2003.

Dr. Mario Cantú Sifuentes -Asesor-

Palabras clave: Distribución Birnbaum-Saunders, Máxima Verosimilitud,
Distribución Senoh-Normal, Modelo de Riesgo Proporcional.

En el presente trabajo se plantea inicialmente la importancia de la teoría de confiabilidad y la importancia de la distribución Birnbaum-Saunders así como las bases estadísticas para trabajar en la modelación de pruebas de vida acelerada. Como tema central se analizan tres modelos de vida acelerada usando la distribución Birnbaum-Saunders.

ABSTRACT

Accelerated Life Model Birnbaum-Saunders: Theory and Applications

BY

MIGUEL ANGEL MENDOZA ZAMORA

MASTER OF SCIENCE

EXPERIMENTAL STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA “ANTONIO NARRO”

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. DECEMBER 2003.

Dr. Mario Cantú Sifuentes -Advisor-

Key Words: Birnbaum-Saunders Distribution, Maximum Likelihood,
Sinh-Normal Distribution, Proportional Hazard Model.

This essay illustrates initially the relevance of reliability theory and the importance about the Birnbaum-Saunders distribution and statistical foundation necessary to work on the subject. As a primary topic, shows the analysis of three accelerated life models with Birnbaum-Saunders distribution.

ÍNDICE DE CONTENIDO

	Página
INTRODUCCIÓN	1
PREREQUISITOS	3
Confiabilidad y Sobrevivencia	3
Evolución de la Confiabilidad	6
Evolución de las distribuciones de Vida	10
Impacto de la Estadística en Calidad	13
Objetivos de un Estudio de Confiabilidad	14
Sistemas	16
Datos de Confiabilidad	18
Modelos de Confiabilidad	26
Elementos de Confiabilidad	28
Método de Máxima Verosimilitud	38
PRUEBAS DE VIDA ACELERADA	41
Modelos de Riesgos Proporcionales	43
Modelo de Vida Acelerada	45
Diseños Experimentales para PVA	48
Modelación Paramétrica en PVA	49
Relación tiempo-factor de Aceleración	51
Método paramétrico para la estimación de una PVA	57

	Página
DISTRIBUCIÓN DE BIRNBAUM-SAUNDERS	65
Génesis	66
Propiedades Básicas	70
Es la Familia de distribuciones Birnbaum-Saunders una familia exponencial?	72
Estimación de Parámetros de la distribución de Birnbaum-Saunders	74
Distribución Seno Hiperbólico-Normal	78
MODELACIÓN DE VIDA ACELERADA	83
Modelación con Distribución Birnbaum-Saunders	84
Estimación en datos de fatiga	97
Conclusiones	101
LITERATURA CITADA	102

INTRODUCCIÓN

La estimación es uno de los objetivos fundamentales en la estadística, donde se han desarrollado una serie de técnicas en las distintas áreas en la que esta se presenta. Así la confiabilidad nace como una disciplina de la Ingeniería que tiene como propósito desarrollar métodos y herramientas para predecir, evaluar y demostrar características relacionadas con las componentes, equipos y sistemas.

Los métodos probabilísticos de la confiabilidad van dirigidos a la descripción del funcionamiento de entidades, así como su desgaste, y los modelos se utilizan para resolver problemas de optimización de la sobrevivencia o del tiempo medio de vida de éstos. Los aspectos estadísticos de esta teoría van dirigidos a la solución de problemas relacionados con la predicción y estimación de las distribuciones de vida de las entidades.

Una de las aplicaciones directas de la confiabilidad, es el uso de pruebas de vida acelerada, en las cuales se puede obtener información oportuna sobre la confiabilidad de materiales, componentes, detectar modos de falla, corrección de diseños, comparar productos, etc. Las pruebas de vida acelerada por lo general se llevan a cabo en laboratorios en donde cada componente o subsistema es sometido a una serie de pruebas para las cuales se simula su capacidad de “aguante” ante un sobre-estresamiento de sus condiciones de operación, hasta que la falla se llegue a presentar. Aquí cada período de tiempo de prueba representa una cantidad más

extensa de tiempo.

Sin embargo las pruebas de vida acelerada a menudo generan conjuntos muy pequeños de datos, los cuales pueden modelarse razonablemente bien mediante algunas familias de distribuciones de vida de dos parámetros. La región de mejor ajuste es usualmente la central. En pruebas de vida el interés por lo general se centra en las colas de las distribuciones, en consecuencia, la falta de observaciones en las colas causa problemas en la selección de la densidad que se utilizará para modelar las observaciones.

En general en el marco paramétrico los datos son usualmente modelados de la siguiente manera: (i) Adoptar una función de riesgo base (*base-line*) para modelar los datos. (ii) Sustituir para una distribución de parámetros θ , en un modelo de aceleración $g(\cdot)$ que depende de los niveles de estrés en aceleración (y otros parámetros). (iii) Obtener estimaciones de los parámetros desconocidos en elevados niveles de estrés y luego usar estas estimaciones para hacer inferencias acerca del valor de los mismos, en uso de condiciones normales.

PREREQUISITOS

Confiabilidad y Sobrevivencia

Inicialmente, la confiabilidad nace como una disciplina de la Ingeniería que tiene como propósito desarrollar métodos y herramientas para predecir, evaluar y demostrar características relacionadas con las componentes, equipos y sistemas. Básicamente, la confiabilidad aplica el conocimiento científico para asegurarse de que un producto realice su función durante la duración requerida dentro de un entorno dado.

La confiabilidad intenta crear modelos matemáticos de predicción válidos para obtener una tecnología estable dando lugar a la teoría matemática de la confiabilidad, llamada Teoría de Confiabilidad.

La Teoría de Confiabilidad trata problemas probabilísticos y estadísticos, que tienen relación con distribuciones de tiempos de vida de entidades. Pudiendo ser éstas componentes o sistemas. Los métodos probabilísticos de esta teoría van dirigidos a la descripción del funcionamiento de entidades, así como su desgaste, y los modelos se utilizan para resolver problemas de optimización de la sobrevivencia o del tiempo medio de vida de éstos. Los aspectos estadísticos de esta teoría van dirigidos a la solución de problemas relacionados con la predicción y estimación de las distribuciones de vida de las entidades.

Así, Confiabilidad, Sobrevivencia, son nombres que se dan a la rama de Estadística que estudia la duración de la vida hasta que ocurre algún evento de interés. El evento puede ser la falla de una componente o sistema manufacturado, en el caso de Confiabilidad, una respuesta fisiológica de un órgano o individuo, en el caso de Sobrevivencia, o la finalización de una tarea. Como consecuencia, la teoría de estos análisis tiene aplicaciones en Ingeniería, Ensayos Clínicos, Psicología y Economía, entre muchas otras áreas. Algunos ejemplos de aplicaciones son los siguientes:

- Para evaluar la garantía de un componente manufacturado, el fabricante necesita conocer información relacionada con la duración del componente, para así establecer tiempos de garantía.
- A un investigador le interesa analizar la etapa en que un nuevo tratamiento puede incrementar la sobrevivencia de pacientes con SIDA.
- Una compañía farmacéutica compara la velocidad de disminución del dolor de un nuevo producto frente a uno que ya está en el mercado.

Confiabilidad y Sobrevivencia tienen muchas cosas en común, entre ellas el concepto de Calidad, aunque en un sentido distinto. Al estudiar el comportamiento de la vida de una entidad, se persigue mejorar la calidad de vida de ésta. A continuación se verá cómo se relacionan los conceptos de Calidad y Confiabilidad.

Definición 2.1. (Calidad) *Un producto o servicio se dice de Calidad si éste se desempeña satisfactoriamente para el fin al que fue diseñado.*

Definición 2.2. (Confiabilidad) *Es la disponibilidad de una entidad para*

operar satisfactoriamente durante un dominio de tiempo (según norma ISO 8402).

Otra definición es: “Confiabilidad es la fidelidad de un sistema, tal que esa fidelidad justifique ponerlo en servicio”. En esta definición, se afirma que confiabilidad es un concepto global y que resume los atributos de disponibilidad, seguridad y protección.

Definición 2.3. (Disponibilidad) *La disponibilidad de una entidad es la probabilidad de que éste esté funcionando en un instante de tiempo y se diferencia del concepto de Confiabilidad en que en esta última la entidad debe funcionar ininterrumpidamente durante un intervalo de tiempo. En este sentido, la disponibilidad de una entidad es menos rigurosa que la Confiabilidad de ésta.*

Confiabilidad es entonces, la disponibilidad de una entidad para operar satisfactoriamente durante su vida útil, es decir, es la extensión de la calidad durante un período de tiempo. Desde un punto de vista probabilístico, confiabilidad es la probabilidad de que una entidad funcione adecuadamente durante un intervalo de tiempo.

Definición 2.4. (Falla) *La falla es un suceso puntual, que ocurre en un momento específico provocando que la entidad cese en el desarrollo de sus funciones, es decir, es el término de la capacidad de una entidad para realizar una determinada función o actividad. Una entidad o artículo tiene a su haber una duración mínima de existencia, y además está sometido constantemente a factores externos influyentes que hacen variar su tiempo de duración provocando la falla. Entre las muchas causas físicas que individual o colectivamente pueden ser responsables de la falla de un*

artículo, en algún instante particular, se cuentan los siguientes tipos:

- Fallas estáticas. Este tipo de fallas ocurre cada vez que a un artículo se le aplica presión o fuerza, provocando la grieta o fractura del mismo.
- Fallas debido a la inestabilidad. Ésta ocurre cuando a un artículo se le aplica estrés en un lugar determinado.
- Fallas debido a corrosiones.
- Fallas debido a una mala asignación de materia prima.
- Fallas debido a variación de voltage.

Evolución de la Confiabilidad

La Confiabilidad ha evolucionado a través del tiempo y últimamente ha recibido gran atención, principalmente por la demanda de tecnología. Sus principales etapas se pueden resumir de la siguiente manera:

- “Se inicia junto con la Primera Guerra Mundial (1914-1918). El concepto de Confiabilidad se introduce, formalmente, por primera vez cuando se medía la seguridad operativa de aviones de guerra.”
- “El concepto de Confiabilidad queda olvidado durante algún tiempo y se re-toma para la Segunda Guerra Mundial (1939-1945), a raíz de que se diseñaron sistemas militares complejos, conformados por muchas componentes, las que a menudo fallaban. Surge entonces la inquietud por mejorar la Confiabilidad

global del producto a través de la mejora de la Confiabilidad de las componentes individuales.”

- “Después de la Segunda Guerra Mundial, Wernher Von Braun desarrolla el misil V-I y se le informa que los diez primeros misiles no funcionaron, queda nuevamente en evidencia la importancia de la Confiabilidad. Se nombra como asesor al probabilista Robert Lusser el que desarrolla la ley de probabilidad de productos conectados en serie.”
- “Luego de la guerra comienza el auge tecnológico por el mundo, se desarrollan productos más complejos y por ende con muchas componentes, lo que a diario ponía en aprietos a la confiabilidad global de estos productos.”
- “Durante los años 40 los estudios de Confiabilidad se limitaron prácticamente al área de Control de Calidad.”
- “La Era de la Automatización pone nuevos desafíos a la Confiabilidad y se resuelven problemas aún más complejos.”
- “En los años 50, la Confiabilidad se enfocó principalmente en problemas de confiabilidad de misiles. La Confiabilidad empezó a recibir una gran atención tanto por los estadísticos matemáticos como por los ingenieros que trabajaban en la industria militar compleja. Uno de los primeros grupos que se enfrentó seriamente al problema de la Confiabilidad fueron las aerolíneas comerciales. Las aerolíneas crearon una organización denominada Aeronautical Radio, Inc. (ARINC) que, entre otras funciones, recogían y analizaban elementos defectuosos y los devolvían al fabricante. Desde 1950, este programa ARINC se ha dedicado a problemas de confiabilidad en el ámbito militar. En Diciembre de

1950, Air Force y el grupo de confiabilidad de equipos electrónicos estudiaron la situación de un equipo complejo y recomendaban medidas que incrementaran la confiabilidad del equipo y redujesen el mantenimiento. En el año 1952, el Departamento de Defensa creó el Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment (AGREE). AGREE publicó su primer informe de confiabilidad en Junio de 1957.”

- “A fines de los 50 y comienzos de los 60’s EE.UU. concentra su atención en la construcción de misiles e investigación espacial. A fines de los 60’s EE.UU. y la U.R.S.S. envían al hombre a la Luna, todo lo cual, sin duda, pone mayores dificultades para estimar la Confiabilidad de estos complejos y sofisticados sistemas.”
- “A fines de los 60 se crea la primera revista científica del tema, la cual existe hasta el día de hoy. Se trata de IEEE-Transactions on Reliability.”
- “A partir de los años 60 la confiabilidad ha logrado un espectacular progreso debido también en parte al desarrollo de los computadores.”
- “En los 70 los estudios de confiabilidad en ingeniería se dirigen al análisis de árboles de falla. Esto estuvo motivado, y actualmente sigue todavía motivado, por cuestiones de seguridad de la ingeniería de los reactores nucleares.”
- “En los 80 la Confiabilidad es considerada como un aspecto importantísimo para el aseguramiento de la Calidad. Asimismo, en esta década, un importante estudio trata sobre la confiabilidad de redes computacionales, motivado por el gran auge de Internet. Aunque el estudio de los problemas de confiabilidad de

redes es un tema bastante complicado, es posible utilizar algoritmos eficientes para clases especiales de redes.”

- “En los 90 la competitividad de los mercados internacionales, las normas ISO9000 y las exigencias de la Comunidad Europea, hacen que un producto no sólo debe ser de Calidad sino que además debe tener una alta Confiabilidad, es decir, debe ser Confiable.”
- “En este tercer milenio, empresas que hace ya un tiempo se preocuparon de la Calidad actualmente están alcanzando índices de calidad notoriamente elevados, cercanos a la meta de cero defectos. De este modo, en un futuro cercano estas empresas ya no se preocuparán de la Calidad, pues ya la habrán alcanzado, sino de la permanencia de ésta en el tiempo, lo que le da aún más relevancia a la Confiabilidad. Muchas empresas están incorporando dentro de su estructura organizacional, aparte de sus departamentos de Calidad, también departamentos de Confiabilidad. Como la Confiabilidad, a diferencia de la Calidad, sólo se preocupa de aspectos estadísticos y probabilísticos, la tendencia indica que la labor del Estadístico y de la Estadística dentro de la industria será cada vez más imprescindible.”
- “En la actualidad se vive la llamada Era de la Información, lo que hace que los productos introduzcan día a día mayor complejidad en sus diseños, por lo cual en el futuro se debe seguir investigando en el tema.”

Evolución de las Distribuciones de Vida

Las técnicas de Confiabilidad pueden dividirse en paramétricas y no paramétricas. Uno de los principales aspectos de la Confiabilidad paramétrica son las distribuciones de vida, cuyo descubrimiento, aplicación y uso ha tenido también una evolución en el tiempo, la que describimos a continuación.

- Una de las primeras áreas de la confiabilidad que fueron enfocadas con sofisticación matemática fue el área de mantenimiento de máquinas. En un principio, las técnicas usadas para resolver problemas que involucraban la reparación o la inspección fueron las técnicas de la Teoría de Renovación y la Teoría de Colas, teniendo sus inicios en las experiencias exitosas del ingeniero danés A.K. Erlang. Fue Erlang, en 1918, uno de los primeros en utilizar empíricamente la distribución Exponencial, para modelar los tiempos entre llegadas de llamadas telefónicas, y la distribución Gamma de parámetros n y λ (posteriormente llamada distribución de Erlang), cuando con motivo de su tarea profesional, le tocó estudiar los problemas vinculados con el tráfico telefónico de la ciudad de Copenhague.
- Enfocándonos en Confiabilidad, las aplicaciones de la Teoría de Renovación a problemas de reemplazo empezaron a tratarse por primera vez en 1939 por Lotka, aunque es a Feller (1941) a quien se le atribuye el desarrollo de la Teoría de Renovación como una disciplina matemática.
- En 1951, se empezó a trabajar en el campo de los tiempos de vida de entidades, dando como resultado un gran número de artículos. Marcando el inicio de la

hipótesis ampliamente difundida, de la utilidad de la distribución Exponencial para modelar tiempos de vida de entidades. En 1952, D. J. Davis publicó un artículo en el que se presentaban datos de fallas y los resultados de varias pruebas de bondad de ajuste para distribuciones de vida. Estos datos parecieron dar un enfoque distinto a la distribución Exponencial, pero la respaldaron como una útil distribución de vida. Por esta razón, el artículo de Davis ha sido hasta hoy ampliamente citado para justificar la hipótesis de una distribución de falla Exponencial. Con la publicación de este artículo, junto con el artículo de Epstein-Sobel (1953), la distribución Exponencial adquirió una posición única en tiempos de vida de entidades.

- Inicialmente, los intentos por justificar la distribución de Poisson como la distribución del número de llamadas recibidas en una central telefónica, se basaron en la distribución Exponencial como la distribución de tiempos entre ocurrencias de un evento. Sin embargo, Erlang y Palm sólo entregaron argumentos heurísticos para respaldar la distribución de Poisson como una distribución límite del número de llamadas a una centralita. Fueron, finalmente, Ososkov (1956), y luego Khintchine(1960), quienes entregaron demostraciones rigurosas y dieron condiciones necesarias y suficientes para esta aproximación.
- El papel de la distribución Exponencial llegó a ser más importante en 1957 con el informe AGREE del Departamento de Defensa de los EE.UU. Este modelo probabilístico, como muchos otros, se basa en la idea de un tamaño de población finito. Tomando límite, cuando el tamaño de la población tiende a infinito, obtenemos las propiedades características de la distribución Expo-

nencial destacando la propiedad de carencia de memoria. Una de las razones fundamentales de la popularidad de la distribución Exponencial, y su amplia explotación en Teoría de la Confiabilidad, es que tiene una tasa de falla constante (debido a su carencia de memoria) y un procesamiento de datos sencillo, lo cual era importante en esa época. Junto con esta fama de la distribución Exponencial, surge también el uso de la distribución Gamma para modelar la suma de tiempos de falla Exponencial.

- Otros estudios empezaron a encontrar componentes cuya vida se modelaba mejor a través de distribuciones de tiempos de falla diferentes al modelo Exponencial. Algunos autores (por ejemplo, Lieblein y Zelen en 1956 y Kao en 1959, entre otros) comenzaron a poner atención en la distribución Weibull, la que parecía ajustarse mejor a datos de falla. Esta distribución había sido planteada por Walodje Weibull en 1951 como una distribución propia para describir la resistencia de la ruptura de los materiales. Este interés por la distribución Weibull creció y llegó a ser de gran importancia debido a la publicación del artículo de Zelen y Dannemiller que señalaba que muchos procedimientos de pruebas de vida basados en la distribución Exponencial no eran robustos.
- Así fue como en 1968, altamente motivados por los problemas de vibración encontrados en los nuevos aviones comerciales y en los problemas de fatiga de materiales, Birnbaum y Saunders presentaron un modelo probabilístico ingenioso para tiempos de vida de estructuras bajo carga dinámica. La distribución de Birnbaum-Saunders fue derivada a partir de un modelo que muestra que las fallas se deben al desarrollo y crecimiento de un “crack” dominante. Desmond en

1985 demostró que la distribución de Birnbaum-Saunders describe totalmente el tiempo de falla que ha transcurrido cuando cierta clase de daño acumulado excede un umbral. Aunque esta distribución es conocida como Birnbaum-Saunders, ésta fue previamente obtenida por Freundental y Shinozuka en 1961.

- A comienzo de los 70's comenzaron a proponerse otras distribuciones de vida, tales como las distribuciones Log-normal en 1972, Inversa Gaussiana en 1977 y la distribución Log-logística en 1980. Asimismo, se comenzaron a utilizar otros modelos probabilísticos como distribuciones de vida, aunque estos no hayan surgido con una motivación en pruebas de vida, como por ejemplo, las distribuciones Log-gamma, de Valores Extremos o de Gumbel y Normal truncada.
- Últimamente se ha retomado la distribución de vida Birnbaum-Saunders.

Impacto de la Estadística en Calidad

El pensamiento estadístico y principios estadísticos son el corazón de recientes desarrollos y direcciones en:

- Paradigmas y prácticas del Control de Calidad.
- Normas y estandarizaciones (ISO9000, QS9000).

Hay muchas técnicas estadísticas que han sido construidas como herramientas en la Ingeniería para implementar su práctica, como por ejemplo:

- Procesos de Control, Muestreo de Inspección.
- Diseño de Experimentos (DOE), Diseños Robustos, Diseños de Tolerancia.
- Confiabilidad, Mantenimiento, Análisis de Garantía.
- Capacidad de Proceso, Análisis de Datos.

Objetivos de un Estudio de Confiabilidad

En Confiabilidad, como en cualquier otro estudio, hay necesidad de definir objetivos o metas. Los objetivos dependerán de varios factores, como por ejemplo de quién ha fomentado el estudio y por qué ellos lo han realizado. Los objetivos pueden ser:

- Determinar si una entidad ha logrado un nivel específico de ejecución.
- Estimar el costo de lograr un nivel dado de ejecución del sistema.
- Valorar la probabilidad de lograr una misión exitosa.
- Decidir la dirección de recursos para lograr los resultados óptimos.

Algunos objetivos en un estudio de confiabilidad pueden ser realizados sin un recurso estadístico.

Para los propósitos de este trabajo sólo interesan aquellos objetivos que involucran un análisis estadístico. Las tres preocupaciones principales en un análisis estadístico para un estudio de Confiabilidad son:

1. Valoración. Se preocupa por la estimación de la distribución de la vida de la entidad o por la probabilidad de realización exitosa de una tarea.
2. Identificación. Es el proceso de identificar los rasgos significativos que afectan la vida de las entidades que requieren mejoramiento para intensificar la ejecución.
3. Predicción. Es la extrapolación en el futuro, basado en datos históricos.

Para lograr los objetivos de un estudio de confiabilidad es necesario obtener datos para inferir sobre los objetivos. Estos datos obtenidos por estudios de confiabilidad pueden provenir de distintas áreas, como ya se mencionó. Algunos ejemplos de datos de confiabilidad son los siguientes, cuyas definiciones detallaremos más adelante:

- Sólo datos de tiempos de falla o datos completos.
- Datos de tiempos de falla censurados por la izquierda, derecha y por intervalos.
- Datos de tiempo de falla acelerado con covariables.

Cuando se sigue un estudio de Confiabilidad, éste puede ser enfocado para conocer y estimar los siguientes indicadores, que más adelante definiremos en detalle:

- La función de Confiabilidad o Sobrevivencia
- La función de riesgo o tasa de fallas.
- El tiempo medio hasta la falla del sistema o esperanza de vida.

Sistemas

Definición 2.5. (Sistema) *Se entenderá por Sistema a un conjunto de componentes que, al interactuar de manera ordenada, permiten que el dispositivo funcione adecuadamente.*

Definición 2.6. (Sistemas Reparables) *Un sistema se dice reparable si cumple con la característica de poder restaurarse, cuando sus componentes sufren alguna falla, para que éste siga en funcionamiento. Generalmente el análisis que se hace sobre este tipo de sistemas se le denomina Análisis de Confiabilidad de Sistemas Reparables.*

El propósito de algunos estudios de Confiabilidad es describir la tendencia a las fallas y los efectos que producen en todo un sistema o un conjunto de sistemas. Las fallas en un sistema a menudo son provocadas al reparar una componente sin la debida información. De este modo, se producen sucesivas fallas en el sistema, causando lo mismo con los otros subsistemas. Cuando se repara una sola componente o subsistema que forma parte de otro gran sistema, la distribución del tiempo para la próxima falla dependerá del buen estado de todo el sistema y de que éste se repare en el tiempo preciso para que vuelva a funcionar. Así, la reparación de un sistema puede describirse con modelos que permitan cambios en su funcionamiento a través del tiempo.

Definición 2.7. (Sistemas No Reparables) *En este caso, la unidad que falla no puede ser restaurada sino más bien debe ser reemplazada (si se requiere), para el buen funcionamiento de todo el sistema. Generalmente el análisis que se hace*

sobre este tipo de sistemas se le denomina *Análisis de Confiabilidad de Componentes o de Sistemas no Reparables*.

Los datos de unidades no reparables provienen de diferentes clases de estudios de Confiabilidad, como por ejemplo:

- Pruebas de laboratorio para estudiar la durabilidad de los componentes o materiales.
- Pruebas de duración operacional de sistemas complejos o subsistemas, realizadas antes de que un producto salga al mercado. Así, si existe alguna falla la unidad es reemplazada con anterioridad.
- Información sobre el mercado de clientes, es decir, conocer a quiénes les interesa adquirir estos sistemas e información de las componentes que pueden ser reemplazados después de que fallen.

En el caso de sistemas complejos, son muy relevantes los requerimientos de la disponibilidad. En estos casos se suelen utilizar procesos estocásticos para investigar y optimizar características de la disponibilidad del sistema o incluso técnicas de optimización. En concreto, el análisis de sistemas reparables ha sido el principal objeto de estudio de muchos ingenieros industriales, probabilistas y estadísticos. Existen varias direcciones de investigación en este tópico. Mientras que los estadísticos investigan los problemas desde el punto de vista de la estimación de las características de los tiempos de vida del sistema, los ingenieros industriales estudian métodos y medios de mejora del diseño del sistema y de su operatividad, siempre restringido

a ciertos costos; los probabilistas, por otro lado, tratan sobre la evolución de las características operativas de estos sistemas usando modelos estocásticos apropiados.

Datos de Confiabilidad

En pruebas de vida y estudios de confiabilidad, se exponen n entidades a condiciones ambientales similares a las que ellas tendrían en la realidad. Idealmente, la prueba de vida continúa hasta que la variable respuesta, la cual es usualmente el tiempo hasta la ocurrencia de algún evento, ha sido medida en todas las unidades. En la realidad, la respuesta puede ser cualquier variable no negativa, incluyendo tiempo, distancia, peso, tensión, presión, resistencia o temperatura, entre otras. Por ejemplo, la variable respuesta en una prueba de vida para estudiar la confiabilidad de las llantas de un automóvil se realiza en términos de la distancia recorrida hasta la falla, y no a través del tiempo desde que la llanta fue fabricada, pues así realmente se está midiendo la vida útil de la llanta. En estudios de compresión de hormigón armado, la variable respuesta más útil es la presión requerida para el hormigón se rompa. En estudios de resistencia de materiales, la variable respuesta puede ser la tensión requerida para que se rompa el material. En pruebas de materiales inflamables, una variable respuesta útil es la temperatura requerida para provocar la combustión. En estudios de seguimiento académico, el tiempo de permanencia en determinada carrera es la variable de respuesta de interés. En Meteorología, por ejemplo, las técnicas de Confiabilidad pueden utilizar para estudiar la cantidad de agua caída y determinar cuándo un año es lluvioso, normal o seco. Como se puede ver, los ejemplos y las variables que se pueden utilizar para cuantificar la

vida de un entidad son numerosas. Las técnicas son la mismas en cada área, sólo la terminología empleada difiere de una área a otra. Por esta razón, en este trabajo, los términos tiempo de vida (lifetime) y tiempo de falla (failure time) serán usados como un nombre genérico para referirnos a diferentes variables respuesta (T), pudiendo significar tiempo, distancia, etcétera, requeridos para la que ocurra un determinado evento de interés, siendo sólo relevante que la mencionada variable no sea negativa ($T > 0$).

Tipo de Estudios

Definición 2.8. (Estudio Enumerativo) *Son los que generan datos correspondientes a una muestra extraída de una población finita de unidades identificables, haciendo posible la inferencia sobre ciertas cantidades asociadas a la población, denominados parámetros, siempre y cuando la muestra sea representativa (aleatoria) de la población. Sólo en este tipo de estudio es posible hacer inferencia acerca de la población de interés.*

Definición 2.9. (Estudio Analítico) *Éste es el más frecuente de los estudios de Confiabilidad. Los supuestos en que se basa la inferencia son las características del proceso, tanto en el futuro como en el pasado, ya que la población no está debidamente definida.*

Escala de Tiempo

Existen diferentes formas de medir el tiempo, como ya mencionó anteriormente, definidas como escalas de tiempo. Esto debido a que en algunos casos la

duración de las entidades puede medirse de distintas formas, como por ejemplo, días de servicio o distancia recorrida, en el caso de un automóvil, horas de uso para un foco de luz, etcétera. Se debe tener presente, entonces, que el tiempo de duración de un producto también se puede medir a través de los meses de servicio o por los ciclos de utilización, siendo muchas veces este último uno de los más usados como escala de tiempo. En algunos casos existe más de una medida de tiempo para evaluar la duración de un producto. Por ejemplo, la capacidad de la batería de un automóvil para mantenerse cargada depende de la edad de la batería y del número de ciclos de carga y descarga de ésta. Existen diferentes métodos que podrían usarse para mejorar estos datos. De esta manera, es importante tener presente que cuando hablamos de las variables aleatorias *tiempos de vida*, no se está refiriendo al *tiempo real*, sino al *tiempo de operación* o incluso una variable que nada tenga que ver con el tiempo, como por ejemplo *cantidad de agua caída*, o alguna otras.

Tiempo Inicial y Tiempo de Falla

En los estudios de Confiabilidad es imprescindible definir los puntos de inicio y de término de la duración de un producto, aunque esto sea difícil de determinar o de definir en algunos casos, ya que a menudo depende de un juicio subjetivo. Por ejemplo, para el tiempo inicial de un producto se puede tomar la fecha de fabricación, la fecha de venta del producto o la fecha de ensamblamiento (puesta en funcionamiento).

Consideremos una entidad de cierta población. Llamaremos tiempo de vida de esa entidad al tiempo transcurrido hasta que ésta deja de pertenecer a la población

bajo estudio. En este contexto, ese evento se denomina falla.

Se considera tiempo de vida a la ocurrencia de algún evento que es de interés en alguna población de individuos. Algunas veces los eventos de interés son muertes de individuos y entonces el tiempo de vida es la duración de vida de éste, o en otras palabras el tiempo de sobrevivencia, dado un tiempo inicial.

Matemáticamente, uno puede pensar el tiempo de vida de una entidad como una variable con valor no negativo. Se representa el tiempo de falla mediante una variable aleatoria no negativa, T , que normalmente suponemos continua. La distribución del tiempo de falla (o de vida), T , puede caracterizarse por sus funciones de densidad, de confiabilidad y de riesgo. La decisión de cuál función o funciones se estudiará depende de la conveniencia del modelo especificado.

Tipo de Datos

Para obtener información acerca de una distribución de vida particular, $F(t)$, de una entidad, es necesario llevar a cabo pruebas de vida, de modo de obtener sus tiempos de sobrevivencia. Si la prueba nos conduce a la muerte de todas las entidades estudiadas, durante el tiempo que dura la experiencia, entonces el conjunto de datos se dice *completo*. Sin embargo, en la mayoría de las veces el conjunto de datos se encuentra incompleto, debido a que las entidades que participan en el estudio de vida pueden desaparecer, no morir, morir por una causa ajena a la que se estudia o simplemente porque es demasiado caro estudiarlas por mucho tiempo y esperar la muerte o falla de todas ellas. Entonces, cuando al final del estudio una entidad no ha muerto, probablemente por las causas antes mencionadas, se dice que

el conjunto de datos está *censurado*.

En la práctica, suponer que los tiempos de vida están idénticamente distribuidos, es equivalente a suponer que las entidades son nominalmente idénticas, esto es, del mismo tipo y expuestas a las mismas condiciones medio ambientales y de estrés. El supuesto de independencia indica que las entidades no serán afectadas por las muertes de otras entidades del estudio de vida.

Así entonces, en el muestreo completo se observa hasta que mueren las n entidades del estudio. En el muestreo censurado, sin embargo, no todas las entidades llegan al final del estudio con la característica de interés cumplida, esto es, la muerte o falla. Para extraer la máxima cantidad de información desde una prueba de vida, la prueba debería realizarse hasta que todas las unidades bajo prueba hayan fallado. En la práctica, sin embargo, y como ya mencionó, esto no ocurre, a no ser que se practique una prueba de vida que, intencionadamente y utilizando factores de aceleración, conduzca a la muerte o falla de todas las entidades. Dicha prueba de vida se denomina Prueba de Vida Acelerada. Como ejemplo, supongamos que un fabricante de máquinas lavadoras de ropa desea determinar el tiempo bajo el cual sobreviviría el 90% de su producción. El fabricante coloca n máquinas lavadoras escogidas aleatoriamente de su producción y las pone en operación hasta que fallen. La duración de la prueba de vida es desconocida al comienzo del estudio. Una forma correcta de resolver este problema es diseñar una prueba de vida que dure un tiempo determinado o hasta que una cierta cantidad de máquinas haya fallado. Alternativamente, es posible diseñar un experimento que determine los factores de estrés que significativamente afectan la vida de las máquinas. Una vez hecho esto,

establecer cuál es la relación funcional entre el tiempo y la variable dependiente (factor de estrés), de modo que, al acelerar el factor de estrés, es posible modificar la escala de tiempo de la vida de la máquina y así lograr que todas estas fallen antes de que concluya la prueba de vida. Este último procedimiento es lo que se denomina una Prueba de Vida Acelerada. La mayoría de las veces lo que se hace es censurar la muestra y no aplicar pruebas de vida acelerada. Existen en la literatura cuatro tipos de censura y estos se mencionan en la siguiente sección.

Tipo de Muestreos Censurados

Censura Tipo I

Algunas veces por economía u otras razones, la duración de la prueba de vida se especificará hasta un tiempo $t = t_0$. Todas las entidades se observarán a partir de un instante $t = 0$, hasta que ocurra una muerte o se cumpla $t = t_0$, es decir, cuando la prueba de vida concluya. Esto es muy frecuente en investigaciones médicas. Al final del experimento, sólo se conocerán los tiempos de aquellas entidades que han muerto antes de $t = t_0$.

La información contenida en el conjunto de datos consiste en $s \leq n$ tiempos de vida observados en orden ascendente, esto es:

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(s)}$$

Se sabe que $(n - s)$ entidades han sobrevivido al tiempo $t = t_0$ (al menos teóricamente) y esta información debe también ser utilizada.

Como el número s de entidades que han muerto antes de $t = t_0$ es una variable aleatoria, entonces existe la probabilidad de que ninguna de las entidades haya muerto antes de $t = t_0$. Esta es una desventaja de este diseño.

Censura Tipo II

Una alternativa al problema anterior, es fijar el número de entidades que se desea que fallen, por ejemplo r ($0 < r < n$) y así asegurar que se tendrán r entidades que cumplen con la característica al final de la prueba de vida. El proceso funciona de manera análoga al Censuramiento Tipo I, salvo que el estudio concluye en el tiempo T_r y los tiempos de vida son:

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(r)}$$

con lo cual, se sabe que $(n - r)$ entidades han sobrevivido al tiempo T_r . El tiempo en que se cumple el estudio es aleatorio. Una desventaja de este diseño es que no se sabe cuánto tiempo durará el estudio.

Censura Tipo III

Este tipo de censura es una combinación de los dos tipos anteriores. La prueba de vida puede concluir cuando ocurra primero, la r -ésima muerte o halla transcurrido un tiempo t_0 .

Censura Tipo IV

En este tipo de censura, n entidades idénticas son activadas en diferentes instantes fijados de antemano y el tiempo de censura de entidad i -ésima s_i , $i =$

$1, 2, \dots, n$ es aleatorio. Este modelo puede utilizarse también en la siguiente situación: suponga que existen razones obligadas para que la prueba de vida concluya al tiempo t_0 ; además, los tiempos de activación de las entidades son aleatorios como ocurre frecuentemente con estudios médico, ya que los pacientes se incorporan aleatoriamente al estudio. En esta situación, el instante de tiempo de activación conjunto de la entidades será $t = 0$, entonces el tiempo de censura puede ser considerado como aleatorio.

Tipo de Censuras

La cantidad de información de vida contenida en muestras censuradas es considerablemente menor que la de una muestra completa. Esta pérdida de información disminuye la capacidad para detectar hipótesis incorrectas y decrece la precisión de las estimaciones y predicciones. De este modo, un análisis correcto de muestras censuradas debe incorporar tanto los datos completos como los censurados. El problema es que un análisis de datos censurados es más complejo que uno sin censura. Por ejemplo, los estimadores de momentos estándar son más complicados de obtener con muestras censuradas y, en algunos casos, éstos no se pueden hallar. Además, el censuramiento complica las ecuaciones de verosimilitud, las que permiten posteriormente hallar los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución de vida escogida.

La censura puede ser clasificada de varias maneras y, de acuerdo a esto y al tipo de muestreo censurado que se haya empleado, es como debe incorporarse en la verosimilitud.

Censura por la Derecha

La censura por la derecha es lo que hasta ahora hemos denominado simplemente censura, es decir, el tiempo de falla de la entidad se registrará a la derecha del tiempo de censura (establecido por el investigador) y se desconoce, por lo que se registra como tiempo de falla el tiempo de censura.

Censura por la Izquierda, por Intervalos y Puntual

Una censura por la izquierda, sin embargo, no es propiamente una censura, ya que el tiempo de falla que se registró es efectivamente el que transcurrió hasta que la entidad falló, pero que se le dice censurado por la izquierda porque está a la izquierda del primer tiempo de inspección de la prueba de vida. De ahí en adelante, si una entidad falla antes del tiempo de censura, fallará en un intervalo de tiempo, por ejemplo entre la primera y la segunda inspección, o entre la segunda y la tercera, y así sucesivamente, por lo que dicho dato se dice que está censurado en un intervalo. Un cuarto tipo de censura, aunque poco usual, debido a la forma en que suelen llevarse a cabo las pruebas de vida, es la censura puntual, la que registra el tiempo exacto de falla de una entidad.

Modelos de Confiabilidad

Los modelos determinísticos son generalmente inadecuados para modelar tiempos de vida. Experiencias con entidades bajo riesgo de falla indican que aunque sean de características idénticas y operen bajo ambientes iguales, éstas tendrán

diferentes tiempos de vida, es decir, la variación es un fenómeno inherente a los problemas de vida.

Un método apropiado para modelar tiempos de vida, y como ya se mencionó, es a través de variables aleatorias, las cual varían de acuerdo a un patrón probabilístico subyacente, pero que no es completamente conocido. Por tanto, uno de los principales problemas de la confiabilidad paramétrica es el de seleccionar un modelo probabilístico.

En algunos casos, el investigador puede conocer bastante acerca del proceso de fallas que está estudiando, basado en su experiencia y en el conocimiento que tiene del área por su formación (ingeniero, médico, etcétera), por lo que su opinión es muy valiosa, pues puede ayudar al estadístico a reducir la búsqueda a unas pocas familias de distribuciones. Algunas familias populares de distribuciones de vida son las distribuciones Exponencial, Weibull, Gamma y Log-normal. Estas distribuciones han sido ampliamente estudiadas en la literatura y empleadas con bastante éxito en algunos casos. Una distribución a la que no se le ha prestado mucha atención, aunque su uso es exclusivo en el área de la Confiabilidad, es la distribución Birnbaum-Saunders.

Si el investigador desconoce el proceso de fallas, entonces la labor del estadístico es más ardua y éste debe utilizar algunas técnicas, como el análisis exploratorio y otras técnicas básicas, para reducir el campo de acción en la búsqueda del modelo que mejor se ajuste a los datos. Si finalmente el análisis paramétrico no es posible, entonces se debe recurrir a métodos de libre distribución o también conocidos como métodos no paramétricos. Siempre teniendo presente que cuando

los dos métodos, el paramétrico y el no paramétrico, sean posible de aplicar, se debe optar por el paramétrico, ya que las pruebas de hipótesis son más potentes y los estimadores más precisos.

Elementos de Confiabilidad

Funciones de Densidad y de Distribución

Consideremos la variable aleatoria positiva T , la cual representa la vida de una entidad. Supongamos el caso en que T es una variable aleatoria continua, definida en $[0, \infty)$. Sea $f(t)$ la función de densidad de T y su función de distribución dada por

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx,$$

$f(t)$ puede interpretarse como la variación instantánea que sufre la probabilidad de muerte en $(t, t + \Delta t)$, con $\Delta t \rightarrow 0$, ya que

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T + \Delta t) - P(T \leq t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(T + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dF(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Función de Confiabilidad

Estadísticamente, la confiabilidad es la probabilidad de que una entidad funcione satisfactoriamente durante un período de tiempo establecido, esto es, si

T es la vida útil de la entidad, entonces la confiabilidad al tiempo t (o función de confiabilidad) viene dada por:

$$\begin{aligned}\bar{F}(t) &= P(T \geq t) \\ &= 1 - F(t) \\ &= \int_t^{\infty} f(x)dx,\end{aligned}$$

para $t \geq 0$, y además se cumple que $\bar{F}(0) = 1$, $\bar{F}(\infty) = 0$ y es una función continua y no creciente.

Tiempo de Vida Promedio

El tiempo medio hasta que el sistema falle es otra función importante en el análisis de confiabilidad, el cual se define como

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Integrando por partes en (2.1) se tiene (siempre y cuando la integral exista):

$$\begin{aligned}E(T) &= tF(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(t)dt \\ &= [t(1 - \bar{F}(t))]|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (1 - \bar{F}(t))dt \\ &= t|_0^{\infty} - t\bar{F}(t)|_0^{\infty} - t|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt \\ &= -t\bar{F}(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt \\ &= -(\infty)\bar{F}(\infty) + (0)\bar{F}(0) + \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt.\end{aligned}$$

Como $\bar{F}(t)$ es función de confiabilidad, se cumple que $\bar{F}(0) = 1$ y $\bar{F}(\infty) = 0$. Así, se concluye que

$$E(T) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt.$$

Función de Riesgo

Además de la función de confiabilidad $C(t)$ o $\bar{F}(t)$, presentada anteriormente, existen otras funciones para predecir la sobrevivencia o confiabilidad de una entidad. Una de ellas, de fundamental importancia en un análisis de confiabilidad o sobrevivencia es la función de riesgo, también conocida con el nombre de tasa de fallas, razón de falla, razón de riesgo, función de azar, hazard rate, hazard function o fuerza de mortalidad, entre otros. Esta función es particularmente importante en Confiabilidad, ya que los ingenieros suelen manejarse a través de ella para informar acerca de la vida de componentes. Por otro lado, en Sobrevivencia, los investigadores suelen entregar sus resultados más frecuentemente en términos de la función de sobrevivencia.

La función de riesgo o tasa de fallas se define como la tasa instantánea de fallas o como la propensión a fallar en el tiempo $t + \Delta t$, dado que la entidad ha sobrevivido a t , esto es,

$$h(t) = \frac{f(t)}{C(t)}, \quad (2.2)$$

cuando $f(t)$ exista y $C(t) > 0$.

Una forma de deducir la función de riesgo es la siguiente. Consideremos la función $P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t)$, donde $\Delta t > 0$. Ésta es la probabilidad condicional de que la falla, o algún otro evento de interés, ocurra en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t]$, dado que ya ha transcurrido un tiempo t sin que este evento ocurra. Esta probabilidad de falla condicional puede usarse para describir cuántas unidades envejecen o se deterioran. Consideremos un valor pequeño para $\Delta t > 0$.

Si las unidades tienden a envejecer con el uso, entonces entre más se usan más propensión al fallo tienen. En este caso la probabilidad condicional de falla tiene una función decreciente al tiempo t . La probabilidad condicional de falla tiende a ser una función decreciente en t para unidades que envejecen con el tiempo, y es una función constante en t para unidades que no envejecen. Un problema con esta probabilidad condicional de falla, sin embargo, es que depende del ancho del intervalo Δt . Una solución para este problema, es dividir la probabilidad condicional de falla por Δt , y entonces resolver tomando el límite cuando Δt tiende a cero como sigue:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)\Delta t} \\
 &= \frac{1}{\bar{F}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \\
 &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

cuando $f(t)$ exista y $\bar{F}(t) > 0$. Donde

i) $h(t) \geq 0$ y

ii) $\int_0^{\infty} h(t) dt = \infty$.

A la ecuación (2.3) se le conoce como función de riesgo o tasa de falla.

Si tomamos $\Delta t > 0$ y pequeño, $h(t)\Delta t$ puede utilizarse para aproximar la probabilidad de muerte en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ dado que la entidad sobrevivió a t , esto es:

$$h(t)\Delta t \approx P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t).$$

Usando esta interpretación, vemos la conexión entre la función de riesgo de una distribución y cómo un organismo envejece con el tiempo o una componente de manufactura se deteriora con el uso.

Los tiempos de vida de unidades que envejecen con el tiempo pueden ser modelados por distribuciones con función de riesgo creciente. Motores de automóviles, unidades de disco en computadoras, rodillos, entre otros, están en esta categoría. Es difícil tener ejemplos de componentes de manufactura que no son propensos al fallo con el uso o mejoran con el tiempo. Supongamos que T es el tiempo hasta que un trabajador tiene un cierto tipo de error. Si se entrena, es de esperarse que progrese y gane experiencia con el tiempo y la probabilidad condicional de tener una falla es decreciente. Unidades que no envejecen con el tiempo pueden ser modelados por funciones de riesgo constantes. Circuitos electrónicos pueden caer en esta categoría. A menudo la tasa de falla suele comportarse como una curva de bañera, es decir, decreciente al comienzo, constante en el centro y creciente al final del período.

Este tipo de curva modela bastante bien a la mortalidad humana, ya que en la infancia la tasa de mortalidad es alta, tendiendo a decrecer; ésta es relativamente constante en una época de la madurez (donde generalmente son muertes por causas aleatorias, como accidentes, por ejemplo) y finalmente vuelve a ser alta, pero tendiendo a aumentar en la vejez (vea Figura 1.1).

En este caso, si habláramos de componentes de manufactura, en la primera etapa tendríamos fallas por calidad, en la segunda fallas por azar y en la última estaríamos hablando de la Confiabilidad de las componentes. Cuando una distribución de vida es dominada por fallas prematuras, la función de riesgo es generalmente no

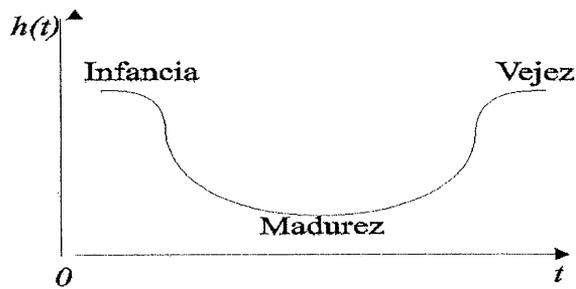


Figura 2.1: Gráfico Curva de Bañera

decreciente al principio, constante en una etapa intermedia y finalmente decreciente. Así, tenemos una tasa de falla unimodal, que puede ser el caso cuando se modelan los tiempos de espera.

Si la función de riesgo está disponible y provee una razonable descripción de cómo las unidades envejecen, entonces la densidad, la función de distribución y la función de confiabilidad pueden ser encontradas a partir de ésta. Esto es importante, porque si tenemos un estudio en el cual se sabe empíricamente cómo se comporta la función de riesgo, entonces podemos conocer cualquiera de otras funciones mencionadas.

La forma de la función de riesgo varía de una familia de distribuciones a otra. Por ejemplo, la familia Weibull es flexible y puede usarse para modelar eficientemente distribuciones de vida cuando la tasa de falla es constante, decreciente o creciente, dependiendo del valor del parámetro α

- i) Si $\alpha = 1$, entonces la tasa de falla es constante (se estaría en presencia de la distribución exponencial).
- ii) Si $\alpha > 1$, entonces la tasa de falla es creciente.

iii) Si $0 < \alpha < 1$, entonces la tasa de falla es decreciente.

iv) Si $\alpha = 2$, entonces se estaría en presencia de la distribución de Rayleigh.

En el caso de la distribuciones de vida Weibull se tiene que las funciones de densidad, de distribución y de riesgo son:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} \exp(-(\lambda t)^\alpha); & \text{si } t > 0 \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\bar{F}(t) = \exp(-(\lambda t)^\alpha); \quad t > 0$$

y

$$h(t) = (\alpha\lambda)(\lambda t)^{\alpha-1}; \quad t > 0,$$

respectivamente.

La función de riesgo puede ser usada en conjunto con el conocimiento de los efectos de los procesos de envejecimiento para así seleccionar o descartar familias de distribuciones de vida. Por ejemplo, si las unidades sufren desgaste y éste es importante, de tal manera que se incrementa la probabilidad de falla, la familia con tasa de riesgo constante puede quedar descartada para su consideración. Otra caso, si sabemos que los efectos de envejecimiento no son importantes, como en los tiempos de vida de chips de computadoras, usamos una familia de distribución con tasa de riesgo constante que sea apropiada.

Observación: Toda variable aleatoria, T , está caracterizada por su funciones de densidad, $f(t)$, distribución, $F(t)$, y de confiabilidad, $C(t)$.

Relación entre la Función de Confiabilidad y $f(t)$ y $F(t)$:

La función de confiabilidad también puede ser expresada en función de $f(t)$ y $F(t)$, esto es,

$$C(t) = \int_t^{\infty} f(u)du \quad (2.4)$$

y

$$C(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t). \quad (2.5)$$

Recíprocamente la función de distribución, $F(t)$, y la función de densidad, $f(t)$, son determinadas a través de la función de confiabilidad, $C(t)$, esto es,

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - C(t) \quad (2.6)$$

y

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}(1 - C(t)) = -\frac{d}{dt}C(t). \quad (2.7)$$

Relación entre la Función de Riesgo y $C(t)$, $f(t)$ y $F(t)$

De las ecuaciones (2.7) y (2.2) se ve que la función de riesgo se puede relacionar con la función de confiabilidad de la siguiente forma:

$$h(t) = -\frac{d}{dt}C(t) \frac{1}{C(t)} = -\frac{d}{dt} \ln C(t). \quad (2.8)$$

Luego, aplicando integral a la ecuación (2.8) se obtiene que

$$\int_0^t h(t)dt = -\ln C(t),$$

Expresado por	$F(t)$	$f(t)$	$\bar{F}(t)$	$h(t)$
$F(t)$	-	$\int_0^t f(u)du$	$1 - \bar{F}(t)$	$1 - \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$
$f(t)$	$\frac{d}{dt}F(t)$	-	$-\frac{d}{dt}\bar{F}(t)$	$h(t) \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$
$\bar{F}(t)$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(u)du$	-	$\exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$
$h(t)$	$\frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)du}$	$-\frac{d}{dt} \ln \bar{F}(t)$	-

Tabla 2.1: Relación entre las funciones $F(t)$, $f(t)$, $\bar{F}(t)$ y $h(t)$

con lo cual

$$C(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}. \quad (2.9)$$

La función de confiabilidad, $C(t)$, y la función de distribución, $F(t) = 1 - C(t)$, son determinadas mediante la función de riesgo, $h(t)$, y viceversa.

Es posible expresar la función de riesgo a través de $f(t)$ y $F(t)$, utilizando la ecuación (2.2), entonces $h(t)$ está representada por las siguientes ecuaciones:

$$h(t) = \frac{d}{dt}F(t) \frac{1}{1 - F(t)} \quad (2.10)$$

y

$$h(t) = \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)du}. \quad (2.11)$$

Si se consideran las ecuaciones (2.2) y (2.9), se ve que la función de densidad, $f(t)$, puede expresarse por

$$f(t) = h(t) \exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}. \quad (2.12)$$

En la tabla 2.1 se resumen las relaciones entre estas funciones.

Función de Riesgo Acumulada

La densidad $f(t)$ puede ser integrada para obtener la función de distribución acumulada $F(t)$, del mismo modo se puede integrar la función de riesgo, $h(t)$, para obtener la función de riesgo acumulada tasa de fallas acumulada, denotada por $H(t)$ o $FRA(t)$, esto es,

$$H(t) = FRA(t) = \int_0^t h(u)du. \quad (2.13)$$

Esta integral puede ser expresada como

$$H(t) = -\ln C(t),$$

donde la notación \ln denota el logaritmo natural, neperiano o logaritmo en base exponencial.

Función de Riesgo Promedio

Como la función de riesgo acumulado varía en el tiempo, es útil determinar el número promedio que represente el comportamiento de la función de riesgo en un intervalo de tiempo. Para definir la función de riesgo promedio en el intervalo $[t_1, t_2]$, denotada por $FRP(t_1, t_2)$, se integra la función de riesgo sobre el intervalo y se divide por $t_2 - t_1$, esto es,

$$\begin{aligned} FRP(t_1, t_2) &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} h(u)du}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{H(t_2) - H(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\ln C(t_1) - \ln C(t_2)}{t_2 - t_1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si el intervalo de tiempo es desde 0 a t , la FRP se simplifica a

$$FRP(t) = \frac{H(t)}{t} = \frac{-\ln C(t)}{t}.$$

Esta cantidad es aproximadamente igual a $F(t)/t$ para valores pequeños de $F(t)$, esto es, $F(t)$ menor a 0.10 aproximadamente. En el intervalo de tiempo de 0 a t , si se conoce la función de riesgo promedio $FRP(t)$, la función de distribución acumulada, $F(t)$, para cualquier distribución, está dada exactamente por la relación

$$F(t) = 1 - \exp(-FRP(t)),$$

lo cual es aproximadamente igual a $t \times FRP(t)$, para valores pequeños de $F(t)$.

Método de Máxima Verosimilitud

Función de Verosimilitud (F.V.)

La función de verosimilitud de una muestra aleatoria de tamaño n , se define como la densidad conjunta de n variables aleatorias T_1, \dots, T_n vista como función de los parámetros y está dada por:

$$L(\theta) = L(\theta; T) = c \prod_{i=1}^n L_i(\theta; t_i)$$

donde $L_i(\theta; t_i)$ es la probabilidad de la observación i -ésima, t_i es el tiempo observación i -ésimo, θ es el parámetro a estimar y c es un término constante de proporcionalidad que no depende de θ .

Función de Verosimilitud para Datos Censurados

Suponga que los tiempos de vida y tiempos de censura son independientes. En la construcción de la función de verosimilitud con datos censurados es necesario considerar cuidadosamente la información que entrega cada dato: Una observación no censurada corresponde a un tiempo exacto, el cual proporciona información sobre la probabilidad de que este evento ocurra, lo que es aproximadamente igual a la función de densidad de $f(t)$ en ese tiempo. Luego, según el tipo de censura de las observaciones, el aporte individual de cada observación censurada o no a la verosimilitud es de la siguiente forma:

- Censura por la izquierda de t_i :

$$L_i(\theta) = \int_0^{t_i} f(t)dt = F(t_i) - F(0) = F(t_i).$$

- Censura en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$:

$$L_i(\theta) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt = F(t_i) - F(t_{i-1}).$$

- Censura a la derecha de t_i :

$$L_i(\theta) = \int_{t_i}^{\infty} f(t)dt = F(\infty) - F(t_i) = 1 - F(t_i)$$

El aporte a la verosimilitud para una muestra de tamaño n de tiempos de vidas tomados de una población con distribución $F(\cdot)$ es la siguiente:

- l_i observaciones censuradas por la izquierda en t_i .

Rango: $T \leq t_i$.

Verosimilitud: $[F(t_i)]^{l_i}$.

- d_i observaciones que fallaron en $[T_{i-1}, t_i]$.

Rango: $t_{i-1} < T \leq t_i$.

Verosimilitud: $[F(t_i) - F(t_{i-1})]^{d_i}$.

- r_i observaciones censuradas por la derecha en t_i .

Rango: $T > t_i$.

Verosimilitud: $[1 - F(t_i)]^{r_i}$.

Luego, la verosimilitud total, para n observaciones independientes es:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= L(\theta; t) \\ &= C \prod_{i=1}^n L_i(p; t_i) \\ &= C \prod_{i=1}^{m+1} [F(t_i)]^{l_i} [F(t_i) - F(t_{i-1})]^{d_i} [1 - F(t_i)]^{r_i}, \end{aligned}$$

donde $n = \sum_{j=1}^{m+1} (d_j + r_j + l_j)$ y C es una constante que depende de la muestra, pero no de θ .

PRUEBAS DE VIDA ACELERADA

La calidad de un producto no sólo debe de estar comprometida con la entrega del producto, sino que además debe apoyarse en la confiabilidad del mismo, los requerimientos para la alta confiabilidad han incrementado la necesidad de pruebas mas avanzadas para materiales, componentes y sistemas.

La estimación de la distribución de tiempos de falla o el mejor rendimiento de los componentes de un producto en alta confiabilidad, es el objetivo de nuestro estudio. La mayoría de los productos modernos estan diseñados para operar sin falla por meses, años o décadas. Así pocas unidades fallarán, se degradarán en uso de condiciones normales. Por ejemplo, el diseño y construcción de un satélite de telecomunicaciones, puede llevar solamente algunos meses para probar sus componentes, para que den servicio durante 15 o mas años. Para tales aplicaciones las pruebas de vida acelerada son usadas ampliamente en el campo industrial. Simplemente para obtener información oportuna sobre la confiabilidad de materiales, componentes, detectar modos de falla, corrección de diseños, comparar productos, etc. Las pruebas de vida acelerada por lo general se llevan a cabo en laboratorios en donde cada componente o subsistema es sometido a una serie de pruebas para las cuales se simula su capacidad de “aguante” ante un sobre-estresamiento de sus condiciones de operación, hasta que la falla se llegue a presentar. Aquí cada periodo de tiempo de prueba representa una cantidad más extensa de tiempo, por ejemplo,

una prueba de vida acelerada o de fatiga de 10 horas puede representar o simular 1.5 años de operación normal del componente o subsistema.

A la fecha, existen diferentes métodos de aceleración:

- Incrementar la frecuencia de uso del producto. Por ejemplo, considere la confiabilidad de un tostador, el cual está diseñado para una vida media de 20 años, asumiendo que la frecuencia de uso es de dos veces al día, si en vez de ese uso, se prueba el tostador 365 veces al día, podemos reducir la vida media, alrededor de 40 días.
- Incrementar el tipo de daño. Por ejemplo incrementando los niveles de variables experimentales como temperatura o humedad pueden acelerar ciertas reacciones químicas que a la larga conducen a la degradación y a la falla.
- Incrementando los niveles de estrés, es decir, ciclos de temperatura (se dice que la temperatura es el enemigo de la confiabilidad, incrementar la temperatura es uno de los métodos que se usan para acelerar los mecanismos de falla), voltage, presión etc. bajo las cuales las unidades de prueba operan.

Una unidad fallará cuando su resistencia caiga por debajo del estrés aplicado, de este modo una unidad en un estrés alto generalmente fallará mas rapidamente que el que opera en un estrés menor.

Tomando en cuenta que las alteraciones en las condiciones normales de uso y la falla, no equivale a representar un daño que a manera de regla de tres pueda calcularse en condiciones normales, no existiendo un criterio bien establecido para

definir la duración del componente. Todo depende de las características particulares de la función que debe desempeñar el componente o subsistema, de los recursos disponibles, del tiempo establecido para la realización del proyecto, etcétera. Además, debe tomarse en cuenta una premisa importante: *Debe asegurarse que durante el período de prueba no va a presentarse otro tipo de falla de la que se esté investigando.*

La interpretación de las pruebas de vida acelerada requieren modelos que relacionen las variables de aceleración (tiempo-factor de aceleración), como temperatura, voltage presión con el tiempo de uso normal. La idea general, es que pruebas a niveles altos de estrés aceleran la falla, entonces tratar de extrapolar a niveles bajos de estrés.

Modelos de Riesgo Proporcional

El estudio de los tiempos de vida de los componentes del sistema involucra sólo al tiempo, pero si además de esta variable se incluyen en la modelación variables explicatorias o dependientes. Así suponga entonces que para una entidad se define un vector z , de orden $q \times 1$, de variables explicatorias, las que pueden representar, por ejemplo: tratamientos, propiedades intrínsecas de los individuos (edad, zona geográfica etc.) o variables exógenas, entre otras; existiendo incluso interacciones entre ellas. De esta manera, la tasa de fallas al tiempo t , con covariables z llamado modelo de riesgos proporcionales de Cox, se plantea como

$$h(t, z) = h_0(t) \exp(z\beta),$$

donde $h_0(t)$ es llamado riesgo de referencia y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ es el vector de coeficientes de regresión. Una expresión más general para este modelo, se puede plantear

$$h(t, \mathbf{z}) = h_0(t)\Psi(\mathbf{z}),$$

luego se está en presencia de una familia de distribuciones llamada de Riesgo Proporcional.

Un tratamiento análogo puede darse a la función de sobrevivencia, esto es, como

$$\begin{aligned} f(t, z) &= h_0(t)\Psi(z) \exp\left(-\Psi(z) \int_0^t h_0(u)du\right) \\ &= h(t, z) \int_0^t h(u, z)du \\ &= \Psi(z)h_0(t) \left[\exp\left(-\int_0^t h_0(u)du\right)\right]^{\Psi(z)} \\ f(t, z) &= \Psi(z) (\bar{F}_0(t))^{\Psi(z)-1} f_0(t) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{F}_0(t, z) &= \exp(-H(t, z)) \\ &= \exp\left(-\int_0^t h(u, z)du\right) \\ &= \exp\left(-\Psi(z) \int_0^t h_0(u)du\right) \\ &= \left(\exp\left(-\int_0^t h_0(u)du\right)\right)^{\Psi(z)} \\ \bar{F}_0(t, z) &= (\bar{F}_0(t))^{\Psi(z)} \end{aligned}$$

Modelo de Vida Acelerada

Cuando las variables explicatorias son constantes, el modelo de riesgo proporcional nos puede conducir al modelo de vida acelerada, para ello, se debe establecer la relación

$$[\bar{F}_0(t)]^{\Psi(\mathbf{z})} = \bar{F}_0(t\chi(\mathbf{z}))$$

de modo que,

$$\bar{F}_0(t, \mathbf{z}) = \bar{F}_0(t\chi(\mathbf{z})).$$

Este modelo es denominado *Modelo de vida Acelerada* y $1/\chi(\mathbf{z})$ es llamado el factor de aceleración, es proporcional al tiempo y modifica la escala del mismo.

Recuerde que el modelo de vida acelerada, el cual también define una familia de distribuciones, viene dado por $\bar{F}_0(t, \mathbf{z}) = \bar{F}_0(t\chi(\mathbf{z}))$, de esta manera tenemos

$$\begin{aligned} f(t, \mathbf{z}) &= -\frac{d\bar{F}(t, \mathbf{z})}{dt} \\ &= -\frac{d\bar{F}_0(t, \mathbf{z})}{dt}\chi(\mathbf{z}) \\ &= f_0(t\chi(\mathbf{z}))\chi(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(t, \mathbf{z}) &= \frac{f(t, \mathbf{z})}{\bar{F}(t, \mathbf{z})} \\ &= \frac{f(t\chi(\mathbf{z}))\chi(\mathbf{z})}{\bar{F}_0(t, \mathbf{z})} \\ &= h_0(t\chi(\mathbf{z}))\chi(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Este modelo conecta los modelos lineales con los modelos de riesgos proporcionales. Así, si $T = T_0/\chi(\mathbf{z})$, donde T_0 tiene función de sobrevivencia $\bar{F}_0(t)$,

entonces

$$\log T = \log T_0 - \log \chi(\mathbf{z}) + \epsilon$$

donde $E(\epsilon) = 0$ y $E(\log T_0) = \mu_0$, con lo cual,

$$E(\log T) = \mu_0 - \log(\chi(\mathbf{z})).$$

En general $\chi(\mathbf{z})$ puede tomar diversas formas, incluso se enfatizó la dependencia de β a través de $\chi(\mathbf{z}, \beta)$, siendo una candidata natural

$$\chi(\mathbf{z}, \beta) = \exp(\mathbf{z}\beta)$$

con lo cual

$$E(\log T) = \mu_0 - \mathbf{z}\beta$$

o equivalentemente

$$\log T = \log T_0 - \mathbf{z}\beta + \epsilon,$$

es un modelo de regresión de la forma

$$Y = \mathbf{z}\beta + \epsilon.$$

Esto es, para aplicar los métodos de regresión, es necesario realizar la transformación logarítmica a los datos.

Note que el modelo anterior, tiene la ventaja de que se pueden hallar expresiones para β sin conocer la distribución de los datos. Así, si z_i es el vector de covariables de la entidad i -ésima que falla en t_i , entonces

- Si no hay empates ($d_j = 1, \forall j$)

$$\begin{aligned}
 L(\beta) &= \prod_{i=1}^r \frac{r(t, z_i) \Delta t}{\sum_{l \in R_t} r(t, z_l) \Delta t} \\
 &= \prod_{i=1}^r \frac{r_0(t) \exp(\beta z_i)}{r_0(t) \sum_{l \in R_t} \exp(\beta z_l)} \\
 &= \prod_{i=1}^r \frac{\exp(\beta z_i)}{\sum_{l \in R_t} \exp(\beta z_l)},
 \end{aligned}$$

donde $R_t \equiv \{\text{sobrevivientes en } t\}$. $L(\beta)$ no es una verosimilitud, pero bajo ciertas condiciones $\hat{\beta}$ es asintóticamente Normal.

- Si hay empates ($d_j = 1$, para algún j)

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^r \frac{\exp(\beta S_i)}{\left(\sum_{l \in R_t} \exp(\beta z_l) \right)^{d_i}}$$

donde $\sum_{l \in R_t} z_l$.

Además observe que el modelo de regresión de Cox puede utilizarse para comparar curvas de supervivencia, el cual se une al método de bandas de confianza y a la prueba de log rank. Por ejemplo se puede plantear lo siguiente:

$$\bar{F}_2(t) = (\bar{F}_1(t))^{\exp(\beta)}$$

y en tal caso, las hipótesis de interés serían

$$H_0 : \beta = 0 \iff H_0 : \bar{F}_1(t) = \bar{F}_2(t).$$

Diseños Experimentales para una PVA

Suponga que una componente está sujeta a m estresores o covariables, digamos z_1, z_2, \dots, z_m los que actúan simultáneamente sobre ésta y cada estresor ocurre a n_j niveles, $j = 1, \dots, m$ con

$$z_j^{(0)} \leq z_j^{(1)} < \dots < z_j^{(n_j)} \quad j = 1, \dots, m$$

donde $z_j^{(0)} \leq z_j^{(1)}$ denota a la condición normal de estrés.

Indudablemente, en una PVA el diseño experimental juega un papel fundamental, para fijar ideas y por simplicidad, se asumirá la presencia de una sola covariable, digamos z . La prueba experimental puede ser conducida mediante diferentes diseños, a continuación se plantearán tres tipos.

Diseño tipo I

El experimento involucra k niveles de z , esto es, $z^{(1)} \leq z^{(2)} < \dots < z^{(k)}$ y $z^{(0)} \leq z^{(1)}$ es el nivel normal de operación. Considere que cada nivel del factor de estrés es replicado n_i veces, con $i = 1, \dots, k$ y se aplica una censura de Tipo II (hasta que fallen r entidades). El experimento es llevado a cabo de la siguiente forma:

1. un nivel de estrés $z^{(i)}$ es elegido al azar desde $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(k)}$ y se repite n_i veces sobre unidades elegidas al azar. La prueba de vida concluye cuando $r_i (\leq n_i)$ unidades fallan. Siendo $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{in_i}$ los tiempos falla o censura.

2. Otro nivel $z^{(i)}$ es elegido al azar entre los restantes niveles de estrés y se repite el paso 1. El procedimiento se repite hasta completar los k niveles de estrés.

Diseño tipo II

Se fijan k instantes de tiempo, digamos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t$. Se eligen al azar n unidades para ser probadas el tiempo $t = 0$. en el intervalo $[0, t_1]$ las unidades son sometidas al nivel de estrés $z^{(1)}$, en el intervalo $[t_1, t_2]$ las unidades que no hallan fallado son sometidas al nivel $z^{(2)}$ y así sucesivamente. Las unidades que no hallan fallado al tiempo t_k , se someterán a un nivel de estrés $z^{(k+1)}$, hasta que todas fallen (no hay censura). Las vidas de las n componentes serán T_1, T_2, \dots, T_n .

Diseño tipo III

Se eligen al azar n unidades de entre las unidades a probar y son sometidas a un nivel de estrés $Z(t)$, el cual se incrementa con el tiempo hasta que todas las unidades hallan fallado (no hay censura). $Z(t)$ se asume conocido y los tiempos de vida serán T_1, T_2, \dots, T_n

Modelación Paramétrica en PVA

El primer paso de cualquier análisis estadístico consiste en formular un modelo probabilístico del problema, basado en un conocimiento *a priori* del diseño experimental utilizado. Entonces, tal como antes, en PVA se requiere información respecto de

- $\bar{F}(t, z)$, sobrevivencia en función del factor de estrés.
- $h(t, z)$, riesgo en función del factor de estrés.

Para conducir una modelación paramétrica en PVA, se deben ir haciendo secuencialmente las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la distribución de vida que se puede suponer *a priori* bajo condiciones normales de operación?
2. ¿Es posible postular estas distribuciones bajo las condiciones físicas de operación?
3. ¿Como afecta el sobreestrés a esta supuesta distribución bajo condiciones normales de operación?
4. Por ejemplo, bajo sobreestrés, ¿se preservará la distribución supuesta *a priori* en condiciones normales?
5. Si así es, ¿el efecto del sobreestrés sólo modifica los parámetros de la distribución bajo condiciones normales de operación?
6. De ser así, ¿en qué forma se relaciona el factor de estrés y el vector de parámetros? Esta relación se establecerá a través de $\theta(z)$ y apoyados en la física de la componente.

En cada PVA, la información requerida será (para el diseño I)

$$(z^{(i)}; n_j; r_j; T_{j1}, \dots, T_{jn_j}); \quad j = 1, \dots, k$$

en tal caso, la función de riesgo se expresará como

$$h(t, \theta(z)) = h_0(t)\Psi(\theta(z)) \quad [\text{Modelo de Riesgos Proporcionales}]$$

y

$$h(t, \theta(z)) = h_0(t\chi(\theta(z)))\chi(\theta(z)) \quad [\text{Modelo de Vida Acelerada}].$$

Algunas funciones $\theta(z)$ que han sido exitosamente utilizadas son:

$$\theta(z) = az + b, \quad [\text{Modelo Lineal}],$$

éste es el mas frecuentemente utilizado para distintos fenómenos

$$\theta(z) = bz^{-a}, \quad [\text{Modelo Potencial}],$$

éste ha sido utilizado en fatiga de materiales eléctricos

$$\theta(z) = b \exp(-b/z), \quad [\text{Modelo Arrhenius}],$$

éste ha sido utilizado en envejecimiento térmico y de materiales semiconductores.

$$\theta(z) = bz \exp(-b/z), \quad [\text{Modelo Eyring Simple}],$$

éste ha sido utilizado en estrés térmico constante.

Algunos modelos que representan a estas relaciones se presentan en la siguiente sección

Relación tiempo-factor de aceleración

Relación Arrhenius

La relación Arrhenius es un modelo ampliamente usado para describir el efecto que la temperatura tiene sobre el tipo de una reacción química. La relación

puede ser escrita por

$$\begin{aligned} R(temp) &= \gamma_0 \exp\left(\frac{-E_a}{k_B \times temp \ K}\right) \\ &= \gamma_0 \exp\left(\frac{-E_a \times 11605}{temp \ K}\right) \end{aligned}$$

siendo R la razón de reacción y $temp \ K = temp^\circ C + 273.15$ la temperatura absoluta en la escala Kelvin. $k_B = 8.6171 \times 10^{-5} = 1/11605$ la constante de Boltzman en un electron volts por $^\circ C$, E_a es la energía de activación en el electron volts. Los parámetros E_a y γ_0 son características de la reacción química en particular del material.

El factor de aceleración Arrhenius es

$$\begin{aligned} AF(temp, temp_U, E_a) &= \frac{R(temp)}{R(temp_U)} \\ &= \exp\left[E_a \left(\frac{11605}{temp_U \ K} - \frac{11605}{temp \ K}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

y depende solamente de dos niveles de temperatura y de la energía de activación. Sí $temp > temp_U$ entonces $AF(temp, temp_U, E_a) > 1$, por simplicidad se usa $AF(temp) = AF(temp, temp_U, E_a)$ cuando $temp_U$ y E_a se entienden que sean producto del uso de la temperatura y una reacción específica de la energía de activación.

Relación Eyring

La relación Eyring muestra los efectos que la temperatura tiene sobre un tipo de reacción, escribiendo en términos de la propia reacción

$$R(temp) = \gamma_0 \times A(temp) \times \exp\left(\frac{-E_a}{k_B \times temp \ K}\right) \quad (3.2)$$

Donde $A(temp)$ es una función de la temperatura que depende de específicas reacciones dinámicas y γ_0 y E_a son constantes. Algunas variantes para $A(temp) = (temp - K)^m$ con valores fijos para m

La relación Factor de Aceleración-Temperatura esta dada por

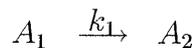
$$AF_{Ey}(temp, temp_U, E_a) = \left(\frac{temp - K}{temp_U - K} \right)^m \times AF_{Ar}(temp, temp_U, E_a)$$

donde AF_{Ar} es el factor de aceleración de Arrhenius (3.1).

Modelos para Degradación

La falla de muchos productos pueden estar basados en un proceso de degradación; por ejemplo, en ciertos películas de polietileno, cuando se pierde mas del 50% de elongación se considera que la unidad ha fallado; este nivel de falla puede ser fijo o en algunos casos se puede considerar aleatorio. En algunas aplicaciones existen mas de una variable de degradación (o más de un proceso de degradación).

Meecker y LuValle (1995) presentan un modelo en el cual $A_1(t)$ es la cantidad de cierta sustancia disponible para la reacción y $A_2(t)$ es la proporción de la cantidad que causa la falla en el componente al tiempo t , siendo esta reacción de la forma



con k_1 como constante de proporción, teniendo la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -k_1 A_1 \quad y \\ \frac{dA_2}{dt} &= k_1 A_1 \quad \text{para } k_1 > 1 \end{aligned}$$

la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A_1(0) \exp(-k_1 t) \quad \text{y} \\ A_2(t) &= A_2(0) + A_1(0) [1 - \exp(-k_1 t)] \end{aligned}$$

donde $A_1(0)$ y $A_2(0)$ son las condiciones iniciales. Si $A_2(0) = 0$ tenemos $\lim_{t \rightarrow \infty} A_2(t) = A_1(0)$,

$$A_2(t) = A_2(\infty)[1 - \exp(-k_1 t)] \quad (3.3)$$

Degradación no lineal

Algunos simples procesos de degradaciones químicas pueden ser descritos por (3.3) en el siguiente modelo

$$D(t, temp) = D_\infty \times \{1 - \exp[-R_U \times AF(temp) \times t]\} \quad (3.4)$$

Donde R_U es un tipo de reacción al uso de la temperatura $temp_U$, $R_U \times AF(temp)$ es el tipo de reacción a temperatura general $temp$ y D_∞ es asintótico. Cuando la degradación es medida sobre una escala decreciente de cero, en $D_\infty < 0$ y especificando que la falla ocurre en pequeños valores de t tal que $D(t) \leq D_f$. Igualando $D(T, temp)$ a D_f y resolviendo para t tenemos el tiempo de falla en la temperatura $temp$ como

$$\begin{aligned} T(temp) &= \frac{-\frac{1}{R_U} \log\left(1 - \frac{D_f}{D_\infty}\right)}{AF(temp)} \\ &= \frac{T(temp_U)}{AF(temp)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde $-(1/R_U) \log(1 - D_f/D_\infty)$ es el tiempo de falla en condiciones de uso.

El lado derecho de (3.5) muestra que el modelo vida/temperatura inducido por este simple proceso de degradación y el modelo de aceleración de Arrhenius resultan en un modelo *SAFT* (*Scale Accelerated Failure Time*). Con este modelo *SAFT*, la degradación por unidad en cualquier temperatura puede ser usado para determinar la degradación (tiempo de falla) que la misma unidad tendrá en otra temperatura específica, simplemente escalando el eje del tiempo por un factor $AF(temp)$. Los modelos de tiempo de falla también son escalados. Por ejemplo, Si $T(temp_U)$, el tiempo de falla al uso de temperatura, tiene una distribución Weibull con parámetro de escala α_U y forma β (i.e. $T(temp_U) \sim WEIB(\alpha_U, \beta)$), entonces el tiempo de falla en otra temperatura esta distribuido $T(temp_U) \sim WEIB(\alpha_U/AF(temp), \beta)$. Similarmente, Si $T(temp_U)$ tiene una distribución lognormal con parámetro de escala $\exp(\mu_U)$ y parámetro de forma σ (i.e. $T(temp_U) \sim LOGNOR(\mu_U, \sigma)$), entonces $T(temp_U) \sim LOGNOR(\mu_U - \log(AF(temp)), \sigma)$.

Degradación Lineal

Considere que en el modelo (3.4), $R_U \times AF(temp)$ es pequeño entonces $D(t)$ es también pequeño en relación D_∞ , obteniendo

$$\begin{aligned}
 D(t, temp) &= D_\infty \times \{1 - \exp[-R_U \times AF(temp) \times t]\} \\
 &\approx D_\infty \times R_U \times AF(temp) \times t \\
 &= R_U \times AF(temp) \times t.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Es aproximadamente lineal en t con pendiente $R^+ \times AF(temp)$ donde $R^+ = D_\infty \times R_U$. También algunos procesos de degradación (llantas de autos) son naturalmente lineales en el tiempo.

Si la falla ocurre cuando $D(T) \leq D_f$, e igualando $D(T, temp)$ a D_f y resolviendo para T , tenemos que el tiempo de falla es

$$T \left(temp = \frac{D_f}{R_U^+} \right) \times \frac{1}{AF(temp)} = \frac{T(temp_U)}{AF(temp)} \quad (3.7)$$

donde $T(temp_U) = D_f/R_U^+$ es el tiempo en condiciones de uso. Así mismo este también es un modelo *SAFT*.

Aceleración del voltage

Incrementar el voltage es otro de los métodos usados comunmente para acelerar la falla de un material o componentes, como focos, capacitores, transformadores, etc. El voltage está definido como la diferencia en el potencial eléctrico en dos puntos. los mecanismos de aceleración del voltage, pueden estar dados al incrementar la carga en el voltage a niveles propios para disminuir la resistencia del componente. Uno de los modelos para representar estos mecanismos de aceleración, es el de potencia inversa

Potencia inversa

Sea $T(volt)$ y $T(volt_U)$ los tiempos de falla que resultan para una unidad particular al incrementar el voltage y las condiciones de uso del voltage, se obtiene la relación

$$T(volt) = \frac{T(volt_U)}{AF(volt)} = \left(\frac{volt}{volt_U} \right)^\beta T(volt_U)$$

el cual es un modelo *SAFT*. Esta relación de potencia inversa, voltage-factor de aceleración puede ser expresada como

$$AF(volt) = AF(volt, volt_U, \beta_1) = \frac{T(volt_U)}{T(volt)} = \left(\frac{volt}{volt_U} \right)^{-\beta_1}.$$

Cuando $volt > volt_U$, y $\beta_1 < 0$, $AF(volt, volt_U, \beta_1) > 1$. Siendo $AF(volt) = AF(volt, volt_u, \beta_1)$ denota el factor de aceleración.

Si el modelo para $T(volt)$ es un log-location-distribution, su parámetro puede ser expresado como $\mu = \beta_0 + \beta_1 x$ con σ constante y $x = \log(volt)$ y β_0 es el valor de μ en $volt = 1$. Entonces $\log(t_p) = \beta_0 + \beta_1 x + \phi^{-1}(p)\sigma$, los parámetros β_1 y σ son características del producto o material.

Método paramétrico para la estimación de una PVA

Dos suposiciones son necesaria para empezar con el análisis

1. La intensidad de los niveles de estrés (caracterizada por S , i.e. $z^{(j)}$) no cambia el tipo de distribución de vida, $f(t, \theta(z))$, pero los niveles de estrés han de influir en los valores de los parametros.
2. La relación entre S y $\theta(z)$ es decir $\theta = g(S, a, b, c, \dots)$ es conocida, excepto para uno o más de los parámetros a, b, c, \dots ; es también necesario que se asuma, que la relación es válida para un cierto rango de elementos de S .

El objetivo aquí es obtener estimaciones para los parametros a, b, c, \dots basados en las pruebas de vida realizadas en grandes valores de S y luego usar estas

estimaciones para hacer una inferencia acerca del valor de θ en uso de condiciones normales.

Es claro que el éxito del procedimiento depende de la elección correcta del modelo. los modelos estan basados en las propiedades físicas y características propias de los componentes a estudiar. Los modelos Arrhenius y Eyring parecen ser los mas utilizados, sin embargo no esta de más intentar con algunos otros modelos (presentados en la sección anterior).

Para iniciar con el análisis, supongamos que tenemos ya determinada la función de densidad de probabilidad apropiada a nuestro estudio, con lo cual, también la función de riesgo asociada a los datos. Asumiremos que se realizó el diseño tipo I, teniendo a $\hat{\theta}_i$ como un estimador insesgado eficiente de θ_i

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ji} + (n_i - r_i)t_{r_i,i}}{r_i}.$$

La *fdp* de $\hat{\theta}_i$ es la función de densidad gama con parámetro de forma r_i , así que

$$g(\hat{\theta}_i) = \frac{\exp(-r_i\hat{\theta}_i/\theta_i)}{\Gamma(r_i)} \left(\frac{r_i}{\theta_i}\right)^{r_i} (\hat{\theta}_i)^{r_i-1}$$

$$0 \leq \hat{\theta}_i < \infty, \quad r_i \geq 1.$$

Claramente $E(\hat{\theta}_i) = \theta$ y $Var(\hat{\theta}_i) = \frac{\theta^2}{r_i}$.

Ha sido demostrado que si la distribución es una exponencial, se tienen los siguientes resultados

- $\hat{\theta} = [-(n_i - 1)t_{1i} + t_{2i} + \dots + (n_i - r_i + 1)t_{r_i,i}] / (r_i - 1)$ siendo el estimador de maxima verosimilitud de θ_i

- $\hat{\gamma}_i = t_{1i} - \hat{\theta}_i/n_i$ es el estimador insesgado de mínima varianza de γ_i
- t_{1i} y $\hat{\theta}_i$ son independientes
- La *fdp* de $\hat{\theta}_i$ es la función de densidad gama con parámetro de forma $r_i - 1$, tal que

$$g(\hat{\theta}_i) = \frac{\exp(-(r_i - 1)\hat{\theta}_i/\theta_i)}{\Gamma(r_i - 1)} \left(\frac{r_i - 1}{\theta_i}\right)^{r_i - 1} (\hat{\theta}_i)^{r_i - 2}$$

$$0 \leq \hat{\theta}_i < \infty, \quad r_i \geq 2.$$

Claramente $E(\hat{\theta}_i) = \theta$ y $Var(\hat{\theta}_i) = \frac{\theta^2}{r_i - 1}$.

Dado que muchos modelos presentados anteriormente están dados en términos de la función de riesgo h_i , es necesario ver la estimación de esta función. Sea $\hat{h}_i = 1/\hat{\theta}_i$ un estimador de h_i (basandonos en una distribución exponencial), entonces dado que $g(\hat{\theta}_i)$ es conocida y dado que h_i es monótona en $\hat{\theta}_i$, por un simple cambio de variable, es fácil ver que la *fdp* de \hat{h} es la función de densidad gama invertida, dada por

$$g(\hat{h}_i) = \frac{\exp(-R_i/\theta_i\hat{h}_i)}{\Gamma(R_i)} \left(\frac{R_i}{\theta_i}\right)^{R_i} \left(\frac{1}{\hat{h}_i}\right)^{R_i + 1}$$

$$\hat{h}_i \geq 0, \quad R_i \geq 1,$$

donde $R_i = r_i$ o $R_i = r_i - 1$ independientemente de que γ_i sea o no conocido.

Teniendo

$$E(\hat{h}_i) = \frac{h_i R_i}{R_i - 1} \quad \text{para } R_i > 1$$

$$Var(\hat{h}_i) = h_i^2 \frac{R_i^2}{(R_i - 1)^2 (R_i - 2)}, \quad \text{para } R_i > 2.$$

Así mismo \hat{h}_i es sesgado; sin embargo, si R_i es grande \hat{h}_i tiende a ser insesgado y también lo será $var(\hat{h}_i) \cong h_i/R_i$. Valores grandes de R_i implica que r_i debe ser

también grande, siendo esta una condición con frecuencia difícil de cumplir ya que en algunos casos es costoso hacer muchas repeticiones en los niveles de estrés $z^{(j)}$.

Siguiendo con el análisis y asumiendo un modelo de potencial (o potencia inversa) dado como $\theta(z) = C/(z^{(i)})^P$, con $C > 0$, para todos los valores de $z^{(i)}$ dentro de un determinado rango. Un orden para obtener los estimadores de C y P que son independientes, y haciendo un ligero cambio en el modelo potencial, tenemos

$$\theta_i(z) = \frac{C}{(z^{(i)}/\dot{z})^P},$$

para todos los valores de $z^{(i)}$ y siendo \dot{z} la media geométrica ponderada, definida como

$$\dot{z} = \prod_{i=1}^k (z^{(i)})^{R_i / \sum_{i=1}^k R_i}$$

dado que la *fdp* de $\hat{\theta}_i$, $g(\hat{\theta}_i)$ es conocida y debido al esquema de aleatorización determinado en el diseño experimental tipo I, podemos asegurar la independencia de las $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. La función de verosimilitud de C y P , $L(C, P|\hat{\theta})$ puede ser escrita de la siguiente forma

$$\prod_{i=1}^k \Gamma^{-1}(R_i) \left[\frac{R_i}{C} \left(\frac{z^{(i)}}{\dot{z}} \right)^P \right]^{R_i} (\hat{\theta}_i)^{R_i-1} \exp \left[-\frac{R_i \hat{\theta}_i}{C} \left(\frac{z^{(i)}}{\dot{z}} \right)^P \right],$$

donde $\hat{\theta}$ es el vector $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k]$. El estimador de máxima verosimilitud de P y C , \hat{P} y \hat{C} , respectivamente, están dados por la solución de las dos ecuaciones:

$$\hat{C} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i \hat{\theta}_i (z^{(i)}/\dot{z})^{\hat{P}}}{\sum_{i=1}^k R_i} \quad (3.8)$$

y

$$\sum_{i=1}^k R_i \hat{\theta}_i \left(\frac{z^{(i)}}{\dot{z}} \right)^{\hat{P}} \log \frac{z^{(i)}}{\dot{z}} = 0 \quad (3.9)$$

Dado que las ecuación (3.8) y (3.9) son no lineales, su solución requiere de algún método numérico para obtenerla. Así mismo, tenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} -E \left[\frac{\partial^2}{\partial P^2} \log L(C, P | \hat{\theta}) \right] &= \sum_{i=1}^k R_i \left(\log \frac{z^{(i)}}{\dot{z}} \right)^2, \\ -E \left[\frac{\partial^2}{\partial C^2} \log L(C, P | \hat{\theta}) \right] &= \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{C^2}, \\ -E \left[\frac{\partial^2 \log L(C, P | \hat{\theta})}{\partial P \partial C} \right] &= 0, \end{aligned}$$

la varianza asintótica y la covarianza asintótica de \hat{P} y \hat{C} son

$$Var(\hat{P}) = \sigma_P^2 = \left[\sum_{i=1}^k R_i \left(\log \frac{z^{(i)}}{\dot{z}} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3.10)$$

$$Var(\hat{C}) = \sigma_C^2 = C^2 \left(\sum_{i=1}^k R_i \right)^{-1} \quad (3.11)$$

y

$$Cov(\hat{P}, \hat{C}) = 0.$$

Procediendo a realizar inferencias para θ_u , el tiempo de media de falla al usar las condiciones de estrés z_u .

Sea $\bar{\theta}_u = \hat{C}(z_u/\dot{z})^{-\hat{P}}$ la estimación de máxima verosimilitud de θ_u , del resultado de que \hat{C} y \hat{P} son asintóticamente insesgados y asintóticamente independientes, y trabajando bajo muestras grandes, tenemos

$$E(\bar{\theta}) = CE \left[\left(\frac{z_u}{\dot{z}} \right)^{-\hat{P}} \right].$$

Si la aproximación para muestras grandes para \hat{P} y \hat{C} es válida, entonces

$$\hat{C} \sim N(C, \sigma_C^2) \quad \text{y} \quad \hat{P} \sim N(E, \sigma_P^2),$$

donde $\sim N(C, \sigma^2)$ denota una “distribución aproximadamente normal” con media μ y varianza σ^2 .

Si $J_u = (z_u/\dot{z})$, $Y_u = J_u^{\hat{P}}$ y $K_u = \log J_u$, entonces para un valor dado de z_u , es claro que

$$Y_u \sim \Lambda [K_u P, (K_u \sigma_P)^2],$$

donde $\sim \Lambda(\mu, \sigma^2)$ denota “distribución aproximadamente lognormal” con parámetros μ y σ^2 . De resultados obtenidos tenemos que

$$E(Y_u^{-1}) = \exp \left[\frac{1}{2} ((K_u \sigma_P)^2 - K_u P) \right]$$

$$E(\bar{\theta}_u) \approx C \left(\frac{z_u}{\dot{z}} \right)^{-P} \exp \left[\frac{1}{2} \sigma_P^2 \left(\log \frac{z_u}{\dot{z}} \right)^2 \right].$$

Así mismo, $\bar{\theta}_u$ es un estimador sesgado de θ_u , pero dado que el sesgo es términos de σ_C^2 y σ_P^2 , cantidades que son conocidas aproximadamente cuando el tamaño de muestra es grande, un estimador insesgado para θ_u es

$$\tilde{\theta} = \hat{C} \left(\frac{z_u}{\dot{z}} \right)^{-\hat{P}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_P^2 \left(\log \frac{z_u}{\dot{z}} \right)^2 \right]$$

la varianza de $\tilde{\theta}$ es

$$Var(\tilde{\theta}) = \exp \left[-\left(\sigma_P \log \frac{z_u}{\dot{z}} \right)^2 \right] Var \left[\hat{C} \left(\frac{z_u}{\dot{z}} \right)^{-\hat{P}} \right],$$

teniendo que

$$Var \left[\hat{C} \left(\frac{z_u}{\dot{z}} \right)^{-\hat{P}} \right] = E(\hat{C}^2) E(z_u^{-2}) - \left\{ E \left[\hat{C} \left(\frac{z_u}{\dot{z}} \right)^{-\hat{P}} \right] \right\}^2,$$

y dado que

$$E(Y_u^{-2}) = \exp[2(K_u \sigma_P)^2 - 2K_u P]$$

tenemos

$$Var(\tilde{\theta}) = \left(\frac{z_u}{\dot{z}}\right)^{-2\hat{P}} \left\{ (\sigma_C^2 + C^2) \exp \left[\sigma_P^2 \left(\log \frac{z_u}{\dot{z}} \right)^2 \right] - C^2 \right\}.$$

en la práctica C y P son desconocidas y por lo tanto una estimación de la varianza $Var(\tilde{\theta}_u)$ en términos de σ_C^2 y σ_P^2 puede ser obtenido usando \hat{P} y \hat{C} en lugar de P y C .

Para obtener una aproximación a los intervalos de confianza para θ es necesario asegurar que la función relativa de máxima verosimilitud de θ_u , $R_m(\theta_u)$ es simétrica y en forma acampanada. Esto establece el hecho que la estimación de máxima verosimilitud de θ_u , $\bar{\theta}_u$ está distribuido aproximadamente normal. Entonces $R_m(\theta_u)$ es obtenido colocando $C = \theta_u(z_u/\dot{z})^P$ en $L(C, P|\hat{\theta})$ y maximizando $L(C, P|\hat{\theta})$ con respecto a P , se sigue que

$$R_m(\theta_u) = \frac{1}{J} \prod_1^k \Gamma^{-1}(R_i) \left[\frac{R_i}{\theta_i} \left(\frac{z^{(i)}}{z_u} \right)^{\hat{P}(\theta_u)} \right]^{R_i} \left(\hat{\theta}_i \right)^{R_i-1} \exp \left[-\frac{R_i \hat{\theta}_i}{\theta_u} \left(\frac{z^{(i)}}{z_u} \right)^{\hat{P}(\theta_u)} \right],$$

donde $\hat{P}(\theta_u)$ es la solución de

$$\sum_1^k R_i \log \frac{z^{(i)}}{z_u} = \frac{1}{\hat{\theta}_u} \sum_1^k R_i \hat{\theta}_i \left(\frac{z^{(i)}}{z_u} \right)^{\hat{P}(\theta_u)} \log \frac{z^{(i)}}{z_u}$$

La siguiente tabla, muestra los resultados obtenidos, al aplicar estas fórmulas (el programa se hizo en Matlab) aplicando el método de Newton para encontrar una estimación de P y C de las fórmulas (3.8) y (3.9), tenemos $\hat{P} = 2.9378$, $\hat{C} = 0.0390$, y de (3.10) y (3.11) tenemos que la varianza de \hat{P} y \hat{C} son 0.0344 y $1.5246E - 05$ respectivamente. El estimador de máxima verosimilitud de θ_i , $\bar{\theta}_i$ es calculado usando $\theta_i = \hat{C}/(z^{(i)}/\dot{z})^{\hat{P}}$, $i = 1, 2, \dots, 5$ y el correspondiente estimador insesgado de θ , $\tilde{\theta}$ fue obtenido usando $\tilde{\theta} = \hat{C}/(z^{(i)}/\dot{z})^{-\hat{P}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma_P^2 \log^2(z^{(i)}/\dot{z}) \right]$.

$z^{(i)}$	n_i	r_i	θ_i	$\hat{\theta}_i$	$\bar{\theta}_i$	$\tilde{\theta}_i$
10	30	15	1.0000	0.8831	0.9122	0.8944
20	30	15	0.1250	0.1523	0.1191	0.1188
30	30	20	0.0370	0.0295	0.0362	0.0362
40	30	25	0.0160	0.0122	0.0155	0.0155
50	30	25	0.0080	0.0098	0.0081	0.0080

DISTRIBUCIÓN DE BIRNBAUM-SAUNDERS

Las pruebas de vida a menudo generan conjuntos muy pequeños de datos los cuales, pueden modelarse razonablemente bien mediante algunas familias de distribuciones de vida de dos parámetros. La región de mejor ajuste es usualmente la central. En pruebas de vida, sin embargo, el interés por lo general se centra en las colas de las distribuciones. En consecuencia la falta de observaciones en las colas causa problemas en la selección de la densidad que se utilizará para modelar las observaciones.

En la selección del modelo que usaremos para describir los datos, se deben tomar en cuenta tanto el ajuste de distribución a los datos como la relación que tenga tal densidad con el fenómeno que proporcionan los datos. Por ejemplo, consideremos un sistema hipotético que consiste de una o mas unidades idénticas. Una de las unidades es designada como la unidad primaria y las otras como unidades de respaldo de ésta. El sistema opera usando inicialmente la unidad primaria. Suponga que la primer unidad de respaldo es puesta en operación al instante en que la unidad primaria falla. Cuando la primer unidad de respaldo falla la segunda entra en operación (en caso de existir), y así sucesivamente. El sistema opera tanto como cada una de las unidades pueda operar. El tiempo de vida del sistema es así la suma de cada una de las unidades en el sistema. Asumamos que las unidades no se desgastan con el uso y que las fallas de las unidades son idependientes una de

otra. Bajo este escenario, suponga que el tiempo de vida de cada unidad puede ser modelado por una distribución exponencial. Entonces, el tiempo de vida del sistema se modela como una distribución gamma.

Como otro ejemplo, consideremos un sistema que consiste de n unidades operando en serie. Esto es, el sistema falla cuando cualquiera de las unidades individuales falla. Asumamos que las fallas de cada unidad son independientes una de otra y que el tiempo de vida de cada unidad tiene una distribución exponencial con media λ . El tiempo de vida del sistema está dado por una distribución exponencial con media λ/n .

Génesis

Birnbaum y Saunders (1969) tenían conocimiento acerca de un tipo de falla en materiales debido a fatiga. Usaron esta información para derivar la distribución de vida que ahora lleva su nombre. En el proceso de fatiga que ellos estudiaron asumen lo siguiente:

1. Un material está sujeto a repetidos ciclos de cargas o choques, los cuales producen una fisura o desgaste en el material.
2. La falla ocurre cuando la fisura o desgaste en el material sobrepasa cierto nivel de resistencia (umbral) de este, denotado por ω .
3. La secuencia de cargas impuestas en el material son las mismas ciclo tras ciclo.
4. La fisura o desgaste Y_i durante el i -ésimo ciclo se distribuye normal con media μ y varianza σ^2

5. Las fisuras en diferentes ciclos son independientes.

El desgaste acumulado al fin del n -ésimo ciclo está dado por $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Esto, aunado con los puntos 4 y 5, se tiene que Z_n tiene una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.

Ahora, sea N el número de ciclos hasta la falla. La función de distribución de N está dada por

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= P(N \leq n, Z_n > \omega) + P(N \leq n, Z_n \leq \omega) \\ &= P(Z_n > \omega) + P(N \leq n, Z_n \leq \omega). \end{aligned}$$

Note que $P(N \leq n, Z_n \leq \omega)$ tiene probabilidad positiva ya que Z_n se distribuye normal. Birnbaum y Saunders consideran esta probabilidad despreciable y usan la siguiente aproximación:

$$P(N \leq n) \doteq P(Z_n > \omega)$$

estandarizando, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &\doteq P\left(\frac{Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad \text{y por simetría, obtenemos} \\ &= P\left(\frac{Z_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{n\mu - \omega}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{n\mu - \omega}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{\omega\mu}}{\sigma} \left(\sqrt{\frac{n}{\omega/\mu}} - \sqrt{\frac{\omega/\mu}{n}}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Birnbaum y Saunders usan la ecuación (4.1) como una definición de una distribución continua de vida, reemplazando la variable aleatoria discreta N por una variable aleatoria continua T y el argumento discreto n por el continuo t ,

i.e., reemplazan el número de ciclos hasta la falla N , por el tiempo total de funcionamiento T y el n -ésimo ciclo por el tiempo t . Tomando $\alpha = \sigma/\sqrt{\omega\mu}$, $\beta = \omega/\mu$ y $g(t; \alpha, \beta) = \alpha^{-1} \left(\sqrt{t/\beta} - \sqrt{\beta/t} \right)$, se define la función

$$\begin{aligned} F_T(t; \alpha, \beta) &= \Phi \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right) \\ &= \Phi(g(t; \alpha, \beta)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

para $t > 0$ y cero en otro caso. Esta es la función de distribución acumulada para la distribución de tiempos de fatiga de Birnbaum-Saunders con parámetros α y β .

Por otra parte de (4.1),

$$U = \frac{\sqrt{\omega\mu}}{\sigma} \left(\sqrt{\frac{n}{\omega/\mu}} - \sqrt{\frac{\omega/\mu}{n}} \right)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\omega}{\mu} \left[\frac{U\sigma}{2\sqrt{\omega\mu}} + \sqrt{\left(\frac{U\sigma}{2\sqrt{\omega\mu}} \right)^2 + 1} \right]^2 \\ &= \beta \left[\frac{1}{2}U\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{2}U\alpha \right)^2 + 1} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La función de densidad de la distribución, que se denotará por $f_T(\cdot) \equiv f(\cdot)$, es obtenida al diferenciar (4.2) y está dada por

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \left(\frac{\partial}{\partial t} g(t; \alpha, \beta) \right) \phi(g(t; \alpha, \beta))$$

donde ϕ es la densidad de la distribución normal estándar.

Así

$$\begin{aligned} f_T(t; \alpha, \beta) &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \frac{t^{-1/2}}{\beta^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{\beta^{1/2}}{t^{3/2}} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\alpha^{-2} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)^2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha^2\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha^2 t^3}} \right] \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

para $t > 0$, y cero en otro caso. El soporte de la distribución es $[0, \infty)$ y tanto el parámetro α como β son positivos.

Ahora, para encontrar la función de confiabilidad y de riesgo de la distribución Birnbaum-Saunders, desarrollaremos la ecuación (4.2). Primero, sabemos que $\Phi(z)$ es la fda de la distribución normal estándar, entonces

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

y como ésta distribución es asimétrica respecto al origen

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

ahora, tomando la aproximación

$$\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)^k}{k!}.$$

Así

$$\begin{aligned} \int_0^z \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt &= \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)^k}{k!} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \int_0^z t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Bigg|_0^z \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k z^{2k+1}}{(2k+1)k!} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k z^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

Así

$$F(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{(2k+1)k!} \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)^{2k+1}$$

Ahora, la confiabilidad está dada por $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, entonces

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{(2k+1)k!} \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)^{2k+1}$$

y la función de riesgo es

$$h(t) = \frac{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha^2\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\alpha^2 t^3}} \right] \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{(2k+1)k!} \left(\alpha^{-1} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \right)^{2k+1}}$$

Propiedades Básicas

Sea T una variable aleatoria que se distribuye Birnbaum-Saunders con parámetros α y β . Birnbaum-Saunders probaron algunos resultados concernientes a esta distribución. El parámetro α controla la forma de la distribución. La distribución tiene un sesgo más positivo conforme crece el valor de α y se vuelve más simétrica, cuando α se aproxima a cero. El parámetro β es un parámetro de escala, también la mediana de la distribución.

El valor esperado de T usando (4.3), para $(T/\beta)^r$ es

$$E\left(\left[\frac{T}{\beta}\right]^r\right) = E\left(\left[\frac{\alpha}{2}U + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}U\right)^2 + 1}\right]^2\right),$$

además con el teorema del binomio $(a + b)^2 = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$ obtenemos

$$E\left(\left[\frac{T}{\beta}\right]^r\right) = \sum_{j=0}^{2r} \binom{2r}{j} E\left(\left\{\left[\frac{\alpha}{2}U\right]^2 + 1\right\}^{j/2} \left\{\frac{\alpha}{2}U\right\}^{2r-j}\right).$$

Si s es impar $E\left(\left[\left(\frac{\alpha}{2}U\right)^2 + 1\right]^t \left[\frac{\alpha}{2}U\right]^s\right) = 0$, entonces

$$E\left(\left[\frac{T}{\beta}\right]^r\right) = \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} E\left(\left[\left(\frac{\alpha}{2}U\right)^2 + 1\right]^j \left[\frac{\alpha}{2}U\right]^{2(r-j)}\right)$$

aplicando nuevamente el teorema del binomio, en j

$$\begin{aligned} E\left(\left[\frac{T}{\beta}\right]^r\right) &= \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} E\left(\sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \left[\left(\frac{\alpha}{2}U\right)\right]^{2s} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(r-j)} [U]^{2(r-j)}\right) \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} E\left[(U)^{2(r+s-j)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(r+s-j)}\right] \end{aligned}$$

$E\left(\left[\frac{T}{\beta}\right]^r\right)$ existe si y sólo si $E\left[(U)^{2(r+s-j)}\right]$ existe. De Leiva, Díaz (2002) obtenemos que la media y la varianza de la distribución, están dadas por

$$E(T) = \beta \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

y

$$V(T) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right)$$

respectivamente. Si $c > 0$, entonces cT tiene una distribución Birnbaum-Saunders con parámetro de forma α y escala $c\beta$. La variable aleatoria T^{-1} tiene una distribución Birnbaum-Saunders con parámetro de forma α y parámetro de escala β^{-1} con $E(T^{-1}) = \beta^{-1} (1 + \alpha^2/2)$.

Sea $h_T(t; \alpha, \beta)$ la función de riesgo de T va en aumento y luego decrece. Esta no decrece hasta cero, como la función de riesgo lognormal, pero en cambio decrece a una constante positiva. En efecto es fácil comprobar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha^2\beta}$$

Birnbaum-Saunders considera este comportamiento de la función de riesgo positivamente.

De modo sorprendente consideramos esta característica particular de la distribución como una virtud dado que va de acuerdo con los hechos observados. En los datos de fatiga, no siempre podemos asumir que la razón de falla será creciente.

¿Es la familia de distribuciones Birnbaum-Saunders una familia exponencial?

Existe una controversia en determinar si la familia de distribuciones Birnbaum-Saunders es de una familia exponencial, en McCarter (1999) dan el siguiente resultado.

Recordemos que la familia de densidades,

$$\{f(t; \theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k\}$$

se dice que es una familia exponencial con k parámetros si y sólo si cada densidad puede ser escrita por

$$f(t; \theta) = a(\theta)b(t) \exp \left(\sum_{j=1}^k c_j(\theta)d_j(t) \right) \quad (4.5)$$

donde $a(\theta)$ y $c_j(\theta)$, $j = 1, \dots, k$, son funciones de valor real del parámetro θ las cuales no dependen de la observación t y donde $b(t) > 0$ y $d_j(t)$, $j = 1, \dots, k$, son funciones de valor real de la variable t las cuales no dependen del parámetro θ . Denotando la densidad de la distribución de Birnbaum-Saunders con parámetro de forma α y parámetro de escala β por $F_T(t; \alpha, \beta)$. Entonces reescribiendo en (4.4) obtenemos

$$f_T(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha^2}} \left(\sqrt{\frac{1}{\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{t^3}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right) \right) \quad (4.6)$$

$$= \frac{\exp(1/\alpha^2)}{2\sqrt{2\pi\alpha^2\beta}} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\beta}{\sqrt{t^3}} \right) \exp \left(\left(-\frac{1}{2\alpha^2\beta} \right) t + \left(-\frac{\beta}{2\alpha^2} \right) \left(\frac{1}{t} \right) \right) \quad (4.7)$$

$$= \frac{\exp(\alpha^{-2})}{2\alpha\sqrt{(2\pi\beta)}} t^{-3/2} (t + \beta) \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} \right) \right\}. \quad (4.8)$$

Dado que β no puede ser factorizada del término $(1/\sqrt{t} + \beta/\sqrt{t})$ en (4.7), necesitamos factorizar en (4.5) no siendo esto posible bajo esta parametrización particular, y apareciendo que la familia no es una familia exponencial de dos parámetros. Si β es conocido y α es desconocido, entonces claramente de la factorización en (4.6) que la familia de distribución es una de una familia exponencial de un parámetro. No es una familia exponencial de un parámetro cuando α es conocido y β desconocido.

Estimación de Parámetros de la distribución de Birnbaum-Saunders

Birnbaum-Saunders (1969) propusieron el siguiente método para calcular los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros. El estimador de máxima verosimilitud de β es la única raíz positiva de

$$\hat{\beta}^2 - \hat{\beta} \left\{ 2H + K(\hat{\beta}) \right\} + H \left\{ \bar{T} + K(\hat{\beta}) \right\} = 0 \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{T} &= n^{-1} \sum_{j=1}^n T_j \\ H &= \left[n^{-1} \sum_{j=1}^n T_j^{-1} \right]^{-1} \\ K(\hat{\beta}) &= \left[n^{-1} \sum_{j=1}^n (\hat{\beta} + T_j)^{-1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Habiendo calculado $\hat{\beta}$, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\alpha}$ de α puede ser obtenido directamente de la fórmula

$$\hat{\alpha} = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\bar{T} \hat{\beta}^{-1} + H^{-1} \hat{\beta} \right) - 1 \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

como un valor inicial para usar en la solución iterativa de (4.9) la “media-media”

$$(\bar{T}H)^{1/2} = \left\{ \left(\sum_{i=1}^n T_i \right) \left(\sum_{i=1}^n T_i^{-1} \right)^{-1} \right\}^{1/2}$$

es sugerido. Esto además muestra que si

$$2\bar{T} < 3H + \min(T_1, T_2, \dots, T_n).$$

El método iterativo de Newton-Raphson convergerá a $\hat{\beta}$ para cualquier valor inicial entre \bar{T} y H . Si $2H > \bar{T}$ entonces la iteración calculada de

$$H + \frac{1}{2}K(\hat{\beta}) - \sqrt{\frac{1}{4} [K(\hat{\beta})]^2 - H(\bar{T} - H)}$$

convergerá a $\hat{\beta}$.

La “media-media” $(TH)^{1/2}$, referida anteriormente, tiene aproximadamente una varianza (para n grande)

$$n^{-1} \left[\frac{1}{8} \left(1 + \frac{3}{8}\alpha^2 \right) \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2 \right)^{-1} \beta^2 \alpha^2 \right]. \quad (4.11)$$

El valor esperado es aproximadamente

$$\beta \left[1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{8}\alpha^2 \right) \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2 \right)^{-1} \alpha^2 n^{-1} \right] \quad (4.12)$$

para $\alpha < \sqrt{2}$ se sugiere que $(TH)^{1/2}$ pueda ser usado en lugar del estimador de máxima verosimilitud de β .

Ahmad (1988) notó que mientras el estimador de “media-media” es asintóticamente insesgado tiene un sesgo positivo para muestras de tamaño finito, Él sugiere el siguiente estimador de Jacknife, basado en una muestra aleatoria T_1, T_2, \dots, T_n de tamaño $n = mg$ (siendo m y g enteros). Dividiendo la muestra en m grupos B_1, B_2, \dots, B_m de tamaño g cada uno, calculando

$$\beta_i^* = \frac{\sum_{(i)} T_j}{\sum_{(i)} T_j^{-1}}$$

donde $\sum_{(i)}$ denota la suma sobre todos los $j = 1, \dots, n$ excepto $j = i$ ($i = 1, \dots, m$).

El estimador de Jacknife es

$$\beta^* = m\beta_0^* - (1 - m^{-1}) \sum_{i=1}^m \beta_i^* \quad (4.13)$$

Donde

$$\beta_0^* = \left(\frac{\sum_{j=1}^n T_j}{n} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\sum_{j=1}^n T_j^{-1}}{n} \right)^{-1/2}.$$

Ahmad (1988) también demostró que β^* definida en 4.13 es un estimador consistente de β (como lo es también el estimador “media-media”).

Por otra parte una alternativa de aproximación basada en la idea de la ecuación del primer momento nos lleva al estimador. Dado que $\alpha^{-1} \left\{ (T/\beta)^{1/2} - (\beta/T)^{1/2} \right\}$ tiene una distribución normal.

$$E \left[\left(\frac{T}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{T} \right)^{1/2} \right] = 0$$

teniendo

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{T_i}{\beta} \right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{T_i} \right)^{1/2} \right] = 0$$

obtenemos el estimador

$$\beta' = \frac{\sum_{i=1}^n T_i^{1/2}}{\sum_{i=1}^n T_i^{-1/2}}$$

correspondiendo a cualquier estimador β_e y susstituyendo en (4.10) obtenemos

$$\alpha_e = \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\beta_e^{-1} \sum_{i=1}^n T_i + \beta_e \sum_{i=1}^n T_i^{-1} \right) - 2 \right\}^{1/2}. \quad (4.14)$$

Además, teniendo el valor de β , el estadístico obtenido reemplazando β_e por β en la ecuación anterior nos da el estimador de máxima verosimilitud de α , distribuyendose como $\alpha \chi_n / \sqrt{n}$.

Comparando (4.14) y reparametrizando $\mu = \beta$ y $\lambda = \beta\alpha^{-2}$ se observa que existe una clara relación entre las distribuciones Birnbaum-Saunders y la inversa Gaussiana. Note que (4.8) es una mezcla (con igual peso) de la Inversa Gaussiana $IG(\beta, \beta\alpha^{-2})$ y el recíproco $IG(\beta, \beta^{-1}\alpha^2)$.

Engelhardt, Bain, y Wright (1981) señalaron que la *fdp* dada en (4.14) satisfacen las condiciones de regularidad que aseguran que los estimadores de máxima verosimilitud $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de (α, β) tienen una distribución normal bivariada conjunta con media (α, β) , y matriz de varianza-covarianza

$$nB_{ij}(\alpha, \beta)^{-1} \quad i, j = 1, 2$$

donde

$$\begin{aligned} B_{11}(\alpha, \beta) &= 2\alpha^{-1} & (4.15) \\ B_{12}(\alpha, \beta) &= B_{21}(\alpha, \beta) = 0 \\ B_{22}(\alpha, \beta) &= \beta^{-2} \left\{ \frac{1}{4} + \alpha^{-2} + I(\alpha) \right\} \end{aligned}$$

siendo

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \left[\{1 + \xi^{-1}(\alpha z)\}^{-1} - \frac{1}{2} \right]^2 \phi(z) dz, \quad \phi(z) = \Phi'(z).$$

Donde, $\xi(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}$. Engelhardt (1981) utilizaron este resultado para construir un procedimiento para inferencias en muestras grandes sobre α y β . La variable $\sqrt{n}(\hat{\alpha}\alpha^{-1} - 1)$ es aproximadamente un estadístico pivote, teniendo un distribución libre, como también lo es $n^{1/2}(\hat{\beta}\beta^{-1} - 1) \left\{ \frac{1}{4} + \hat{\alpha}^{-2} - I(\hat{\alpha}) \right\}^{-1/2}$ por lo

tanto el intervalo de confianza al $100(1 - \epsilon)\%$ es

$$\left(\hat{\alpha} \left\{ 1 + (2n)^{-1/2} u_{1-\frac{1}{2}} \right\}, \hat{\alpha} \left\{ 1 + (2n)^{-1/2} u_{\frac{1}{2}} \right\} \right)$$

para α y

$$\left(\hat{\beta} \left[1 + n^{-1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} + \hat{\alpha}^{-2} - I(\hat{\alpha}) \right)^{-1/2} u_{1-1/2} \right\} \right]^{-1}, \right. \\ \left. \hat{\beta} \left[1 + n^{-1/2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{4} + \hat{\alpha}^{-2} - I(\hat{\alpha}) \right)^{-1/2} u_{1/2} \right\} \right]^{-1} \right)$$

para β .

Por otra parte Achcar (1993) desarrolló una estimación Bayesiana, basada en dos distribuciones conjuntas previas “noinformativas” para α y β .

Distribución Seno Hiperbólico-Normal

En esta sección se considera el modelo log-lineal para la distribución de Birnbaum-Saunders. Tal modelo puede ser de uso en aplicaciones a materiales sujetos a diferentes patrones de ciclos de estrés. Frecuentemente, existe el interés en predecir la vida del material que se encuentra en fatiga a niveles bajos de estrés. Pero conducir pruebas a niveles bajos de estrés, nos llevan a consumir mucho tiempo, sin embargo para evitar este problema, se pueden hacer pruebas a niveles altos de estrés y luego los tiempo de falla a niveles bajos de estrés son estimados dadas las características (empíricas) de las propiedades del material. Este tipo de prueba es conocido como “Pruebas de Vida Acelerada.”

Suponga que se tiene cierto metal sujeto a ciclos de carga, denotada por S rango de estrés por ciclo o E rango de fuerza por ciclo ; o W_c trabajo por ciclo, y

sea N el número de ciclos a la falla del espécimen. Algunas leyes empíricas que han sido probadas como útiles son de la forma

$$\log(N) = a + bx \quad (4.16)$$

donde x puede ser S , E , $\log(S)$, o $\log(E)$, o $\log(W_c)$ según la American Society for Testing Materials (1981), la elección de x depende del material y de las condiciones de prueba.

La ecuación (4.16) se basa en las siguientes suposiciones

1. El número de ciclos a la falla tiene una distribución Birnbaum-Saunders y N en (4.16) representa la mediana de la distribución.
2. El parámetro de forma α es independiente del trabajo por ciclo.

Por otra parte si T se distribuye como (4.8), y además si $c > 0$ entonces cT tiene una distribución Birnbaum-Saunders con mediana $c\beta$ y cumpliendo las suposiciones anteriores, tenemos que la ecuación (4.16) puede ser representada de la siguiente forma

$$N = e^{a+bx} \delta \quad (4.17)$$

donde δ se distribuye Birnbaum-Saunders con parámetro de forma α y escala igual a 1. En (4.17) N es una nueva variable aleatoria, tomando logaritmo obtenemos

$$\log(N) = a + bx + \log(\delta) \quad (4.18)$$

El modelo anterior es un modelo log-lineal. Note que el ruido aleatorio es ahora aditivo.

El siguiente teorema muestra la relación de la distribución Birnbaum-Saunders con la Distribución Seno Hiperbólica Normal.

Teorema 4.1. *Sea T una variable aleatoria con distribución de Birnbaum-Saunders, con parámetro de forma α y parámetro de escala β , entonces la distribución de $Y = \log(T)$ es una distribución *senh* – normal con parámetros de forma, de localización y de escala dados por α , $\gamma = \log(\beta)$, y $\sigma = 2$, respectivamente.*

Si T es distribuida como en (4.8) y $Y = \log T$ (i.e. $T = e^Y$), entonces

$$\alpha^{-1} (\beta^{-1/2} e^{Y/2} - \beta^{1/2} e^{-Y/2}) = 2\alpha^{-1} \sinh \left\{ \frac{1}{2}(Y - \gamma) \right\}$$

donde $\gamma = \log \beta$ tien una distribución normal unitaria. Este es un caso especial ($\sigma = 2$) de la distribución *senh* – normal denotada por $SN(\alpha, \gamma, \sigma)$, Rieck y Nedelman (1991) analizaron la distribución de Z si

$$2\alpha^{-1} \sinh \{(Z - \gamma)/\sigma\} \tag{4.19}$$

tiene una distribución normal unitaria. La *fdp* de Z es

$$p_Z(z) = 2 \left(\alpha \sigma \sqrt{2\pi} \right)^{-1} \cosh \left\{ \frac{z - \gamma}{\sigma} \right\} \exp \left[-2\alpha^{-2} \sinh^2 \left\{ \frac{z - \gamma}{\sigma} \right\} \right]. \tag{4.20}$$

Esta distribución tiene algunas propiedades interesante:

1. La distribución es simétrica en el parámetro de localización γ
2. La distribución es estrictamente unimodal para $\alpha \leq 2$ y bimodal para $\alpha > 2$
3. La media y la varianza están dadas por $E(Z) = \gamma$ y $var(Z) = \sigma^2 \omega(\alpha)$, donde $\omega(\alpha)$ es la varianza cuando $\sigma = 1$. No hay una expresión en forma cerrada para $\omega(\alpha)$ pero Rieck (1989) probó una aproximación asintótica para valores pequeños y grandes de α

4. Si $Z_\alpha \sim SN(\alpha, \gamma, \sigma)$, entonces $S_\alpha = (Z - \gamma)/(.5\alpha\sigma)$ converge en distribución a la distribución normal estándar como α se aproxima a 0.

Una generalización de los modelos (4.16) y (4.18) nos permite analizar una gran cantidad de variables.

Sea T_1, T_2, \dots, T_n variables aleatorias independientes para las cuales, cada T_i se distribuye Birnbaum-Saunders con parámetro de forma α_i y escala β_i . En la distribución de T_i se asume que depende de un conjunto de p variables explicativas denotadas por $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$, como sigue:

1. $\beta_i = \exp(x_i'\theta)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, donde $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ es un vector de parámetros desconocidos, que serán estimados.
2. El parámetro de forma es independiente del vector x_i ; esto es, $\alpha_i = \alpha$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Birnbaum-Saunders (1969b) mostró que si $c > 0$, entonces cT_i tiene una distribución de Birnbaum-Saunders con parámetro de forma α y escala $c\beta_i$. Usando este hecho y las suposiciones anteriores, podemos expresar a $T_i = \exp(x_i'\theta)\delta_i$, δ_i se distribuye Birnbaum-Saunders con α como parámetro de forma y la escala igual a

1. Si representamos a $Y_i = \log(T_i)$, tendremos entonces $Y_i = x_i'\theta + \log(\delta_i)$ dando un modelo Log-Lineal para la distribución de Birnbaum-Saunders en el cual $\log(\delta_i)$ es el error del modelo. Al usar el teorema 4.1 se observa que el término error se distribuye $SN(\alpha, 0, 2)$. Rieck y Nedelman (1991) desarrollaron los estimadores de máxima verosimilitud y mínimos cuadrados para el modelo

$$Y_i = x_i'\theta + \log(\delta_i) \quad (4.21)$$

obteniendo

$$\hat{\alpha}^2 = \left(\frac{4}{n}\right) \sum_{i=1}^n \sinh^2 \left[\frac{Y_i - x_i' \hat{\theta}}{2} \right]. \quad (4.22)$$

y $\hat{\theta}$ como el estimador de máxima verosimilitud de θ . El análisis detallado de los estimadores anteriores, se presentarán en el Modelo 1 del capítulo 4.

MODELACIÓN DE VIDA ACELERADA

En este capítulo presentamos el uso de la distribución Birnbaum-Saunders a una prueba de vida acelerada.

En general en el marco paramétrico los datos son usualmente modelados de la siguiente manera: (i) Adoptar una función de riesgo base (*base-line*) para modelar los datos. (ii) Sustituir para una distribución de parámetros θ , en un modelo de aceleración $g(\cdot)$ que depende de los niveles de estrés en aceleración (y otros parámetros). (iii) Obtener estimaciones de los parámetros desconocidos en elevados niveles de estrés y luego usar estas estimaciones para hacer inferencias acerca del valor de los mismos, en uso de condiciones normales.

Un modelo de aceleración, el cual ya fue usado con anterioridad, es el modelo de potencia inversa, presentado de la siguiente forma

$$g(V) = \gamma V^{-\eta} \quad (5.1)$$

donde la variable de aceleración $V > 0$ es un nivel de estrés asociado a las causas que ocasionan la falla. $\gamma > 0$ y $\eta > 0$ son parámetros desconocidos. El modelo (5.1) será usado como base para el análisis de los datos de la muestra 1, muestra 2 y muestra 3.

Ajustando el modelo con la distribución de Birnbaum-Saunders a cada una de las muestras en los tres niveles de estrés es posible, pero también pueden ser

analizadas usando un modelo de PVA con la distribución Birnbaum-Saunders dada en (4.2) y el modelo potencia inversa (5.1), la pregunta es entonces, como debe ser usado el modelo de aceleración, dado que la media de (4.2) es una función de α y β , un simple reemplazo de la media por el modelo de aceleración (como en el capítulo 2, en el cual se utilizó una distribución exponencial) no es muy fácil. Además, en este capítulo mostramos tres modelos, pero solo resultados en el primero y tercero. El primero muestra el trabajo hecho por Rieck y Nedelman (1991) en el cual se sustituye (5.1) en el parámetro β , el segundo analiza el trabajo presentado por Durham y Padget (1997) el cual, no desarrolla un verdadero modelo de PVA, si no más bien, hace una reparametrización de (5.1) y el tercero muestra una sustitución sobre la reparametrización en el segundo modelo.

Modelación con Distribución Birnbaum-Saunders

Modelo 1

Este modelo desarrolla un modelo de vida acelerada usando la sustitución en el parámetro β en (4.2) y basandonos en los resultados del teorema 4.1. Esto da una distribución de la forma

$$F_1(t, V) = \phi \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{t}{\gamma V^{-n}} \right)^{1/2} - \left(\frac{\gamma V^{-n}}{t} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (5.2)$$

$$t > 0, \alpha > 0, \gamma > 0, \eta > 0.$$

En Rieck y Nedelman (1991) se investiga un modelo muy similar a este, dado que β es el parámetro de escala, la variable aleatoria $T \sim BS(\alpha, \beta)$ puede ser

escrita como $T = \beta X$, siendo $X \sim BS(\alpha, 1)$. Si β es reemplazado por un modelo de aceleración, entonces $T = g(V)X$. El modelo de aceleración que sugieren Rieck y Nedelman es $g(V) = \exp[a + bV]$, así que después de tomar el logaritmo natural obtenemos

$$\log T = a + bV + \log X$$

siendo un modelo log-lineal. La estimación de a y b puede ser obtenida por mínimos cuadrados y α solamente puede ser estimada usando máxima verosimilitud. El error dado por $\log X$ tiene una distribución seno-hiperbólico y las propiedades de esta distribución se dieron en el capítulo 3. Por otra parte, tomando $g(V) = \gamma V^{-\eta}$ y aplicando logaritmo a $T = g(V)X$ tenemos

$$\log T_i = \log \gamma - \eta \log V + \log X_i.$$

denotando $Y_i = \log T$, $\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\theta} = \log \gamma - \eta \log V$ y $\xi_i = \log X_i$.

$$Y_i = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\theta} + \xi_i. \quad (5.3)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$ se encuentran resolviendo

$$\log(L) = \sum_i \log(W_i) - \sum_i Z_i^2/2 + K,$$

donde

$$W_i = (2/\alpha) \cosh[(y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\theta})/2] \quad (5.4)$$

y

$$Z_i = (2/\alpha) \sinh[(y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\theta})/2] \quad (5.5)$$

Derivando $\log(L)$ respecto a θ'_j y α , (i.e. γ, η, α), obtenemos las ecuaciones de verosimilitud

$$\begin{aligned}\partial \log(L)/\partial \theta_i &= \left(\frac{1}{2}\right) \sum_i x_{ij} \{Z_i W_i - Z_i/W_i\} \\ &= 0 \text{ para } j = 1, \dots, p\end{aligned}\quad (5.6)$$

$$\partial \log(L)/\partial \alpha = -n/\alpha + (1/\alpha) \sum_i Z_i^2 = 0 \quad (5.7)$$

una expresión para el estimador de máxima verosimilitud de α^2 en términos de los estimadores de máxima verosimilitud de θ , se puede encontrar resolviendo (5.7)

$$\hat{\alpha}^2 = \left(\frac{4}{n}\right) \sum_i \sinh^2 \left[\frac{Y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\theta}}{2} \right].$$

Para estimar θ de (5.3), usamos una estimación de mínimos cuadrados dada por

$$\tilde{\theta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (5.8)$$

donde \mathbf{Y} es un vector columna de y_i 's y \mathbf{X} la matriz del sistema. La matriz de covarianzas de $\tilde{\theta}$ está definida por

$$\text{cov}(\tilde{\theta}) = 4w(\alpha)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

un estimador insesgado de $w(\alpha)$ es

$$\tilde{w}(\alpha) = \sum_i (y_i - \mathbf{x}'_i \tilde{\theta})^2 / [4(n-p)].$$

Otra forma de estimar θ es por medio del método de Newton-Raphson o el Método de Fisher, siendo éste último un procedimiento iterativo de mínimos cuadrados para calcular los estimadores de máxima verosimilitud, cuya fórmula es

$$\boldsymbol{\eta}^{(m)} = \boldsymbol{\eta}^{(m-1)} + [I(\boldsymbol{\eta}^{(m-1)})]^{-1} \mathbf{U}^{(m-1)}$$

donde $\boldsymbol{\eta}^{(m)'} = (\boldsymbol{\theta}^{(m)'}, \alpha^{(m)})$ es el vector de parámetros estimados en la m -ésima iteración, $I(\boldsymbol{\eta}^{(m-1)})$ es la matriz de información evaluada en $\boldsymbol{\eta}^{(m-1)}$ y $\mathbf{U}^{(m-1)}$ es el vector de las primeras derivadas de la función de log-verosimilitud evaluada en $\boldsymbol{\eta}^{(m-1)}$. Sustituyendo en valores apropiados, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}^{(m)} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}^* \quad (5.9)$$

y

$$\alpha^{(m)} = [\alpha^{(m-1)}/2] \left\{ 1 + \sum_i Z_i^2/n \right\}, \quad (5.10)$$

siendo $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}^{(m-1)} + [2/C(\alpha^{(m-1)})]\mathbf{R}$ y \mathbf{R} es un vector columna con la i -ésima componente dada por $[Z_i W_i - (Z_i/W_i)]$ siendo W_i , Z_i las ecuaciones (5.4) y (5.5) respectivamente, evaluadas en $(\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}, \alpha^{(m-1)})$.

El sistema de ecuaciones dado en (5.9) tiene la misma forma que las ecuaciones normales de mínimos cuadrados excepto que estas ecuaciones tienen que ser resueltas en forma iterativa, dado que \mathbf{Y}^* depende de los parámetros.

El algoritmo con el cual se estiman los parámetros es el siguiente

1. Encuentre $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ usando mínimos cuadrados ordinarios de (5.8). Encuentre $\alpha^{(0)}$ de $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ usando la raíz cuadrada de la solución de (5.8)
2. $m - 1 = 0$
3. Calcule \mathbf{R} y luego \mathbf{Y}^* usando $\alpha^{(m-1)}$ y $\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}$.
4. Calcule $\boldsymbol{\theta}^{(m)}$ usando mínimos cuadrados ordinarios con \mathbf{X} y \mathbf{Y}^* . Calcule $\alpha^{(m)}$ de (5.10) usando $\boldsymbol{\theta}^{(m-1)}$ y $\alpha^{(m-1)}$ en Z_i .

5. Sí $|\boldsymbol{\theta}^{(m)} - \boldsymbol{\theta}^{(m-1)}|$ y $|\alpha^{(m)} - \alpha^{(m-1)}|$ son suficientemente pequeños, entonces pasar al paso 7
6. Agregar 1 a $(m - 1)$ y pasar al paso 3.
7. Parar y usar $\boldsymbol{\eta}^{(m)'} = (\boldsymbol{\theta}^{(m)'}, \alpha^{(m)})$ como un estimador de máxima verosimilitud.

La estimación de percentiles es importante y además muchas veces es mas necesario el valor de un percentil pequeño. Denotando a $t_p(V)$ como el percentil $p\%$, para (5.2) y un p específico, tenemos

$$t_p(V) = \frac{\gamma}{4V_n} \left[\alpha z_p + \sqrt{\alpha^2 z_p^2 + 4} \right]^2 \quad (5.11)$$

siendo $z_p = \Phi^{-1}(p)$, el $100\%p$ de la distribución normal estándar y el estimador de máxima verosimilitud de (5.11) puede ser obtenido por sustitución de los estimadores de máxima verosimilitud de α, γ, η . Las bandas de confianza en (5.11) pueden ser calculadas usando la distribución asintótica de $\hat{t}_p(V)$ usando el teorema de Delta Cramer y la distribución multivariada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\xi}, \hat{\gamma}, \hat{\eta})^T$. Así mismo la derivación de la matriz de información de Fisher para el modelo (5.2) será necesaria. Siguiendo con los fundamentos del modelo 1, podemos comprender que para valores grandes de m la distribución aproximada de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ puede estar basada en la teoría de normalidad asintótica para estimadores de máxima verosimilitud, dado que las condiciones de regularidad existen, como m tiende a infinito ($n_i/m \rightarrow p_i > 0$) para todo $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos que $[I_m(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})]^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow \mathbf{Z}$, donde \mathbf{Z} es una distribución normal trivariada con vector de media cero y matriz de covarianza $I_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$ es la matriz de de información de Fisher para (5.2) basada en m observaciones.

Dado $I_m(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})$, entonces la distribución asintótica para $t_p(\hat{V})$ en función de

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es por medio de el método de delta cramer

$$[I_m(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})]^{1/2} [t_p(\hat{V}) - t_p(V)] \rightarrow [\nabla t_p(V)]^T \mathbf{Z}$$

$\nabla t_p(V) \equiv$ el vector gradiente para $t_p(V)$, desde luego que las derivadas parciales son obtenidas en términos de los elementos de $\boldsymbol{\theta}$. Para obtener $I_m(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})$ necesitamos el valor esperado de las 6 derivadas siguientes

$$\begin{aligned} E\left(\frac{-\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \alpha^2}\right), & \quad E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \alpha \partial \gamma}\right), & \quad E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \alpha \partial \eta}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \gamma^2}\right), & \quad E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \gamma \partial \eta}\right), & \quad E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \eta^2}\right) \end{aligned}$$

Obteniendo las siguientes formulaciones

$$E\left(\frac{-\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \alpha^2}\right) = \frac{2m}{\alpha^2}, \quad (5.12)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \alpha \partial \gamma}\right) = E\left(-\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \alpha \partial \eta}\right) = 0, \quad (5.13)$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \gamma^2}\right) \cong \frac{m}{\gamma^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4}\right), \quad (5.14)$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \gamma \partial \eta}\right) \cong -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^k n_i \log V_i, \quad (5.15)$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \eta^2}\right) \cong \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4}\right) \sum_{i=1}^k n_i (\log V_i)^2. \quad (5.16)$$

Usando estas expresiones en $I_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$, la varianza asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud de α , γ , η son encontrados en los elementos de la diagonal de $I_m^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$, así mismo, estas varianzas pueden ser usadas para aproximar intervalos de confianza para los parámetros.

Modelo 2

El desarrollo de este modelo fue dado por Durham (1997) , aquí la carga no es cíclica y un tamaño de efecto es incorporado al modelo

Suponga que un sistema es puesto bajo cargas de tensión que esta incrementandose hasta que falla. Asumiendo que:

- El incremento de carga es en forma discreta en cantidades pequeñas.
- Cada incremento de estrés causa una cantidad aleatoria de daño D (variable aleatoria no negativa) con función de distribución F_D .
- El sistema tiene una resistencia fija teórica denotada por Ψ , pero la resistencia inicial del sistema es una cantidad aleatoria que es la reducción de la resistencia del sistema teórica por una cantidad del daño inicial. Esta cantidad de daño inicial es en cierta forma algo inherente en el sistema y esta representado por la variable aleatoria X_0 . Por lo tanto la variable $W = \Psi - X_0$ es una reducción aleatoria de la resistencia teórica.

El daño acumulado del sistema después de $n + 1$ incrementos de estrés de tensión, esta denotado por

$$X_{n+1} = X_n + D_n \quad (5.17)$$

en el supuesto de un daño aditivo. Aquí, los D_n son independientes e idénticamente distribuidos segun su distribución F_D . El N denota el número de incrementos de estrés aplicados al sistema hasta que este falle.

$$N = \sup_n \{n : X_1 - X_0 \leq \Psi - X_0, \dots, X_{n-1} - X_0 \leq \Psi - X_0\},$$

$P(N > n | \Psi - X_0 = w) = P(X_n - X_0 \leq w) = F_n(w)$, dado que $\{X_n\}$ es una secuencia de terminos no decreciente. La probabilidad de sobrevivencia después de n incrementos es entonces

$$P(N > n) = \int_0^{\infty} F_n(w) dG_W(w)$$

donde $G_w(w)$ es la función de distribución para la resistencia inicial W . Para valores grandes de n , Durham (1997) demostró que $F_n(w)$ es aproximadamente una distribución normal, iniciando en (5.17), se tiene que la cantidad de daño acumulado al estado n , es simplemente $\sum_{i=0}^{n-1} D_i = X_n - X_0$ y debido a que D 's son i.i.d. y con n grande tenemos que $X_n - X_0$ sera aproximadamente normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$, donde $E(D) = \mu$ y la $Var(D) = \sigma^2$. Asi que la aproximación a la función de sobrevivencia después de n incrementos de estrés esta dado por

$$P(N > n) \cong \int_0^{\infty} \Phi \left[\frac{(w - n\mu)}{(\sigma\sqrt{n})} \right] dG_W(w) \quad (5.18)$$

La distribución $G_W(w)$ propuesta para el modelo de resistencia inicial del sistema de tamaño L , es una distribución Weibull de tres parámetros, los cuales estan dados por

$$G_W(w) = 1 - \exp \left\{ -L \left[\frac{(w - w_0)}{\delta} \right]^\rho \right\}, \quad w > w_0, \delta > 0, \rho > 0.$$

sustituyendo ésta ecuación en (5.18) y después haciendo un cambio de variable y una aproximación a la integral, Durham obtuvo la forma

$$P(N > n) = \Phi \left\{ \frac{\delta \left[\Gamma \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right]}{(\sqrt{n}\sigma L^{1/\rho}) - \sqrt{n}\mu/\sigma} \right\}.$$

Tomando T como una valor continuo de N (i.e. T es el estrés de N incre-

mentos), La distribución de la resistencia para el sistema de tamaño L es

$$F_2(t; L) = P(T \leq t) \cong \Phi \left\{ \frac{\sqrt{t}}{\nu} - \frac{\gamma L^{-\eta}}{\sqrt{t}} \right\} \quad (5.19)$$

donde $\nu = \mu/\sigma$, $\gamma = \delta[\Gamma(1 + 1/\rho)]/\sigma$, $\eta = 1/\rho$. Esto es lo referente al modelo 2.

Observe que (5.19) representa la forma del modelo potencia inversa (con L covariable) de una reparametrización de la distribución de Birnbaum-Saunders dada en (4.2). Note que (4.2) puede ser reparametrizada como

$$F(t) = \Phi \left\{ \frac{\sqrt{t}}{\nu} - \frac{\xi}{\sqrt{t}} \right\}, \quad t > 0, \quad (5.20)$$

siendo $\nu = \alpha\sqrt{\beta}$ y $\xi = \sqrt{\beta}/\alpha$. Cuando la distribución esta parametrizada en este sentido, la variable aleatoria T se distribuye (5.20), teniendo $E(T) = \nu^2(\xi/\nu + 1/2)$, $E(T^{-1}) = (\xi/\nu + 1/2)\xi^2$ y $Var(T) = \nu^4(\xi/\nu + 5/4)$. La ecuación (5.19) representa el modelo de aceleración potencia inversa de (5.20) tomando $\xi = \gamma L^{-\eta}$, donde L es la variable de aceleración.

Modelo 3

Otra forma de modelo de aceleración potencia inversa de la distribución de Birnbaum-Saunders puede ser desarrollada con una reparametrización de (5.20) tomando $\nu = \gamma V^{-\eta}$ el nuevo modelo de PVA es

$$F_3(t; V) = \Phi \left\{ \frac{\sqrt{t}}{(\gamma V^{-\eta})} - \frac{\xi}{\sqrt{t}} \right\} \quad t > 0, \quad (5.21)$$

el cual es un modelo diferente al (5.19). Note que usando la media y la varianza de (5.20), el modelo (5.19) da $E(T) \approx \nu^2/2 > 0$ y $Var(T) \approx 5\nu^2/4 > 0$ para valores

grandes la variable de aceleración L , mientras que el modelo (5.21) nos da $E(T) \rightarrow 0$ y $Var(T) \rightarrow 0$ cuando V es grande.

Para ajustar el modelo (5.21), los parámetros deben ser estimados de los datos experimentales observados a niveles altos de estrés. Aquí los k diferentes niveles de estrés están denotados por V_1, V_2, \dots, V_k . En cada nivel de estrés V_i las pruebas son realizadas para n_i componentes en pruebas de ciclos de falla, resultando fallas por fatiga al t_{ij} ciclo, $j = 1, 2, \dots, n_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$ y $k \geq 2$.

Dado que la distribución de Birnbaum-Saunders no tiene una forma exponencial, no hay estadísticos suficientes para los parámetros en (5.21). Para una rápida estimación de los parámetros, arreglamos los datos en forma creciente y usamos una estimación de forma empírica de $F(t, V_i)$ de las n_i observaciones al nivel de estrés V_i para cada $i = 1, 2, \dots, k$. Esto es, un conjunto de

$$\Phi^{-1} \left[\frac{j - 0.5}{n_i} \right] = \frac{\sqrt{t_{ij}}}{\gamma V^{-\eta}} - \frac{\xi}{\sqrt{t_{ij}}} \quad (5.22)$$

y la estimación de los parámetros usando una rutina de regresión no lineal (No hay una representación log-lineal como en el modelo 1). Este procedimiento tiene la habilidad de producir estimaciones confiables, pero es necesario que la n_i sea considerable para cada i así que la *fda* empírica puede ser aproximada adecuadamente a la verdadera *fda*. No obstante estas estimaciones pueden todavía ser usadas como valores iniciales en la rutina de máxima verosimilitud, cuya descripción es

La función de densidad para el modelo (5.21) esta dado por

$$f_3(t, V) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{t + \xi\gamma V^{-\eta}}{\gamma V^{-\eta} t^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(t - \xi\gamma V^{-\eta})^2}{2\gamma^2 V^{-2\eta} t} \right\}, \quad t > 0, \quad (5.23)$$

Teniendo como función de verosimilitud

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}) &= \log \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} f_3(t_{ij}; V_j) \right) \\
&= k_1 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log(t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta}) - m \log \gamma \\
&\quad + \eta \sum_{i=1}^k n_i \log V_i + k_2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta})^2}{2\gamma^2 V_i^{-2\eta} t} \tag{5.24}
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\theta} = (\xi, \gamma, \eta)^T$, $m = \sum_{i=1}^k n_i$ y k_1, k_2 son constantes que no dependen de los parámetros. Los estimadores de máxima verosimilitud son aquellos valores que maximizan la ecuación (5.24) y dado que las ecuaciones son no lineales, es mejor maximizar (5.24) por medio del gradiente conjugado o preferentemente un método de métrica variable (quasi-Newton) el cual solo requiere del vector de derivadas parciales de (5.24). Dado que $l(\boldsymbol{\theta})$ es una función suave, cualquiera de los dos métodos seleccionados nos asegura una convergencia cuadrática.

El vector de gradiente $\Delta l(\boldsymbol{\theta})$ tiene como componentes a

$$\frac{\partial}{\partial \xi} l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma V_i^{-\eta}}{t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta}} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{V_i^{-\eta}} - \xi \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{t_{ij}} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \gamma} l(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\xi V_i^{-\eta}}{t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta}} - \frac{m}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^3} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta})^2}{V_i^{-2\eta} t_{ij}} \\
&\quad + \frac{\xi}{\gamma^2} \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{V_i^{-\eta}} - \frac{\xi^2}{\gamma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{t_{ij}} \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta} l(\boldsymbol{\theta}) &= -\xi \gamma \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(\log V_i) V_i^{-\eta}}{t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta}} + \sum_{i=1}^k n_i \log V_i \\
&\quad - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^k \frac{\log V_i}{V_i^{-2\eta}} \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Teniendo en mente que una técnica iterativa se necesita para encontrar el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, los valores iniciales para cada uno de los parámetros serán necesarios. La

técnica de regresión dada en (5.22) puede ser usado para esto.

La estimación de percentiles es importante y además muchas veces es más necesario el valor de un percentil pequeño. Denotando a $t_p(V)$ como el percentil $p\%$, para (5.21) y un p específico, tenemos

$$t_p(V) = \frac{\gamma^2 V^{-2\eta}}{4} \left[z_p + \sqrt{z_p^2 + \frac{4\xi}{(\gamma V^{-\eta})}} \right]^2 \quad (5.28)$$

siendo $z_p = \Phi^{-1}(p)$, el 100% p de la distribución normal estándar y el estimador de máxima verosimilitud de (5.28) puede ser obtenido por sustitución de los estimadores de máxima verosimilitud de ξ, γ, η . Las bandas de confianza en (5.28) pueden ser calculadas usando la distribución asintótica de $\hat{t}_p(V)$ usando el teorema de Delta Cramer y la distribución multivariada de $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\xi}, \hat{\gamma}, \hat{\eta})^T$. Así mismo la derivación de la matriz de información de Fisher para el modelo (5.21) será necesaria. Siguiendo con los fundamentos del modelo 3, podemos comprender que para valores grandes de m la distribución aproximada de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ puede estar basada en la teoría de normalidad asintótica para estimadores de máxima verosimilitud, dado que las condiciones de regularidad existen, como m tiende a infinito ($n_i/m \rightarrow p_i > 0$) para todo $i = 1, 2, \dots, k$, tenemos que $[I_m(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})]^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow \mathbf{Z}$, donde \mathbf{Z} es una distribución normal trivariada con vector de media cero y matriz de covarianza $I_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$ es la matriz de de información de Fisher para (5.21) basada en m observaciones. los términos de $I_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$ no se pueden encontrar explícitamente, debido a lo intratable de las integrales, pero pueden ser aproximadas usando el método de Laplace, en donde la matriz de información para el modelo 2 es aproximada. Para mostrar el

procedimiento de obtención de $E(-\partial^2 \mathbf{l} / \partial \xi \partial \gamma)$, siendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \xi \partial \gamma} &= \sum_{i=1}^k V_i^{-\eta} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta}} \\ &\quad - \xi \gamma \sum_{i=1}^k V_i^{-2\eta} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{(t_{ij} + \xi \gamma V_i^{-\eta})^2} - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{V_i^{-\eta}} \end{aligned}$$

la segunda derivada de $\mathbf{l}(\boldsymbol{\theta})$, con $E[1/(T + \xi \gamma V^{-\eta})]$ y $E[1/(T + \xi \gamma V^{-\eta})^2]$ cuyas aproximaciones son $1/(2\xi \gamma V^{-\eta})$ y $1/(4\xi^2 \gamma^2 V^{-2\eta})$ respectivamente. Teniendo las entradas de $I_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$

$$E\left(\frac{-\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \xi^2}\right) \cong \frac{3m}{4\xi^2} + \frac{1}{\gamma \xi} \sum_{i=1}^k n_i V_i^\eta, \quad (5.29)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \xi \partial \gamma}\right) \cong -\frac{m}{4\xi \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \sum_{i=1}^k n_i V_i^\eta, \quad (5.30)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \xi \partial \eta}\right) \cong \frac{1}{4\xi} \sum_{i=1}^k n_i \log V_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^k n_i V_i^\eta \log V_i, \quad (5.31)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \gamma^2}\right) \cong \frac{3m}{4\gamma^2} + \frac{\xi}{\gamma^3} \sum_{i=1}^k n_i V_i^\eta, \quad (5.32)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \gamma \partial \eta}\right) \cong -\frac{3}{4\gamma} \sum_{i=1}^k n_i \log V_i - \frac{\xi}{\gamma^2} \sum_{i=1}^k n_i V_i^\eta \log V_i, \quad (5.33)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \eta^2}\right) \cong -\frac{3}{4} \sum_{i=1}^k n_i (\log V_i)^2 - \frac{2\xi}{\gamma} \sum_{i=1}^k n_i V_i^\eta (\log V_i)^2. \quad (5.34)$$

Usando las expresiones anteriores para $I_m(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})$, la varianza asintótica aproximada de los estimadores de máxima verosimilitud pueden ser encontrados de los elementos de la diagonal de $I_m^{-1}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{V})$, así mismo, estas varianzas pueden ser usadas para aproximar intervalos de confianza para los parámetros.

Estimación en datos de fatiga

Los datos de la muestra 1, muestra 2 y muestra 3 representan los resultados de una prueba de vida acelerada aplicada en 3 niveles de estrés $V_1 = 2.1$, $V_2 = 2.6$ y $V_3 = 3.1$

Muestra 1

101 observaciones, máximo estrés por ciclo $2.1 \times 10^4 psi$								
3.70,	7.06,	7.06,	7.46,	7.85,	7.97,	8.44,	8.55,	8.58,
8.86,	8.86,	9.30,	9.60,	9.88,	9.90,	10.00,	10.10,	10.16,
10.18,	10.20,	10.55,	10.85,	11.02,	11.02,	11.08,	11.15,	11.20,
11.34,	11.40,	11.99,	12.00,	12.00,	12.03,	12.22,	12.35,	12.38,
12.52,	12.58,	12.62,	12.69,	12.70,	12.90,	12.93,	13.00,	13.10,
13.13,	13.15,	13.30,	13.55,	13.90,	14.16,	14.19,	14.20,	4.20,
14.50,	14.52,	14.75,	14.78,	14.81,	14.85,	15.02,	15.05,	15.13,
15.22,	15.22,	15.30,	15.40,	15.60,	15.67,	15.78,	15.94,	16.02,
16.04,	16.08,	16.30,	16.42,	16.74,	17.30,	17.50,	17.50,	17.63,
17.68,	17.81,	17.82,	17.92,	18.20,	18.68,	18.81,	18.90,	18.93,
18.95,	19.10,	19.23,	19.40,	19.45,	20.23,	21.00,	21.30,	22.15,
22.68,	24.40.							

Estos datos fueron inicialmente reportados e investigados en Birnbaum, Saunders (1969b), en donde se aplicó un ajuste con la distribución Birnbaum-Saunders pero sólo para cada una de las muestras. El análisis presentado aquí se hizo para el modelo 1.

Para estimar los parámetros del modelo 1 de (5.2), se tomaron como valores iniciales a $\gamma = 1124.046$, $\eta = 5.950$ obtenidos apartir de (5.3) aplicando mínimos

Muestra 2

102 observaciones, máximo estrés por ciclo $2.6 \times 10^4 psi$										
2.33,	2.58,	2.68,	2.76,	2.90,	3.10,	3.12,	3.15,	3.18,	3.21,	3.21,
3.29,	3.35,	3.36,	3.38,	3.38,	3.42,	3.42,	3.42,	3.44,	3.49,	3.50,
3.50,	3.51,	3.51,	3.52,	3.52,	3.56,	3.58,	3.58,	3.60,	3.62,	3.63,
3.66,	3.67,	3.70,	3.70,	3.72,	3.72,	3.74,	3.75,	3.76,	3.79,	3.79,
3.80,	3.82,	3.89,	3.89,	3.95,	3.96,	4.00,	4.00,	4.00,	4.03,	4.04,
4.06,	4.08,	4.08,	4.10,	4.12,	4.14,	4.16,	4.16,	4.16,	4.20,	4.22,
4.23,	4.26,	4.28,	4.32,	4.32,	4.33,	4.33,	4.37,	4.38,	4.39,	4.39,
4.43,	4.45,	4.45,	4.52,	4.56,	4.56,	4.60,	4.64,	4.66,	4.68,	4.70,
4.70,	4.73,	4.74,	4.76,	4.76,	4.86,	4.88,	4.89,	4.90,	4.91,	5.03,
5.17,	5.40,	5.60.								

cuadrados. Teniendo los valores anteriores calculamos α y éste fué estimado por un procedimiento numérico (Newton-Raphson) usando máxima verosimilitud (5.6) y (5.7). Obteniendo

$$\hat{\alpha} = .225669 \quad \hat{\gamma} = 1124.046096 \quad \hat{\eta} = 5.93427$$

de (5.12)–(5.16) se obtuvo

$$11938.686464, \quad 0.00478467, \quad -5.071596, \quad 5528.524737,$$

La desviación estándar asintótica estimada (*DEA*) para cada una de las estimaciones de máxima verosimilitud es

$$DEA(\hat{\alpha}) = 0.009152, \quad DEA(\hat{\gamma}) = 86.958029, \quad DEA(\hat{\eta}) = 0.080896$$

V	$t_{0.1}(V)$
2.1	10.00678
2.6	2.817512
3.1	0.9921014

de los resultados de normalidad asintótica los intervalos de confianza al 95% para α , γ , η son:

(0.2076, 0.2437) para α

(940.7, 1277.7) para γ

(5.779, 6.097) para η

Muestra 3

101 observaciones, máximo estrés por ciclo $3.1 \times 10^4 psi$

0.70,	0.90,	0.96,	0.97,	0.99,	1.00,	1.03,	1.04,	1.04	1.05,	1.07,
1.08,	1.08,	1.08,	1.09,	1.09,	1.12,	1.12,	1.13	1.14,	1.14,	1.14,
1.16,	1.19,	1.20,	1.20,	1.20,	1.21,	1.21,	1.23,	1.24,	1.24,	1.24,
1.24,	1.24,	1.28,	1.28,	1.29,	1.29,	1.30,	1.30,	1.30,	1.31,	1.31,
1.31,	1.31,	1.31,	1.32,	1.32,	1.32,	1.33,	1.34,	1.34,	1.34,	1.34,
1.34,	1.36,	1.36,	1.37,	1.38,	1.38,	1.38,	1.39,	1.39,	1.41,	1.41,
1.42,	1.42,	1.42,	1.42,	1.42,	1.42,	1.44,	1.44,	1.45,	1.46,	1.48,
1.48,	1.49,	1.51,	1.51,	1.52,	1.55,	1.56,	1.57,	1.57,	1.57,	1.57,
1.58,	1.59,	1.62,	1.63,	1.63,	1.64,	1.66,	1.66,	1.68,	1.70,	1.74,
1.96,	2.12,									

Por otra parte, los resultados en el modelo 3

$$\hat{\xi} = 11.262 \quad \hat{\gamma} = 93.091 \quad \hat{\eta} = 5.888$$

Usando esto estimadores para obtener $I_m(\boldsymbol{\theta})$ de (5.29)–(5.34) se obtuvo

111.736, 13.228, -1307.585, 1.635, -161.268 31775.231

Al igual que en el modelo 1, obtenemos

V	$t_{0.1}(V)$
2.1	8.42
2.6	2.98
3.1	1.16

Comparando las estimaciones de los percentiles con los datos de las muestras (1-3),

las estimaciones parecen ser razonables.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se presentó el uso de la distribución Birnbaum-Saunders en la modelación de pruebas de vida acelerada, se trabajó con datos provenientes de muestras que hasta cierto punto son muy favorables, en el sentido de que son 304 datos. La estimación de los parámetros nos obligó a programar en matlab y hacer ser uso de técnicas numéricas. Los resultados obtenidos, fueron dados previamente por Padget y Owen (1999), al final nuestros resultados, como era de esperarse, no difieren con los de Padget y Owen.

LITERATURA CITADA

- Achcar, J. A., y Espinoza, M. M. (1993). Bayesian methods in accelerated life tests considering a log-linear model for Birnbaum-Saunders distribution.
- Ahmad, I. A. (1988). Jackknife estimation for a family of distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29, 211-223
- American Society for Testing Materials (1981), "Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (S-N) y Strain-Life (ξ -N) Fatigue Data, eds. R.E. Little, J.C. Ekvall, pp.129-140.
- Birnbaum, Z.W. and Saunders, S.C. (1969a) "A New Family of Life Distributions". *Journal of Applied Probability* 6: 319-327
- Birnbaum, Z.W. and Saunders, S.C. (1969b) "Estimation for a Family of Life Distribution with Applications to Fatigue". *Journal of Applied Probability* 6: 328-347.
- Cox, D.R. Regression models and life tables (with discussion). *J.R. Stat. Soc. B*, 34, 187-202.
- Desmond, A. (1986) "On the Relationship between two Fatigue-Life Models". *IEEE Trans. Rel.* 35: 167-169.
- Durham, S., Padgett, W. J. (1997) "Cumulative damage model for system failure with application to carbon fibers and composite". *Technometrics* 39: 34-44.
- Engelhardt, M., Bain, L.J. and Wright, F.T. (1981) "Inferences on the Parameters of the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution Based on Maximum Likelihood Estimation". *Technometrics* 23: 251-256.
- Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. "Continuous Univariate Distributions", 2nd Ed. Wiley, New York, Vol. 2, 1995.
- Lawless, J.F. "Statistical Models and Methods for Lifetime Data". John Wiley & sons, New York, 1982.

- T. Lee, Elisa. "Statistical Methods for Survival Data Analysis". Lifetime Learning Publications. Belmont, California. 1980.
- Leiva Sánchez, V. y Cantú Sifuentes, Mario. Confiabilidad: Teoría y Aplicaciones. Editorial de la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Saltillo, México. (2001) ISBN: 968-844-050-7.
- Leiva Sánchez, V. y Díaz García J. A. (2002), "A New Family of Life Distributions based on Birnbaum-Saunders Distribution", Comunicación Técnica No.1-02-17/03-09-2002, (PE/CIMAT).
- McCarter, Kevin S. (1999) "Estimation and Prediction for the Birnbaum-Saunders Distribution Using Type-II Censored Samples, with a Comparison to the Inverse Gaussian Distribution". Thesis, Kansas State University, Department of Statistics, College of Arts and Sciences. 1999.
- Meeker, W. Q., LuValle, M. J. (1995), An accelerated life test model based on reliability kinetics, *Technometrics* 37, 133-146.
- Padgett, W. J. (1982) On the Bayes estimation of reliability for the Birnbaum-Saunders fatigue life model, *IEEE Transactions on Reliability*, 31, 436-438.
- Rieck, James R. (1989) "Statistical Analysis for the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution". Unpublished Ph. D. Thesis, Clemson University, Department of Mathematical Sciences.
- Rieck, J.R. and Nedelman, J.R. (1991) "A Log-Linear Model for the Birnbaum-Saunders Distribution". *Technometrics* 33: 51-60.