UN CRITERIO INTEGRAL DE CAUSALIDAD PARA PROCESOS ARMA

JULIO CÉSAR CHACÓN HERNÁNDEZ

TESIS

Presentada como Requisito Parcial para
Obtener el Grado de:

MAESTRO EN
ESTADÍSTICA APLICADA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA
"ANTONIO NARRO"
PROGRAMA DE GRADUADOS
Buenavista, Saltillo, Coahuila, México
Septiembre de 2010

Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro
Dirección de Postgrado

UN CRITERIO INTEGRAL DE CAUSALIDAD
PARA PROCESOS ARMA

TESIS

Por:

JULIO CÉSAR CHACÓN HERNÁNDEZ

Elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y aprobada como requisito parcial, para optar al grado de:

MAESTRO EN
ESTADÍSTICA APLICADA

C o m i t é   P a r t i c u l a r

Asesor principal: ______________________
Dr. Rolando Cavazos Cadena

Asesor: ______________________
Dr. Mario Cantú Sifuentes

Asesor: ______________________
M. C. Félix de Jesús Sánchez Pérez

____
Dr. Jerónimo Landeros Flores
Director de Postgrado
Buenavista, Saltillo, Coahuila, Septiembre de 2010

COMPENDIO

UN CRITERIO INTEGRAL DE CAUSALIDAD
PARA PROCESOS ARMA

Por

JULIO CÉSAR CHACÓN HERNÁNDEZ

MAESTRÍA PROFESIONAL

EN ESTADÍSTICA APLICADA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA
ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, Septiembre de 2010

Dr. Rolando Cavazos Cadena –Asesor–

Palabras clave: Series de Laurent, Teorema del residuo, Integrales sobre el círculo unitario, Funciones de variable compleja, Raíces fuera del disco unitario

Este trabajo trata sobre series de tiempo estacionarias en general, y procesos autorregresivos y de promedios móviles (ARMA) en particular. Para una serie de tiempo estacionaria arbitraria, se estudian las propiedades de su función de autocovarianza y se analizan dos condiciones necesarias y suficientes para decidir si una función dada es de autocovarianza o no. Para un proceso ARMA, se desarrolla un criterio concluyente para decidir si el polinomio autorregresivo del modelo es causal. Dicho criterio involucra la integral de una función racional sobre el circulo unitario, y está motivado por el teorema del residuo en la teoría de funciones de variable compleja.

ABSTRACT

AN INTEGRAL CAUSALITY CRITERION
FOR ARMA PROCESSES

BY

JULIO CÉSAR CHACÓN HERNÁNDEZ

MASTER

APPLIED STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA
ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, September, 2010

Dr. Rolando Cavazos Cadena –Advisor–

Key Words: Laurent Series, Residue theorem, Integrals over the unit circle, Functions of a complex variable, Roots outside the unit disc.

This work concerns stationary time series with discrete time parameter. For a general stationary process, the properties of the corresponding autocovariance function are analyzed and two criteria for deciding if a given function is an autocovariance are studied. For the case of an ARMA process, the causality to the series with respect to the underlying white noise is studied, and a criterion is developed to decide whether or not a given polynomial is causal. Such a criterion is motivated by the residue theorem in the theory of functions of a complex variable.

ÍNDICE DE CONTENIDO

Un Criterio Integral de Causalidad para Procesos ARMA

CHACÓN HERNÁNDEZ JULIO CÉSAR, Departamento de Estadística y Cálculo, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Buenavista, Saltillo, COAH 25315, **MÉXICO**

july2019@hotmail.com

Resumen. Este trabajo trata sobre la idea de causalidad de un proceso ARMA. Se discute la relevancia de este concepto en el problema de determinar la función de autocovarianza del proceso, y se analiza un criterio frecuentemente encontrado en la literatura para determinar la causalidad de un proceso con polinomio autorregresivo de segundo grado, mostrando que dicho criterio no es universalmente válido. La contribución principal del trabajo es la caracterización de la noción de causalidad de un polinomio por medio de una integral sobre el círculo unitario del plano complejo.

An Integral Causality Criterion for ARMA Processes

Abstract. This work is concerned with the notion of causality of an ARMA process. The importance of this idea to determine the autocovariance function of the process is analyzed, and an algebraic criterion for the causality of a second order autoregressive polynomial is briefly discussed; such a criterion is frequently stated in the literature, and it is proved that is not valid in general. The main contribution of the paper is the formulation of a new causality criterion in terms of a complex integral on the unit circle.

1. Introducción

Este trabajo trata sobre la clase de series de tiempo estacionarias conocida como procesos autorregresivos y de promedios, brevemente referida como procesos ARMA, y el principal interés se centra en la idea de causalidad del proceso. *El principal objetivo* es establecer un criterio para decidir si un proceso es o no causal.

En términos generales, una serie de tiempo es una sucesión $\{X_t\}$ de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, donde la variable aleatoria X_t se interpreta como la observación que se realiza en el tiempo t, el cual, en el caso considerado en este trabajo, puede variar en el conjunto de los números enteros. El rasgo fundamental de la sucesión $\{X_t\}$ es que, en contraste con el supuesto comúnmente adoptado en la teoría estadística clásica (Borovkov, 1999, Dudewicz y Mishra, 1998, Shao, 2010, Wackerly *et al.*, 2009), no se supone la independencia de las variables X_t, ni que éstas tengan la misma distribución, características que permiten incluir en el estudio una gran variedad de observaciones que surgen en la práctica (Brockwell y Davis, 1998, Shumway y Stoffer, Martínez Martínez (2010)). Las serie $\{X_t\}$ es estacionaria cuando propiedades relevantes de un segmento $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son las mismas que las del segmento trasladado $(X_{1+h}, X_{h+2}, \ldots, X_{n+h})$ para cada entero h; como no se hace supuesto alguno sobre la distribución de los datos X_t, las propiedades importantes son las que se refieren a sus momentos. Formalmente, una serie es estacionaria si

(a) $E[X_t] = \mu$ no depende de t;

(b) Para cada s y t, $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ está bien definida y depende sólo de la diferencia entre s y t

Estas propiedades permiten definir la función de autocovarianza asociada a la serie estacionaria $\{X_t\}$ mediante

$$\gamma(h) = E[X_{t+h}X_t], \quad h = 0, \pm, \pm 2, \ldots. \tag{1.1}$$

la cual captura la estructura de dependencia lineal entre las diversas variables que componen la serie (Graybill, 2000, 2001). Las serie estacionarias son parte esencial del denominado *modelo clásico*, el cual se adapta bien como modelo a una gran variedad de datos que surgen en la práctica (Martínez Martínez (2010)).

La organización, en la Sección 2, se introduce la familia de procesos ARMA y en la Sección 3, se analiza la existencia de tales procesos. Posteriormente en la Sección 4, se define la idea de causalidad, se discute la relevancia de este concepto, y se analiza un criterio frecuentemente encontrado en la literatura para decidir si un polinomio autorregresivo es causal, mostrando que tal criterio no es universalmente válido. Posteriormente; en la Sección 5, se introduce la idea de integral de una función sobre el círculo unitario, la cual es utilizada en la Sección 6 para enunciar el nuevo criterio de causalidad que se propone en este trabajo. Dicho criterio se demuestra en la Sección 7 para el caso de un polinomio lineal y, finalmente, en la Sección 8 para el caso general. La exposición concluye mostrando la implementación del criterio en el lenguaje de programación *R*.

2. Procesos ARMA

En esta sección se introduce un clase muy importante de procesos estacionarios, a saber, la familia de procesos autorregresivos y de promedios móviles, comúnmente referida como la clase ARMA de series estacionarias.

Definition 2.1. *Considere un ruido blanco $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\{X_t\}$ una serie estacionaria con media nula.*

(i) La serie $\{X_t\}$ es un proceso de promedios móviles de orden q ($MA(q)$) si existen números (reales) $\theta_1, \ldots, \theta_q$ tales que

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

(ii) El proceso $\{X_t\}$ es autorregresivo de orden p ($AR(p)$) si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

para números (reales) $\phi_1, \ldots, \phi_p$;

(iii) La serie $\{X_t\}$ es un proceso autorregresivo y de promedios móviles de orden (p, q)—de forma abreviada, ($ARMA(p, q)$)—si existen números $\phi_1, \ldots, \phi_p$ y $\theta_1, \ldots, \theta_q$ tales que

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}. \tag{2.1}$$

Son varias las razones por las que los procesos ARMA desempeñan un papel importante en la teoría y aplicaciones de las series de tiempo: Primeramente, el problema de prónostico puede analizarse de manera sencilla para esos procesos, y algoritmos generales—como el algoritmo de innovaciones—se implementan de manera simple y eficiente para estos procesos. Por otro lado, es claro que ningún proceso real obedecerá de manera exacta a un modelo teórico, pero para cualquier proceso estacionario $\{Y_t\}$, es posible seleccionar un proceso ARMA $\{X_t\}$ cuya función de autocovarianza está arbitrariamente cercana a la de $\{Y_t\}$, en el sentido de que $\max_h |\gamma_X(h) - \gamma_Y(h)|$ es tan pequeña como se desee si el orden (p, q) y los coeficientes del proceso ARMA se eligen adecuadamente (Brockwell y Davis, 1998, Fuller, 1998).

Si $\phi_1, \ldots, \phi_p$ y $\theta_1, \ldots, \theta_q$ son como en la Definición 2.1, los polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ se especifican mediante

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z_1 + \cdots + \theta_q z^q \tag{2.2}$$

y

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z_1 - \cdots - \phi_p z^p, \tag{2.3}$$

los cuales se denominan polinomio de promedios móviles y autorregresivo, respectivamente. Evaluando estos polinomios en el operador de retardo B, se obtiene que

$$\theta(B)Z_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

y

$$\phi(B)X_t = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$$

de tal manera que las ecuaciones que satisface un proceso $\{X_t\}$ cuando es MA(q), AR(p) o ARMA(p, q) pueden escribirse como

$$X_t = \theta(B)Z_t, \quad \phi(B)X_t = Z_t, \quad \text{y} \quad \phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

respectivamente. Las siguientes secciones se ocupan de los problemas de existencia y unicidad de soluciones a la ecuación (2.1). Más explícitamente, se analizarán las siguientes preguntas: Dado un ruido blanco $\{Z_t\}$ y los polinomios $\theta(z)$ y $\phi(z)$ ¿Existe un proceso estacionario $\{X_t\}$ que satisfaga (2.1)? y en caso afirmativo ¿es única la serie $\{X_t\}$?

3. Existencia

En esta sección se establece un criterio suficiente para garantizar que las ecuaciones (2.1) tengan una solución $\{X_t\}$. Las condiciones involucran a las raíces del polinomio autorregresivo $\phi(z)$. Primeramente, note que si $\phi(z) = 1$, las ecuaciones (2.1) se reducen a $X_t = \theta(B)Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdot + \theta_q Z_{t-q}$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ecuaciones que claramente tienen solución única. En adelante, se supondrá que $\phi(z)$ tiene grado $p > 1$, de manera que $\phi_p \neq 0$. En este caso, $\phi(z)$ posee p raíces, las cuales (pueden repetirse y) se denotarán mediante $\xi_1, \ldots, \xi_p$:

$$\phi(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{3.1}$$

Debido a que $\phi(0) = 1$ (vea (2.3)), el polinomio autorregresivo se factoriza como

$$\phi(z) = (1 - z/\xi_1)(1 - z/\xi_2) \cdots (1 - z/\xi_p) = \prod_{i=1}^{p} (1 - z\xi_i^{-1}). \tag{3.2}$$

Teorema 3.1. *Si las raíces del polinomio autorregresivo $\phi(z)$ satisfacen*

$$|\xi_i| \neq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

entonces las siguientes afirmaciones (i)–(iii) son válidas:

(i) La función $1/\phi(z)$ se expande en serie de Laurent alrededor del círculo unitario $|z| = 1$ (Alfhors 1980, Rudin 1984, Apostol 1980). Más precisamente, existen constantes R_0 y R_1 con $R_0 < 1 < R_1$ tales que

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ _k z^k, \quad R_0 < |z| < R_1 \tag{3.3}$$

donde la serie converge absolutamente en la región indicada:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} | \ _k||z|^k < \infty, \quad R_0 < |z| < R_1$$

(ii) Considere la sucesión $\ = \{ \ _k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ y el correspondiente filtro $\ (B)$. Si la serie estacionaria $\{X_t\}$ se define como

$$X_t = \ (B)\theta(B)Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

entonces $\{X_t\}$ satisface las ecuaciones ARMA en (2.1).

(iii) Si $\{X_t\}$ y $\{\tilde{X}_t\}$ son dos soluciones a las ecuaciones (2.1), entonces $X_t = \tilde{X}_t$ para todo t.

De acuerdo a este resultado, cuando las raíces de $\phi(\cdot)$ no tienen módulo 1, entonces existe un proceso estacionario que satisface las ecuaciones ARMA, y dicho proceso es único. Una demostración detallada de este teorema puede encotrarse en Brockwell y Davis (1998), o en (Martínez Martínez (2010), 2010).

4. Causalidad

De acuerdo al Teorema 3.1, cuando el polinomio autorregresivo $\phi(z)$ no tiene raíces sobre el círculo unitario, las ecuaciones $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ tienen la única solución

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k Z_{t-k} \tag{4.1}$$

donde $\quad (z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k z^k = \theta(z)/\phi(z)$. La perturbación Z_t se manifiesta en el tiempo t, así que

$$\text{si} \quad {}_k = 0 \text{ para } k < 0, \text{ entonces } X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \quad {}_k Z_{t-k}$$

y la observación X_t es una función de las perturbaciones Z_r que han ocurrido antes de t, o en el tiempo t. En contraste, si $\quad {}_k \neq 0$ para algún $k < 0$, entonces la suma en (4.1) contiene el término $\quad {}_k Z_{t-k}$, en el cual $t - k > t$, indicando que Z_{t-k} se manifestará en un tiempo posterior a t, de modo que X_t depende de perturbaciones que surgirán en el futuro, situación que no se antoja razonable. Cuando $\quad {}_k = 0$ para $k < 0$, se dice que la *serie* $\{X_t\}$ *es una función causal de* $\{Z_t\}$. A partir de la demostración del Teorema 3.1, es claro que para que un coeficiente $\quad {}_k$ con $k < 0$ sea no nulo es necesario y suficiente que el polinomio autorregresivo $\phi(z)$ tenga raíces dentro del círculo unitario. Por lo tanto, la causalidad del proceso $\{X_t\}$ depende sólo del polinomio autorregresivo.

Definition 4.1. *Un polinomio $\phi(z)$ de grado p mayor a cero se denomina causal si y sólo si, todas sus raíces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ se ubican fuera del disco unitario, esto es,*

$$|\xi_i| > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Debido a que determinar las raíces de un polinomio $\phi(z)$ no es, en general, una tarea sencilla, es conveniente disponer de un criterio que permita decidir si el polinomio es causal o no, *sin determinar sus raíces*. En la literatura, es posible encontrar enunciado uno de tales criterios para polinomios de grado dos, el cual se discute a continuación. Como se verá después del siguiente análisis, el problema de construir un criterio para la causalidad de un polinomio es realmente interesante.

Ejemplo 4.1. En la literatura se propone el siguiente criterio para la causalidad de un polinomio

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$$

de grado dos con coeficientes reales. Para que $\phi(z)$ sea un polinomio causal es necesario (Brockwell and Davis, 1998) que los coeficientes (ϕ_1, ϕ_2) satisfagan

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1, \\ \phi_1 - \phi_2 &< 1, \\ |\phi_2| &< 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Estas condiciones son proponen como necesarias y suficientes en Shumway y Stoffer (2006).

A continuación se analizará la necesidad de las condiciones (4.2) para la causalidad de $\phi(z)$. Como antes, las raíces de $\phi(z)$ se denotarán mediante ξ_1 and ξ_2. Utilizando que $\phi(z) = (1 - \xi_1^{-1} z)(1 - \xi_2^{-1} z)$ se desprenden las siguientes expresiones para los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2:

$$\phi_1 = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2}, \quad \phi_2 = -\frac{1}{\xi_2 \xi_1}. \tag{4.3}$$

Para verificar la necesidad de las condiciones (4.2) debe mostrarse que

$$|\xi_1| > 1 \quad \text{and} \quad |\xi_2| > 1 \Rightarrow (4.2). \tag{4.4}$$

Considere los siguiented dos casos:

Case 1: Las raíces de ϕ son genuinamente complejas, en el sentido de que su parte imaginaria es no nula:

$$\xi_1 = a + ib, \quad \text{y} \quad \xi_2 = a - ib, \quad b \neq 0.$$

En estas circunstancias

$$\phi_1 = \frac{1}{a + ib} + \frac{1}{a - ib} = \frac{2a}{a^2 + b^2}, \quad \phi_2 = -\frac{1}{(a + ib)(a - ib)} = -\frac{1}{a^2 + b^2}$$

así que

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2a + 1}{a^2 + b^2}.$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 < 1 &\iff \frac{2a + 1}{a^2 + b^2} < 1 \\ &\iff 2a + 1 < a^2 + b^2 \\ &\iff 2 < (a - 1)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Así, si (4.4) ocurre, entonces debe tenerse la siguiente implicación:

$$a^2 + b^2 > 1 \Rightarrow 2 < (a - 1)^2 + b^2.$$

Sin embargo, poniendo $a = 1.01$ y $b = 0.01$ se sigue que $a^2 + b^2 > 1$ y $(a - 1)^2 + b^2 = 0.0002 < 2$, de manera que la implicación anterior no se satisface, y por lo tanto en el caso actual, la afirmación (4.4) *no es correcta*.

Case 2: Las raíces ξ_1 y ξ_2 son reales.

En este contexto se analizarán tres casos exahustivos.

(i) $\xi_1 > 0$ y $\xi_2 > 0$.

En esta situación, si (4.4) es válida, entonces la siguiente afirmación es correcta :

$$\xi_1 > 1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 \Rightarrow \phi_1 - \phi_2 < 1$$

Por medio de (4.3) esto es equivalente a

$$\xi_1 > 1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 \Rightarrow \frac{\xi_2 + \xi_1 + 1}{\xi_1 \xi_2} < 1$$

Sin embargo, poniendo $\xi_1 = 2 = \xi_2$, no es difícil ver que que la anterior implicación es falsa. En consecuencia, (4.4) falla también en el cotexto actual.

(ii) $\xi_1 < 0$ y $\xi_2 < 0$. En estas condiciones, $\xi_1 \xi_2 > 0$ y

$$\left.\begin{array}{c}\xi_1 < -1\\ \text{y}\\ \xi_2 < -1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\xi_1+\xi_2+1}{\xi_1\xi_2} < \dfrac{\xi_1}{\xi_1\xi_2} = \dfrac{1}{\xi_2} < 0 < 1\\ \phi_1 + \phi_2 = \dfrac{\xi_1+\xi_2-1}{\xi_1\xi_2} < \dfrac{\xi_1}{\xi_1\xi_2} = \dfrac{1}{\xi_2} < 0 < 1\\ |\phi_2| = \dfrac{1}{|\xi_1\xi_2|} = \dfrac{1}{\xi_1\xi_2} < 1 \end{cases}$$

Así, (4.4) ocurre en el presente contexto.

(iii) Las raíces son reales con diferente signo. En este caso $\xi_1\xi_2 < 0$ y, sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $\xi_1 < 0$ y $\xi_2 > 0$. Note ahora que

$$\xi_1 < -1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 \Rightarrow \phi_2 < 0 \quad \text{y} \quad |\phi_2| = \frac{1}{|\xi_1|\xi_2} < 1$$

$$\begin{aligned} \xi_1 < -1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 &\Rightarrow \xi_1\xi_2 < 0, \quad \xi_2 > 1 \quad \text{y} \quad \xi_1+\xi_2+1 > \xi_1\\ &\Rightarrow \xi_2 > 1 \quad \text{y} \quad \frac{\xi_1+\xi_2+1}{\xi_1\xi_2} < \frac{1}{\xi_2}\\ &\Rightarrow \frac{\xi_1+\xi_2+1}{\xi_1\xi_2} < 1\\ &\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 < 1\\ &\Rightarrow \phi_1 + \phi_2 < 1 \end{aligned}$$

donde la penúltima implicación se debe a (4.3), y la desigualdad $\phi_2 < 0$ fue utilizada en el último paso. Las dos últimas relaciones desplegadas implican que (4.4) ocurre en las presentes circunstancias. □

5. Integrales Sobre el Círculo Unitario

El criterio de causalidad para un polinomio $\phi(z)$ que se presenta en la siguiente sección involucra la idea de integral de una función sobre el círculo de radio 1 en el plano complejo, concepto que se introduce a continuación. Primeramente, defina

$$\mathcal{C} = \{z \,|\, z \text{ es un número complejo con } \ |z| = 1\}.$$

Definition 5.1. *Dada una función continua $f(\cdot)$ sobre el círculo $\mathcal{C}$, la integral de f sobre $\mathcal{C}$ se denota mediante $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz$ y se define como*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = i\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\,e^{i\lambda}d\lambda.$$

La racionalidad detrás de esta especificación, proviene de la observación de que, cuando λ varía en $(-\pi,\pi]$, el punto $z = e^{i\lambda} = \cos(\lambda) + i\sin(\lambda)$ recorre todo el círculo $\mathcal{C}$ una vez y $dz/d\lambda = ie^{i\lambda}$. Note que si f y g son dos funciones continuas definidas en $\mathcal{C}$, entonces para todos los números complejos a y b

$$\int_{\mathcal{C}} [af(z) + bg(z)]\,dz = a\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz + b\int_{\mathcal{C}} g(z)\,dz,$$

es decir, la integral sobre $\mathcal{C}$ es una transformación lineal, y

$$\left|\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz - \int_{\mathcal{C}} g(z)\,dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\lambda}) - g(e^{i\lambda})|\,d\lambda; \tag{5.1}$$

vea, por ejemplo, Apostol (1980) o Royden (2003). Ahora se ilustrará esta idea en un caso muy simple y útil.

Ejemplo 5.1. Si n es un entero y $f(z) = z^n$, entonces $f(e^{i\lambda}) = e^{in\lambda}$ y entonces

$$\int_{\mathcal{C}} z^n \, dz = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \, e^{i\lambda} \, d\lambda = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)\lambda} \, d\lambda$$

Por lo tanto, si $n \neq -1$, utilizando que la función $\lambda \mapsto e^{i\lambda}$ tiene período 2π,

$$\int_{\mathcal{C}} z^n \, dz = \left. \frac{e^{i(n+1)\lambda}}{(n+1)} \right| = e^{i(n+1)\pi} - e^{-i(n+1)\pi} = 0,$$

mientras que

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-1} \, dz = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\lambda} d\lambda = i \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda = 2\pi i.$$

En consecuencia

$$\int_{\mathcal{C}} z^n \, dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{si } n = -1; \end{cases} \tag{5.2}$$

particularmente si $P(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_k z^k$ es un polinomio arbitrario de grado k, entonces $\int_{\mathcal{C}} P(z) \, dz = 0$. □

6. Criterio de Causalidad

En esta sección se utiliza la idea de integral sobre el círculo unitario para obtener una fórmula para el número de raíces de un polinomio arbitrario $\phi(z)$ que se ubican dentro del círculo unitario. Primeramente, sean $a_1, \ldots, a_d$ las raíces diferentes de $\phi(z)$, de tal manera que

$$\phi(z) = c(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_d)^{m_d} = c \prod_{i=1}^{d} (z - a_i)^{m_i} \tag{6.1}$$

donde m_i es la multiplicidad de la raíz a_i, de modo que

$$k = m_1 + \cdots + m_d$$

es el grado del polinomio, y $c = (-1)^k \phi(0)/[a_1^{m_1} \cdots a_d^{m_d}]$. Contando las multiplicidades, el número de raíces de $\phi(z)$ que se ubican dentro del círculo unitario es

$$\sum_{i:\ |a_i|<1} m_i, \tag{6.2}$$

y el siguiente resultado establece que dicho número puede expresarse mediante una integral sobre el círculo unitario.

Teorema 6.1. *Si $\phi(z)$ es un polinomio con raíces distintas $a_1, a_2 \ldots, a_d$, cada una con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_d$, respectivamente (como en (6.1)), y si $\phi(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z| = 1$, entonces*

(i) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \, dz = \sum_{i:\ |a_i|<1} m_i.$$

Por lo tanto,

(ii) El polinomio $\phi(z)$ es causal si y sólo si,

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz = 0.$$

La expresión en la parte (i) de este teorema es conocida en la teoría de funciones de variable compleja, y se desprende de forma directa de la denominada fórmula de Cauchy (Alfhors 1980, Rudin, 1984); sin embargo, hasta el mejor de los conocimientos del autor, esta idea no se ha usado directamente en el análisis de series de tiempo. Antes de abordar la demostración del Teorema 6.1 en forma general, primero se estudiará un caso particular sencillo.

7. El Caso de un Polinomio Lineal

Considere un polinomio $\phi(z)$ de grado 1, de tal manera que $\phi(\cdot)$ se escribe como

$$\phi(z) = c(z-a)$$

donde a es la única raíz de $\phi(z)$. En este caso $\phi'(z) = c$ y entonces

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{c}{c(z-a)} = \frac{1}{z-a},$$

de manera que

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz = \int_C \frac{1}{z-a}\, dz.$$

Usando esta relación, la parte (i) del Teorema 6.1 establece que, si $|a| \neq 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-a}\, dz = \begin{cases} 1, & \text{si } |a| < 1 \\ 0, & \text{si } |a| > 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

El objetivo de esta sección es verificar esta expresión.

Lema 7.1. *Si $|a| \neq 1$, entonces la fórmula (7.1) es válida.*

Demostración. *Suponga que* $|a| < 1$. En este caso, para cada z tal que $|z| = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1}$$

recuerde que para cualquier número complejo r con $|r| < 1$, se tiene la siguiente expansión en serie:

$$\frac{1}{1-r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k. \tag{7.2}$$

donde la segunda igualdad se debe a la expansión (7.2) aplicada al caso $r = az^{-1}$; recuerde que $|z| = 1$ y note que $|r| = |az^{-1}| = |a| < 1$, de manera que la aplicación de (7.2) es legítima. Ahora, defina $S_n(z)$ como la n-ésima suma parcial de la serie anterior, esto es,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} \tag{7.3}$$

y observe que

$$\left|\frac{1}{z-a} - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a^k z^{-k-1}\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |a|^k\right| = \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}.$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad (5.1) se desprende que

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}\,d\lambda = 2\pi\frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}.$$

y tomando límite conforme n tiende a ∞, esta relación implica que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz. \tag{7.4}$$

Observe ahora que para cada entero positivo n

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} = z^{-1} + az^0 + a^2 z + \cdots + a^n z^{-n-1},$$

de tal modo que

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}} z^{-1}\,dz + a\int_{\mathcal{C}} z^0\,dz + a^2\int_{\mathcal{C}} z\,dz + \cdots + a^n\int_{\mathcal{C}} z^{-n-1}\,dz;,$$

utilizando la igualdad (5.2) establecida en el Ejemplo 5.1, es claro que todas las integrales en el lado derecho se anulan, excepto la primera que es igual a $2\pi i$, y por lo tanto $\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz = 2\pi i$; combinando esta relación con (7.4) se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = 1 \quad \text{cuando } |a| < 1,$$

de conformidad con (7.1).

Suponga que $|a| > 1$. En esta circunstancia observe que para cada z tal que $|z| = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-za^{-1}} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} z^k a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a^{-k-1}$$

donde, como antes, la segunda igualdad se debe a la expansión (7.2) aplicada al caso $r = za^{-1}$; note que, como $|z| = 1$, se tienen las relaciones $|r| = |za^{-1}| = |a|^{-1} < 1$, de manera que la aplicación de (7.2) es posible. Procediendo de manera similar al caso anterior, defina $S_n(z)$ como la n-ésima suma parcial de la serie que aparece en el desplegado precedente, es decir,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k a^{-k-1} \tag{7.5}$$

y note que

$$\left|\frac{1}{z-a} - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} z^k a^{-k-1}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |a|^{-k-1}\right| = \frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}}.$$

Combinando esta relación con la desigualdad (5.1), se concluye que

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}}\,d\lambda = 2\pi\frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}},$$

y tomando el límite conforme n tiende a ∞, esto implica que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz. \tag{7.6}$$

Para concluir, note que para cada entero positivo n

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k a^{-k-1} = z^0 a^{-1} + z a^0 + z^2 a + \cdots + z^n a^{-n-1},$$

de tal modo que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\, dz\\ &\quad = a^{-1}\int_{\mathcal{C}} z^0\, dz + a^0 \int_{\mathcal{C}} z\, dz + a^1 \int_{\mathcal{C}} z^2\, dz + \cdots + a^{-n-1}\int_{\mathcal{C}} z^n\, dz;\end{aligned}$$

utilizando de nueva cuenta la igualdad (5.2) establecida en el Ejemplo 5.1, es claro que todas las integrales en el lado derecho se anulan, y entonces $\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\, dz = 0$; combinando esta relación con (7.6) se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\, dz = 0 \quad \text{cuando } |a| > 1,$$

completando la verificación de (7.1). □

8. El Caso General

En eta sección se establecerá el Teorema 6.1 para un polinomio arbitrario $\phi(\cdot)$ de grado positivo.

Demostración del Teorema 6.1. Factorice $\phi(z)$ como en (6.1), y suponga que ninguna de las raíces diferentes a_i tiene módulo 1. A partir de la relación

$$\phi(z) = c\prod_{i=1}^{d}(z-a_i)^{m_i},$$

la fórmula para la derivada de un producto permite concluir que

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= c\,\frac{d}{dz}\prod_{1\le i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\ &= c\, m_1(z-a_1)^{m_1-1}\prod_{2\le i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\ &\quad + c\, m_2(z-a_2)^{m_2-1}\prod_{1\le i\ne 2,\, i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\ &\quad + c\, m_3(z-a_3)^{m_3-1}\prod_{1\le i\ne 3,\, i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\ &\quad + \cdots\\ &\quad + c\, m_d(z-a_d)^{m_d-1}\prod_{1\le i\ne d,\, i\le d}\end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \sum_{i=1}^{d}\frac{m_i}{z-a_i}$$

por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{d} m_i\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{z-a_i}\, dz$$

y combinando esta igualdad con el Lemma 7.1, se desprende que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz = \sum_{i:\ |a_i|<1} m_i$$

estableciendo la parte (i), y a partir de este punto la parte (ii) se obtiene de inmediato. □

9. Implementación del Criterio

El Teroema 6.1 expresa la cantidad de raíces de un polinomio que se ubican dentro del círculo unitario mediante una integral y, por supuesto, la gran ventaja de la fórmula establecida en el Teorema 6.1(i) es que la integral puede calcularse, al menos aproximadamente, sin conocer las raíces. Para propósitos de ilustración, a continuación se muestra la implementación de un algoritmo para evaluar el número de raíces de un polinomio que tienen módulo menor a uno. Para empezar, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi'(e^{i\lambda})}{\phi(e^{i\lambda})}\, ie^{i\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\phi'(e^{i\pi\omega})}{\phi(e^{i\pi\omega})}\, e^{i\pi\omega}\, d\omega\end{aligned} \tag{9.1}$$

donde la segunda igualdad se obtuvo a través del cambio de variable $\lambda = \pi\omega$. Para calcular esta última intergal se utilizó el lenguaje R. La idea del procedimiento es la siguiente:

• Primero, se formuló una función que permite evaluar un polinomio de grado mayor o igual a 1 en cualquier punto deseado x. Dicha función se denominó `evalpol` y acepta dos argumentos: el primero es un vector $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ que corresponde a los coeficientes del polinomio

$$p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$$

para el cual se desea determinar el número de raíces dentro del círculo unitario. El segundo argumento es un número x, y la función devuelve el valor $p(x)$, que se calcula de manera anidada como sigue:

$$p(x) = x * (x * (\cdots (x * (x * (p_n * x + p_{n-1}) + p_{n-2}) + p_{n-3}) \cdots + p_1) + p_0$$

El código de la función es el siguiente:

```
evalpol <- function(p, x) {
  n<- length(p)
  suma <- p[n]
  for(i in ((n-1):1)) suma <- suma*x + p[i]
  suma
}
```

• Posteriormente, se define una función que calcula la mitad de la integral en (9.1) de manera aproximada mediante una suma de Riemman:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\phi'(e^{i\pi\omega})}{\phi(e^{i\pi\omega})}\, e^{i\pi\omega}\, d\omega \approx \frac{1}{2}\sum_i \frac{\phi'(e^{i\pi\omega_i})}{\phi(e^{i\pi\omega_i})}\, e^{i\pi\omega_i}\Delta$$

donde dos puntos sucesivos ω_{i+1} y ω_i están separados por una distancia Δ, y además, $\omega_1 = -\pi$ y $\omega_n = \pi - \Delta$. El código de la función aparece a continuación:

```
Criterio <- function(p, Delta= .001) {
  n<- length(p)-1
  derp <- p[2:  (n+1)] *(1:n)
  puntos <- seq(-1, 1, by= Delta)
  puntos <- puntos* pi*1i
  puntos <- exp(puntos)
  N<- length(puntos)
  SUMA <- 0i
  for(i in (1:N)) {
  SUMA <- SUMA+
  Delta*(exp(puntos[i])*evalpol(derp,
  puntos[i])/evalpol(p,puntos[i]))
  }
  cat ("El polinomio tiene ",
    ceiling(trunc(Mod(SUMA/2)+.5)),
    "raíces dentro del crculo unitario\n")
}
```

Note que se incluyó un valor por defecto para Δ, y que dicho valor es un milésimo.

Para ver la aplicación de esta función a continuación se analizarán algunos polinomios:

(a) $p(z) = .4 + z^3$. Este polinomio corresponde al vector de coeficientes $p = (.4, 0, 0, 1)$. Invocando a la función `Criterio` con este argumento, se obtiene

```
> Criterio (c(.4, 0, 0, 1))
El polinomio tiene 3 raíces dentro del círculo unitario
```

(b) Ahora se alterará ligeramente el polinomio anterior para obtener $p(z) = .4 + .2z + z^3$, polinomio que corresponde al vector

$$p = (.4, .2, 0, 1).$$

La aplicación de la función `Criterio` con este argumento, arroja

```
> Criterio(c(.4, .2, 0, 1))
El polinomio tiene 3 raíces dentro del círculo unitario
```

La implementación del criterio de causalidad presentada arriba es simple y se formuló para propósitos de ilustración, pero muestra que es posible aplicar el Teorema 6.1 de manera práctica para determinar la causalidad de un polinomio sin conocer sus raíces.

Referencias

[1]. L. Alfhors (1980), Complex Variables, *McGraw-Hill*, New York.

[2]. T. M. Apostol (1980), Mathematical Analysis, *Addison Wesley*, Reading, Massachusetts.

[3]. A. A. Borovkov (1999), Mathematical Statistics, *Gordon and Breach*, New York

[4]. P. J. Brockwell y R. A. Davis (1998), Time Series: Theory and Methods, *Springer-Verlag*, New York.

[5]. E. Dudewicz y S. Mishra (1998). Mathematical Statistics, *Wiley*, New York.

[6]. W. A. Fuller (1998), Introduction to Statistical Time Series ,*Wiley*, New York.

[7]. W. Fulks (1980), Cálculo Avanzado, *Limusa*, México, D. F.

[8]. F. A. Graybill (2000), Theory and Application of the Linear Model, *Duxbury*, New York.

[9]. F. A. Graybill (2001), Matrices with Applications in Statistics *Duxbury*, New York.

[10]. D. A. Harville (2008), Matrix Algebra Form a Statistician's Perspective, *Springer-Verlaf*, New York.

[11]. K. Hoffman y R. Kunze (1975), Linear Algebra, *Prentice-Hall*, New York.

[12]. A. I. Khuri (2002), Advanced Calculus with Applications in Statistics, *Wiley*, New York.

[13]. S. Lipschutz (1995), Linear Algebra, *McGraw-Hill*, New York.

[14]. M. Loève (1984), Probability Theory, I, Springer-Verlag, New York.

[15]. N. Y. Martínez Martínez (2010), Una Implementación de Orden Cuadrático Para el Algoritmo de Innovaciones Aplicado a una Serie Estacionaria, Tesis de Maestría en Estadística Aplicada, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro , Saltillo Coah., MÉXICO.

[16]. W. Rudin (1984), Real and Complex Analysis, *McGraw-Hill*, New York.

[17]. H. L. Royden (2003), Real Analysis, *MacMillan*, London.

[18]. J. Shao (2010), Mathematical Statistics, *Springer*, New York.

[19]. R. H. Shumway y D. S. Stoffer (2006), Time Series Analysis and Its Applications With R Examples, *Springer-Verlag*, New York. Edition

[20]. D. Wackerly, W. Mendenhall y R. L. Scheaffer (2009), Mathematical Statistics with Applications, *Prentice-Hall*, New York.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se hace una descripción del tema de este trabajo, del principal objetivo que se persigue y de la manera en que se ha organizado la presentación de resultados.

1.1. El Tema de Trabajo

Este estudio trata sobre el análisis de una serie de tiempo, término que se refiere a una sucesión $\{X_t\}$ de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, donde el subíndice t se interpreta como el tiempo y puede variar sobre un subconjunto de los números enteros, el cual se supondrá que contiene por lo menos a los enteros positivos; las diversas variables se observan secuencialmente, y la observación de X_t ocurre en el tiempo t. Una característica fundamental de la sucesión $\{X_t\}$ es que, en general, las diversas variables no se suponen independientes, y la teoría toma ventaja de la estructura de asociación entre ellas para analizar problemas relevantes, entre ellos el problema de pronóstico: después de observar los valores $X_1, \ldots, X_n$ hasta el tiempo n, para un valor $h > 0$, se trata de establecer un intervalo $I_h \equiv I_h(X_1, \ldots, X_n)$, donde la variable X_{t+h} tomará sus valores con una probabilidad 'alta' (cercana a 1). Para abordar este y otros problemas, es necesario disponer de un modelo para la serie de observaciones $\{X_t\}$. El denominado modelo clásico es uno de ellos y permite incorporar tendencias y comportamientos periódicos en el modelado de una serie. Después de que la tendencia y el comportamiento periódico han sido considerados, el modelo incluye otra componente, a saber, una serie $\{Y_t\}$ que es *estacionaria*, en el siguiente sentido:

(i) Todas las variables Y_t tienen la misma media y la misma varianza, y

(ii) La varianza de una diferencia $Y_s - Y_t$, depende sólo de la diferencia entre los tiempos de observación s y t.

Después de formular el modelo, el problema de pronóstico para la serie original $\{X_t\}$ se reduce al mismo problema para la serie estacionaria $\{Y_t\}$ y, por esta razón, *el trabajo subsecuente se refiere a series estacionarias*. Los aspectos que se analizan son los siguientes:

(a) La caraterización de una función de autocovarianza de un proceso estacionario $\{Y_t\}$; dicha función es relevante, pues caracteriza la estructura de asociación lineal entre las diversas variables de la serie (Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1998; Shumway y Stopoffer, 2006; Martínez Martínez, 2010).

(b) La existencia y unicidad de procesos estacionarios que resuelven las ecuaciones denominadas ARMA, acrónimo que engloba las ideas de proceso *autorregresivo* y de *promedios móviles*; dichas ecuaciones, cuando tienen solución, determinan series cuyo análisis es simple y, sobre todo, útil, ya que para cualquier margen de error deseado $\varepsilon > 0$ y para cada función de autocovarianza γ, siempre es posible encontrar procesos ARMA cuya función de autocovarianza aproxime a γ con un error menor a ε.

(c) La formulación de un criterio que permita determinar la causalidad de un proceso ARMA; este concepto, se define precisamente en el Capítulo 4, y está relacionado con la interpretación práctica de un proceso estacionario.

1.2. El Principal Objetivo

Como ya se mencionó, los procesos denominados ARMA desempeñan un papel central en el estudio de series de tiempo. Cualquiera de dichos procesos $\{X_t\}$, puede representarse como una combinación de perturbaciones aleatorias no correlacionadas $\{Z_s\}$, donde Z_s se manifiesta en el tiempo s. Como X_t se observa en el tiempo t, es razonable requerir que cada X_t se exprese solamente en términos de variables Z_s con $s \leq t$, pues de otra forma, si la fórmula para X_t en términos de las variables Z_s involucra algún Z_s con $s > t$, significará que X_t depende de una perturbación que se presentará en el futuro, condición que no parece razonable de modo alguno. Cuando cada X_t es función solamente de las perturbaciones Z_s con $s \leq t$, se dice que X_t es una *función causal* de la serie $\{Z_s\}$ y, dado un modelo ARMA, es importante tener un criterio que permita determinar la causalidad del proceso $\{X_t\}$.

La causalidad de un proceso ARMA depende de la ubicación de las raíces del denominado polinomio autorregresivo $\phi(z)$ del proceso; precisamente el proceso es causal si y solamente si, las raíces (posiblemente complejas) de $\phi(z)$ tienen módulo mayor a uno. El propósito central de este trabajo es formular un criterio necesario y suficiente para que todas las raíces de un polinomio $\phi(z)$ tengan módulo mayor a uno. El resultado en esta dirección se presenta en el Capítulo 5.

1.3. La Organización

La presentacion de este trabajo ha sido organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2, se introduce la noción de serie de tiempo estacionaria; la presentación incluye una discusión sobre el problema general de pronóstico para motivar la definición formal que es seguida de una serie de ejemplos. Además, se introduce la idea de función de autocovarianza y se presenta la caracterización de tales funciones por medio de la idea de no negatividad.

En el Capítulo 3, se presenta un criterio adicional (y frecuentemente más simple de aplicar) para determinar si una función dada es de autocovarianza. Posteriormente se introduce la idea de *filtro lineal asociado a una sucesión sumable* $\{\ _k\}$, señalando la importancia de este concepto en el estudio del modelo clásico de series de tiempo (Brockwell y Davis 1998; Fuller, 1998), se ejemplifica el diseño de un filtro que mantiene invariante una tendencia polinomial, pero detiene a una componente estacional. El capítulo también incluye un criterio, denominado espectral, para decidir si una función es de autocovarianza o no.

En el Capítulo 4 se estudian los proceso autorregresivos y de promedios móviles, los cuales son muy importantes en las aplicaciones (Shumway y Stoffer, 2006). La presentación incluye una discusión sobre la existencia y unicidad de procesos ARMA, y finaliza con la introducción del concepto de *causalidad* de un proceso respecto a un ruido blanco.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta el resultado principal de este trabajo, a saber, un criterio para determinar si el polinomio autorregresivo de un proceso ARMA es causal. El criterio en cuestión involucra la integral de una función racional sobre el círculo unitario en el plano complejo, y es un caso particular del denominado teorema del residuo en la teoría de funciones de variable compleja (Alfhors, 1980); sin embargo, aparentemente dicho criterio no ha sido explícitamente establecido ni utilizado en la literatura de series de tiempo. La presentación inicia con una discusión de la integral de una función continua sobre el círculo unitario, para posteriormente establecer el criterio de causalidad para un polinomio. La demostración inicia estableciendo la validez del criterio para un polinomio grado uno, y el caso general se obtiene por medio de la descomposición en fracciones parciales de una función racional (Fulks, 1980; Khuri, 2002). Para concluir, se implementa el criterio de causalidad en el lenguaje R.

CAPÍTULO 2

SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

En este capítulo se introduce la idea de serie de tiempo estacionaria, alrededor de la cual gira el desarrollo subsecuente. La presentación incluye una discusión sobre el problema general de pronóstico, la cual motiva la definición formal presentada en la Sección 2, y es seguida por una serie de ejemplos en la Sección 3, en donde se introduce la función de autocovarianza; la exposición concluye con la caracterización de tales funciones a través de la idea de no negatividad.

2.1. Introducción

La noción central de este trabajo es la idea de *serie de tiempo*, término que se refiere a una sucesión de variables aleatorias $\{X_t,\, t \in T\}$, donde T es un subconjunto de los números enteros, y la variable aleatoria X_t se interpreta como observada en el tiempo t. En el desarrollo subsecuente, se analizarán los casos en que T consiste de todos los enteros positivos , o bien T es igual a todos los números enteros. Desde luego, un análisis estadístico clásico también tiene como ingrediente principal a una sucesión de variables aleatorias, así que es conveniente iniciar la exposición puntualizando una diferencia esencial entre el análisis de series de tiempo y el usual.

En la teoría estadística clásica, la sucesión $\{X_t\}$ se supone que consta de variables aleatorias *independientes e idénticamente distribuidas* (*i.i.d.*), supuesto que permite, al menos cuando la muestra es grande, aproximar la función de distribución común de las variables X_t; este resultado se conoce como el teorema de Glivenko-Cantelli, y puede encontrarse, por ejemplo, en Borovkov (1999) o Shao (2010). Puesto que la función de distribución de una variable aleatoria contiene toda la información probabilística que puede extraerse de una variable aleatoria (Loève, 1984), el teorema de Glivenko-Cantelli es un indicador claro de que, bajo condiciones adecuadas, los problemas fundamentales de estimación de parámetros y prueba de hipótesis pueden abordarse éxitosamente cuando las variables son *i.i.d.*

En contraste, *en la teoría de series de tiempo no se supone la independencia de las variables* X_t y la distribución de dos variables X_s y X_t es, en general, diferente, lo cual se acopla bien con lo que sucede comúnmente en situaciones prácticas. Por ejemplo, si X_1 y X_7 representan la cantidad de clientes de un cine un día lunes y el siguiente domingo, respectivamente, es claro que X_1 y X_7 no tienen la misma distribución.

Por otro lado, *el problema central* en el estudio de series de tiempo es el problema de pronóstico; una vez observadas las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$,

> ¿qué puede decirse sobre el valor que se observará en el futuro para
> la variable X_{n+h}, $h > 0$?

Una respuesta rápida y vaga es que X_{n+h} tomará un valor alrededor de su media $E[X_{n+h}]$, y a continuación se tratará de establecer condiciones bajo las cuales dicha respuesta pueda tener un sentido más preciso.

En general, $E[X_{n+h}]$ no se conoce, por lo que es necesario suponer que es posible aproximarla mediante las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que están disponibles hasta el tiempo n. El estimador más natural es la media muestral $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ cuya ezperanza es $(E[X_1] + \cdots + E[X_n])/n$; así, para que $\overline{X}_n$ sea un estimador insesgado de $E[X_{n+h}]$ se debe tener que:

$$E[\overline{X}_n] = \frac{E[X_1] + \cdots + E[X_n]}{n} = E[X_{n+h}],$$

relación que es válida para todo n y h, si y sólo si,

$$E[X_t] \equiv \mu \text{ no depende de } t. \tag{2.1.1}$$

Por otro lado, en el más simple de los escenarios, $\mu = E[X_{n+h}]$ es conocida, pero es necesario ubicar un intervalo alrededor de μ en el cual X_{n+h} tomará valores con una probabilidad (mayor o) igual a un valor específico. Usando la desigualdad de Chebichev (Wackerly *et al.*, 2009) es posible construir dicho intervalo si se dispone de $\mathrm{Var}(X_{n+h})$. Cuando esta varianza es desconocida, un estimador natural es la varianza muestral de los datos disponibles $X_1, \ldots, X_n$, la cual (recordando que μ se supone conocida) está dada por $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2/n$; si se desea que este estadístico s^2 sea un estimador insesgado de $\mathrm{Var}(X_{n+h})$, debe tenerse que:

$$\frac{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right]}{n} = \mathrm{Var}(X_{n+h}).$$

Al requerir que esta relación se cumpla para todos los valores posibles de n y h, poniendo $n = 1$ se desprende que $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_{1+h})$ para todo h, de manera que:

$$\mathrm{Var}(X_t) \text{ no depende de } t. \tag{2.1.2}$$

Por otro lado, volviendo al contexto en que μ es desconocida, además de disponer del estimador insesgado $\overline{X}_n$, es necesario tener una idea de su precisión, la cual usualmente se mide por $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$; el desarrollo de esta cantidad involucra términos de la forma $\mathrm{Cov}(X_s, X_r)$, los cuales será necesario estimar. Escribiendo $s = r + h$, de manera que h es la diferencia entre s y r, un estimador natural de $\mathrm{Cov}(X_{r+h}, X_r)$ está dado por:

$$(\sum_{k=1}^{n-h}(X_{k+h} - \overline{X}_n)(X_k - \overline{X}_n))/(n-h),$$

el cual, bajo la condición de que $\overline{X}_n$ sea 'cercano' a μ, puede aproximarse mediante:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-h}(X_{k+h} - \mu)(X_k - \mu)}{n-h};$$

requiriendo que la esperanza de esta cantidad sea lo más cercana a la cantidad $\mathrm{Cov}(X_{s+h}, X_s)$ se obtiene la condición,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-h}\mathrm{Cov}(X_{k+h}, X_k)}{n-h} = \frac{\sum_{k=1}^{n-h}E[(X_{k+h} - \mu)(X_k - \mu)]}{n-h} \approx \mathrm{Cov}(X_{s+h}, X_s)$$

condición que se satisface si,

$$\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) \text{ no depende de } t \text{ para todo } h; \tag{2.1.3}$$

note que esta propiedad incluye a (2.1.2), pues $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Cov}(X_t, X_t)$.

2.2. Series Estacionarias

Las series que satisfacen las condiciones anteriores desempeñan un papel relevante en el estudio de las series de tiempo, y reciben una denominación especial.

Definición 2.2.1. Una serie de tiempo $\{X_t\}$ se denomina *estacionaria* si las siguientes condiciones (i)–(iii) se satisfacen:

(i) $E[X_t^2] < \infty$ para todo t ;

(ii) $E[X_t] \equiv \mu$ no depende de t, y

(iii) Para cada entero h, $\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t)$ no depende de t.

Verbalmente, una serie $\{X_t\}$ es estacionaria, si las variables X_t tienen segundo momento finito, su media es constante, y la covarianza entre dos variables X_s y X_t depende sólo de la separacion $s - t$ entre los índices s y t.

La idea de serie estacionaria es bastante restrictiva, y no puede aplicarse directamente a un problema real. Por ejemplo, volviendo a la situación discutida anteriormente, en la que X_t representa el número de clientes de un cine en el día t, es claro que no es razonable suponer que X_1, el número de clientes el día lunes, tiene el mismo valor esperado que X_7, el número de clientes en el siguiente domingo. Sin embargo, se verá posteriormente que las series estacionarias son un componente importante de un modelo mucho más razonable para una gran variedad de situaciones reales, como el caso de la serie $\{X_t\}$ que representa la asistencia diaria a un cine.

Observación 2.2.1. Con frecuencia, una serie que satisface las condiciones (i)–(iii) en la anterior definición se denomina débilmente estacionaria, para distinguirla de una serie *estrictamente estacionaria*, idea que se define como sigue: La serie $\{X_t\}$ es estrictamente estacionaria si, para cada par de enteros h y n donde $n > 0$, las distribuciones de $(X_1, X_2 \ldots, X_n)$ y $(X_{1+h}, X_{2+h} \ldots, X_{n+h})$ coinciden; con esta especificación, no es difícil ver que una serie estrictamente estacionaria es, necesariamente, débilmente estacionaria (Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1998; Shumway y Stoffer, 2006).

El ejemplo más básico de serie estacionaria es el siguiente.

Ejemplo 2.2.1. Sea $\{Z_t, t = 0, \pm 1, \pm, 2 \ldots\}$ una sucesión de variables aleatorias con media cero y varianza común σ^2, tales que las variables son *no correlacionadas*. En este caso, la serie $\{Z_t\}$ es estacionaria. En efecto, por la especificación de la serie,

(i) Cada variable Z_t tiene segundo momento finito,

(ii) La media de cada variable Z_t es nula (y por lo tanto no depende de t), y

(iii) Para cada h,

$$\mathrm{Cov}(Z_{t+h}, Z_t) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h = 0, \\ 0, & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Una serie $\{Z_t\}$ como la presentada en este ejemplo se denomina *ruido blanco*. En adelante, se utilizará la notación:

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

para indicar que la sucesión $\{Z_t\}$ consiste de variables aleatorias no correlacionadas de media cero y con varianza común σ^2.

Como se verá más adelante, un ruido blanco es un bloque importante para construir otras series estacionarias.

Observación 2.2.2.

(i) Si las variables son independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza σ^2, entonces $\{Z_t\}$ es un ruido blanco.

(ii) Suponga que $\{X_t\}$ es una serie estacionaria y defina,

$$Y_t := X_t - \mu,$$

donde $\mu = E[X_t]$. En este caso, la media de cada Y_t es nula, y la serie $\{Y_t\}$ también es estacionaria. Por esta razón, al estudiar series estacionarias, usualmente se supone que la media de cada variable es nula (Brockwell y Davis, 1998; Shumway y Stoffer, 2006; Fuller, 1998).

2.3. Función de Autocovarianza y Ejemplos

En esta sección se ilustra la idea de serie estacionaria. Como punto de partida, es conveniente introducir la noción de función de autocovarianza.

Definición 2.3.1. Para una serie estacionaria $\{X_t\}$, la correspondiente función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ es la función definida en los enteros mediante,

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cuando sea claro a que serie $\{X_t\}$ está asociada una función de autocovarianza γ_X, se suprimirá el subíndice X. Note que:

$$\text{si } \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \quad \text{entonces } \gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } h = 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Ejemplo 2.3.1. Considere un ruido blanco $\{Z_t\}$ de media cero y varianza σ^2:

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Para constantes a, b y c, en cada uno de los siguientes apartados se especifica una serie $\{X_t\}$, y se analizará si $\{X_t\}$ es estacionaria o no, y en caso afirmativo, se determinará la función de autocovarianza correspondiente.

(a) $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1}$,

(b) $X_t = a + bZ_0$,

(c) $X_t = Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)$,

(d) $X_t = Z_0 \cos(ct)$,

(e) $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$,

(f) $X_t = Z_t Z_{t-1}$, donde las variables Z_t son *i.i.d.*

Solución. Primeramente, note que debido a que las variables Z_t son no correlacionadas con varianza finita, en cada uno de los casos anteriores las variables X_t tienen segundo momento finito, así que el análisis se centrará en verificar las condiciones (ii) y (iii) de la Definición 2.2.1. El análisis subsecuente utiliza propiedades básicas del operador de covarianza que pueden encotrarse en Dudewicz y Mishra (1998), o Wackerly *et al.* (2009).

(a) Como las variables Z_t tienen media nula, $E[X_t] = E[a + bZ_t + cZ_{t-1}] = a$ no depende de t, mientras que:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{t+h}, X_t] &= \text{Cov}[a + bZ_{t+h} + cZ_{t+h-1}, a + bZ_t + cZ_{t-1}] \\ &= b^2\text{Cov}[Z_{t+h}, Z_t] + bc\text{Cov}[Z_{t+h}, Z_{t-1}] \\ &\quad + cb\text{Cov}[Z_{t+h-1}, Z_t] + c^2\text{Cov}[Z_{t+h-1}, Z_{t-1}]. \end{aligned}$$

A partir de esta relación, utilizando (2.3.1) se desprende que:

$$\operatorname{Cov}[X_{t+h}, X_t] = \begin{cases} \sigma^2(b^2+c^2), & \text{if } h = 0 \\ \sigma^2 cb, & \text{if } h = \pm 1, \\ 0, & \text{if } |h| \geq 2. \end{cases}$$

Así, la esperanza de $E[X_t] = a$ no depende de t y

$$\operatorname{Cov}[X_{t+h}, X_t] \equiv \gamma_X(h)$$

depende sólo de h, de tal manera que $\{X_t\}$ es una serie estacionaria.

(b) En este caso, $E[X_t] = a$, pues $E[Z_0] = 0$, mientras que:

$$\operatorname{Cov}[X_{t+h}, X_t] = \operatorname{Cov}[a + bZ_0, a + bZ_0] = \sigma^2 b^2$$

no depende de t. Por lo tanto, $\{X_t\}$ es estacionaria, con $\gamma_X(h) = \sigma^2 b^2$ para todo h.

(c) Como las variables Z_t tienen media nula,

$$E[X_t] = E[Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)] = 0.$$

Por otro lado, puesto que Z_1 y Z_2 son no correlacionadas,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cov}[X_{t+h}, X_t] \\ &\quad = \operatorname{Cov}[Z_1 \cos(c[t+h]) + Z_2 \sin(c[t+h]), \\ &\quad\quad Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)] \\ &\quad = \sigma^2[\cos(c[t+h])\cos(ct) + \sin(c[t+h])\sin(ct)] \\ &\quad = \sigma^2 \cos(c[t+h] - ct) \\ &\quad = \sigma^2 \cos(ch) \end{aligned}$$

donde se utilizó la identidad:

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

para establecer la tercera igualdad. Puesto que $E[X_t]$ y $\mathrm{Cov}[X_{t+h}, X_t]$ no dependen de t, la serie es estacionaria con $\gamma_X(h) = \cos(ch)$.

(d) En este caso $E[X_t] = E[Z_0 \cos(ct)] = 0$, y

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X_{t+h} X_t] &= \mathrm{Cov}[Z_0 \cos(c[t+h]), Z_0 \cos(ct)] \\ &= \sigma^2 \cos(ct+ch)\cos(ct);\end{aligned}$$

puesto que esta cantidad depende tanto de h como de t, la serie $\{X_t\}$ no es estacionaria.

(e) Para la serie especificada,

$$E[X_t] = E[Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)] = 0$$

Sin embargo, se verá a continuación que $\mathrm{Cov}[X_{t+h}, X_t]$ si depende de t. Con este fin, note que:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}[X_{t+1}, X_t] \\ &= \mathrm{Cov}[Z_{t+1}\cos(c[t+1]) + Z_t \sin(c[t+1]), \\ &\qquad Z_t \cos(ct) + Z_{t-1}\sin(ct)] \\ &= \cos(c[t+1])\cos(ct)\mathrm{Cov}(Z_{t+1}, Z_t) \\ &\quad + \cos(c[t+1])\sin(ct)\mathrm{Cov}(Z_{t+1}, Z_{t-1}) \\ &\quad + \sin(c[t+1])\cos(ct)\mathrm{Cov}(Z_t, Z_t) \\ &\quad + \sin(c[t+1])\sin(ct)\mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) \\ &= \sigma^2 \sin(c[t+1])\cos(ct);\end{aligned}$$

debido a que $\mathrm{Cov}[X_{t+1}, X_t]$ depende de t, se desprende que $\{X_t\}$ no es una serie estacionaria.

(f) Puesto que las variables Z_t y Z_{t-1} son no correlacionadas de media nula, se desprende que:

$$E[X_t] = E[Z_t Z_{t-1}] = E[Z_t]E[Z_{t-1}] = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}[X_{t+h}, X_t] &= \operatorname{Cov}[Z_{t+h}Z_{t+h-1}, Z_tZ_{t-1}] \\ &= E[Z_{t+h}Z_{t+h-1}Z_tZ_{t-1}].\end{aligned}$$

Luego, recordando que las variables Z_t son *i.i.d.* con media nula y varianza σ^2, $\operatorname{Cov}[X_t, X_t] = E[Z_t^2 Z_{t-1}^2] = E[Z_t^2]E[Z_{t-1}^2] = \sigma^4$, mientras que para $h \neq 0$ el producto $Z_{t+h}Z_{t+h-1}Z_tZ_{t-1}$ incluye al menos un factor Z_k que no se repite, y entonces $\operatorname{Cov}[X_{t+h}, X_t] = 0$ for $h \neq 0$. Por lo tanto, $\{X_t\}$ es estacionaria con $\gamma_X(h) = 0$ si $h \neq 0$ y $\gamma_X(0) = \sigma^4$, esto es, $\{X_t\} \sim WN(0, \sigma^4)$; vea el Ejemplo 2.2.1.

2.4. Propiedades de una Función de Autocovarianza

El objetivo de esta sección es proporcionar un criterio para determinar si una función definida en los enteros es la función de autocovarianza de un proceso estacionario. Como punto de partida, se establecerán las propiedades fundamentales de una función de autocovarianza.

Lema 2.4.1. Suponga que $\gamma(\cdot)$ es la función de autocovarianza de un proceso estacionario. En este caso, las siguientes propiedades (i)–(iii) se satisfacen:

(i) $\gamma(h) = \gamma(-h)$

(ii) Para cada entero $n > 0$ y $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i\gamma(i-j)a_j.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i\gamma(i-j)a_j \geq 0. \tag{2.4.1}$$

En particular,

(iii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$.

Demostración.

(i) Recuerde que:

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t)$$

no depende de t. Sustituyendo t por $t-h$, se desprende que:

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{(t-h)+h}, X_{t-h}) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h});$$

Finalmente, aplicando la propiedad de simetría de la covarianza (Dudewicz y Mishra, 1998) se tiene que:

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathrm{Cov}(X_{t-h}, X_t),$$

y combinando esta igualdad con la relación anteriormente desplegada, se concluye que:

$$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t-h}, X_t) = \gamma(-h),$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la especificación de $\gamma(\cdot)$ en la Definición 2.3.1.

(ii) Utilizando la fórmula para la varianza de una combinación lineal de variables aleatorias (Wackerly *et al.*, 2009),

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathrm{Cov}(X_i, X_j) a_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \gamma(i-j) a_j \end{aligned}$$

y puesto que una varianza es no negativa, esta igualdad implica (2.4.1). Aplicando este resultado al vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ con $a_s = 0$ si $s \neq i, j$, se obtiene que, para a_i y a_j arbitrarias,

$$a_i\gamma(i-j)a_j + a_j\gamma(j-i)a_i + a_j\gamma(j-j)a_j + a_i\gamma(i-i)a_i \geq 0$$

una desigualdad que, usando la simetría establecida en la parte (i), equivale a:

$$[a_i, a_j]\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(i-j) \\ \gamma(i-j) & \gamma(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} \geq 0,$$

de manera que la matriz en esta desigualdad es no negativa definida, y por lo tanto tiene determinante mayor o igual a cero (Hoffman y Kunze, 1975; Lipschutz, 1995; Graybill, 2001; Harville, 2008).

$$\det\left(\begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(i-j) \\ \gamma(i-j) & \gamma(0) \end{bmatrix}\right) = \gamma(0)^2 - \gamma(i-j)^2 \geq 0$$

y entonces $|\gamma(i-j)| \leq |\gamma(0)| = \gamma(0)$; puesto que i y j son arbitrarios, se obtiene que $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ para todo entero h.

Definición 2.4.1. Una función $\gamma(\cdot)$ definida en los enteros se denomina, *no negativa definida* si satisface:

(i) $\gamma(h) = \gamma(-h)$ para todo entero h, y

(ii) La condición (2.4.1) se satisface para todo entero positivo n y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

De acuerdo al Lema 2.4.1, una función de autocovarianza de una serie estacionaria es no negativa definida. El recíproco de esta afirmación también es cierto, eso es, si $\gamma(\cdot)$ es una función no negativa definida, entonces $\gamma(\cdot)$ es la función de autocovarianza de un proceso estacionario $\{X_t\}$; esta afirmación se desprende del teorema de existencia de Kolmogorov, y el argumento puede verse, por ejemplo, en Brockwell y Davis (1998), donde se demuestra que el proceso $\{X_t\}$ puede seleccionarse de manera que cada vector $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tenga distribución normal. Por otro lado, una demostración alternativa de la existencia de un proceso estacionario cuya función de autocovarianza es una función no negativa definida especificada de antemano, puede obtenerse mediante el algoritmo de innovaciones, como se presenta en Martínez Martínez, 2010.

Teorema 2.4.1. Una función $\gamma(\cdot)$ definida en los enteros es la función de autocovarianza de un proceso estacionario, si y sólo si, $\gamma(\cdot)$ es no negativa definida.

Observando que la clase de funciones no negativa definidas es cerrada bajo la suma y la multiplicación por una constante mayor o igual a cero, el siguiente resultado se desprende inmediato del Teorema 2.4.1.

Corolario 2.4.1. Si $\gamma(\cdot)$ y $\gamma_1(\cdot)$ son funciones de autocovarianza, entonces, para todas las constantes $c, c_1 \geq 0$, la función $c\gamma(\cdot) + c_1\gamma_1(\cdot)$ también es la función de autocovarianza de un proceso estacionario.

Observación 2.4.1. Si $\gamma(\cdot)$ y $\gamma_1(\cdot)$ son las funciones de autocovarianza de las series estacionarias $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$, respectivamente, entonces, suponiendo que $\mathrm{Cov}(X_s, Y_t) = 0$ para todo s y t, se tiene que $c\gamma(\cdot) + c_1\gamma_1(\cdot)$ es la función de autocovarianza de la serie $\{W_t\}$, donde $W_t = \sqrt{c}X_t + \sqrt{c_1}Y_t$.

En los siguientes ejemplos se empleará la observación anterior, así como la experiencia acumulada hasta ahora para decidir si una función dada es de autocovarianza o no.

Ejemplo 2.4.1. En cada caso se especifica una función $f(\cdot)$ definida en los enteros, y se busca decidir si $f(\cdot)$ es o no una función de autocovarianza asociada a un proceso estacionario.

(a) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = 0 \\ 1/|h| & \text{if } h \neq 0. \end{cases}$

(b) $f(h) = (-1)^{|h|}$

(c) $f(h) = 1 + \cos\dfrac{\pi h}{2} + \cos\dfrac{\pi h}{4}$

(d) $f(h) = 1 + \cos\dfrac{\pi h}{2} - \cos\dfrac{\pi h}{4}$

(e) $f(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = 0, \\ .4 & \text{if } h = \pm 1, \\ 0 & \text{if } |h| > 1. \end{cases}$

Solución.

(a) Note que f es una función par, pero a pesar de que satisface la primera condición en la definición de una función no negativa definida, f no es una función de autocovarianza. Para verificar esta afirmación, suponga que $f = \gamma_X$ para alguna serie estacionaria $\{X_t\}$. En este caso $\text{Corr}(X_{t+h}, X_t) = f(h)/f(0) = 1$ si $|h| = 1$, condición que implica que $P[X_{t-1} = X_t = X_{t+1}] = 1$ (Wackerly *et al.*, 2009) para todo t, de manera que $P[X_s = X_t] = 1$ para todo t y s. En consecuencia, debe tenerse que:

$$f(h) = \text{Cov}[X_{t+h}, X_t] = \text{Cov}[X_t, X_t] = f(0) = 1,$$

lo cual no esta de acuerdo con la especificación de f. Por lo tanto, f no es la función de autocovarianza de un proceso estacionario.

(b) Defina $X_t = (-1)^t Y$ donde Y es una variable aleatoria con media nula y varianza unitaria. Note ahora que:

$$E[X_t] = 0$$

y

$$\begin{aligned} &\text{Cov}[X_{t+h}, X_t] \\ &\qquad = \text{Cov}[(-1)^{t+h}Y, (-1)^t Y] \\ &\qquad = (-1)^h \text{Cov}[Y, Y] \\ &\qquad = (-1)^h \text{Var}[Y] = (-1)^h. \end{aligned}$$

Usando la igualdad $(-1)^h = (-1)^{-h}$, se desprende que:

$$\mathrm{Cov}[X_{t+h}, X_t] = (-1)^{|h|} = f(h).$$

Luego, f es la función de autocovarianza de $\{X_t\}$.

(c) Sean $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ y $\{Z_t\}$ series estacionarias cuyas funciones de autocovarianza están dadas como sigue:

(i) $\gamma_X(h) = 1$ para todo h; esto ocurre cuando $X_t = X_0$ para todo t y $\mathrm{Var}(X_0) = 1$.

(ii) $\gamma_Y(h) = \cos(\pi h/2)$ para cada h. Esto es válido si:

$$Y_t = A\cos(\pi t/2) + B\sin(\pi t/2),$$

donde A y B son independientes con media nula y varianza unitaria, por el Ejemplo 2.3.1(c).

(iii) $\gamma_Z(h) = \cos(\pi h/4)$ para toda h. Este es el caso si la serie $\{Z_t y\}$ está dada por $Z_t = C\cos(\pi t/4) + D\sin(\pi t/4)$, donde C y D son independientes con media cero y varianza 1, de nueva cuenta, por el Ejemplo 2.3.1(c). Por medio de la Observación 2.4.1, y seleccionando las series de manera que sean no correlacionadas, se sigue que la función de autocovarianza de $X_t + Y_t + Z_t$ está dada por:

$$1 + \cos(\pi h/2) + \cos(\pi h/4) = f(h).$$

(d) Note que:

$$\begin{aligned} f(3) &= 1 + \cos(3\pi/2) - \cos(3\pi/4) \\ &= 1 + 0 - (-\sqrt{2}/2) = 1 + \sqrt{2}/2 > 1 \\ &= f(0); \end{aligned}$$

puesto que $|\gamma_X(\cdot)| \leq \gamma_X(0)$ para toda serie estacionaria, $\{X_t\}$, la función f no es la función de autocovarianza de una serie estacionaria.

(e) Usando el Ejemplo 2.3.1, la serie $X_t = W_t + \theta W_{t-1}$ donde: $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ es un proceso estacionario con:

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{if } h = 0, \\ \sigma^2\theta & \text{if } h = \pm 1, \\ 0 & \text{if } |h| > 1. \end{cases}$$

seleccionando

$$\sigma^2 = (1+\theta^2)^{-1}$$

se desprende que:

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} 1 & \text{if } h = 0, \\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2} & \text{if } h = \pm 1, \\ 0 & \text{if } |h| > 1. \end{cases}$$

Ahora, tome $\theta = 2$, de manera que $\gamma_X(1) = .4$. Con esta elección de θ, se tiene que $f(\cdot) = \gamma_X(\cdot)$.

CAPÍTULO 3

FILTROS

El propósito de este capítulo es introducir la idea de filtro lineal asociado a una sucesión sumable $\{\ \ _k\}$, indicando su utilidad en el análisis del modelo clásico para una serie de tiempo; dicho modelo se ha utilizado para modelar series de diversa índole, desde ventas de un establecimiento comercial o la población de un país, hasta la aparición de manchas solares (Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1998). El problema de diseño de un filtro es importante en el estudio del modelo clásico, y se utiliza un ejemplo para mostrar que dicho problema se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones lineales adecuadamente construido. La discusión incluye una prueba adicional para decidir si una función dada es de autocovarianza o no.

3.1. El Criterio de no Negatividad

El propósito de esta sección es ilustrar el hecho de que, comúnmente, la aplicación del criterio de nonegatividad en el Teorema 2.4.1, involucra una buena cantidad de trabajo técnico decidir si una función dada es de autocovarianza, aún para funciones sencillas.

Considere la función:

$$f(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } h = 0, \\ \rho, & \text{si } h = \pm 1, \\ 0 & \text{si } |h| > 1, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

donde ρ es una constante. Se trata de determinar para que valores de ρ esta función es no negativa definida.

Lema 3.1.1. La función $f(\cdot)$ en (3.1.1) es no negativa definida si y sólo si, $|\rho| \leq 1/2$.

Demostración. Como punto de partida, observe que la especificación de f permite concluir que, para un entero $n > 0$ y $\mathbf{a} = (a_1, a_2 \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i f(i-j) a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\rho \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \tag{3.1.2}$$

Suponga que f es no negativa definida. En este caso, la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i f(i-j) a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\rho \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \geq 0 \tag{3.1.3}$$

siempre se satisface. Poniendo $\mathbf{a} = (1, 1, 1, \ldots, 1)$, se desprende que $n + 2\rho(n-1) \geq 0$, y entonces $n/(n-1) + 2\rho \geq 0$; puesto que esta última relación es válida para todo n, dejando que n tienda a infinito se arriva a:

$$1 + 2\rho \geq 0.$$

Ahora seleccione $\mathbf{a} = (1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n)$, de manera que $a_i a_{i+1} = -1$ para todo i; para este vector $\mathbf{a}$, (3.1.3) implica que $n - 2\rho(n-1) \geq 0$, es decir $n/(n-1) - 2\rho \geq 0$; tomando límite cuando n tiende a ∞, se obtiene:

$$1 - 2\rho \geq 0.$$

Las dos últimas relaciones desplegadas equivalen a $1 \geq 2|\rho|$, esto es, $|\rho| \leq 1/2$.

Suponga que $|\rho| \leq 1/2$. En este contexto, observe que para cualquier $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ la suma $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\rho \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1}$ es el producto interno (canónico) de los vectores:

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0), \quad \hat{\mathbf{a}} = (a_2, a_3, \ldots, a_n, 0)$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\rho \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} = \langle \tilde{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene:

$$|\langle \tilde{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2}\sqrt{a_2^2 + \cdots + a_n^2} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

de manera que:

$$-|\langle \tilde{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle| \geq -\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Por lo tanto, vía (3.1.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} a_i f(i-j) a_j &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\rho \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2|\rho| \left| \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2|\rho| |\langle \tilde{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}} \rangle| \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2|\rho| \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\
&= (1 - 2|\rho|) \sum_{i=1}^{n} a_i^2
\end{aligned}$$

y puesto que $|\rho| \leq 1/2$, se concluye que $\sum_{i,j=1}^{n} a_i f(i-j) a_j \geq 0$, mostrando que f es no negativa definida.

Por ejemplo, cuando $\rho = .4$, la función (3.1.1) si es una función de autocovarianza, pero no lo es si $\rho = .51$. A partir del análisis precedente, es claro que verificar directamente si una función $\gamma(\cdot)$ definida en los enteros es una función no negativa definida (y por lo tanto, de autocovarianza) no es, en general, una tarea simple, a pesar de que la función dada sea sencilla.

3.2. El Criterio Espectral

En esta sección se presenta un criterio diferente al del Teorema 2.4.1 para decidir si una función dada es no negativa definida, y por lo tanto, una función de autocovarianza.

Teorema 3.2.1. Sea $\gamma(\cdot)$ una función simétrica definida en los números enteros, de manera que $\gamma(h) = \gamma(-h)$. Suponga, además, que la función es *absolutamente sumable*, esto es:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty. \tag{3.2.1}$$

En este caso, defina la función $f_\gamma\colon (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mediante,

$$f_\gamma(\lambda) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) \cos(k\lambda), \tag{3.2.2}$$

donde la serie converge absoluta y uniformemente en $(-\pi, \pi]$, por la sumabilidad absoluta de la función $\gamma(\cdot)$ (Apostol, 1980; Rudin, 1984). Con esta notación, las siguientes condiciones (i) y (ii) son equivalentes:

(i) $\gamma(\cdot)$ es no negativa definida;

(ii) $f_\gamma(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

Este resultado pertenece a la teoría espectral de series de tiempo; la función f_γ es (un múltiplo de) la densidad espectral asociada a γ; vea por ejemplo, Brockwell y Davis (1998), Shumway y Stoffer (2006), o Vázquez Baxcajay, (2010).

Demostración. (ii) $\Rightarrow$ (i). Suponga que $f_\gamma(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$. En este caso se verá que γ es no negativa definida. Primero, recuerde que $e^{i\omega}$ es un número complejo definido como:

$$e^{i\omega} = \cos(\omega) + i \sin(\omega),$$

y que $\sin(\cdot)$ es una función impar. Con esto en mente, note que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) \sin(k\lambda) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(-j) \sin(-j\lambda) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \sin(-j\lambda) \\
&= -\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \sin(j\lambda)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a que $\gamma(-j) = \gamma(j)$, mientras que para establecer la última igualdad se utilizó que $\sin(\cdot)$ es una función impar. Por lo tanto,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) \sin(j\lambda) = 0,$$

de donde se sigue que:

$$\begin{aligned}
f_\gamma(\lambda) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) e^{ij\lambda} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) [\cos(j\lambda) + i \sin(j\lambda)] \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) e^{ij\lambda}
\end{aligned}$$

A partir de esta expresión, usando la convergencia uniforme de la serie:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma(j) e^{ij\lambda}$$

es posible efectuar los intercambios de integración y sumatorias que aparecen a continuación (Fulks, 1980; Khuri, 2002; Royden, 2003) se desprende que:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f_\gamma(\lambda)e^{-ih\lambda}\,d\lambda &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma(j)e^{ij\lambda}e^{-ih\lambda}\,d\lambda\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma(j)e^{i(j-h)\lambda}\,d\lambda\\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(j)e^{i(j-h)\lambda}\,d\lambda\\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma(j)\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-h)\lambda}\,d\lambda.\end{aligned}$$

A continuación, observe que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\,d\lambda = 0$ cuando $k \neq 0$, mientras que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\,d\lambda = 2\pi$ si $k = 0$; combinando este hecho con la última relación desplegada se desprende que:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f_\gamma(\lambda)e^{-ih\lambda}\,d\lambda &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma(j)\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-h)\lambda}\,d\lambda.\\ &= 2\pi\gamma(h);\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi,\pi]} f_\gamma(\lambda)e^{-ih\lambda}\,d\lambda, \quad h =, \pm1, \pm2, \ldots \tag{3.2.3}$$

Seleccione ahora números reales arbitrarios $a_1, \ldots, a_n$, y note que:

$$\begin{aligned}\sum_{r,s=1}^{n} a_r\gamma(r-s)a_s &= \frac{1}{2\pi}\sum_{r,s=1}^{n} a_r\left[\int_{-\pi,\pi]} f_\gamma(\lambda)e^{-i(r-s)\lambda}\,d\lambda\right]a_s\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi,\pi]} f_\gamma(\lambda)\sum_{r,s=1}^{n} a_r e^{-i(r-s)\lambda}a_s\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi,\pi]} f_\gamma(\lambda)\left[\sum_{r=1}^{n} a_r e^{-ir\lambda}\right]\left[\sum_{s=1}^{n} a_s e^{is\lambda}\right]d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi,\pi]} f_\gamma(\lambda)\left[\sum_{r=1}^{n} a_r e^{-ir\lambda}\right]\overline{\left[\sum_{r=1}^{n} a_r e^{-ir\lambda}\right]}\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi,\pi]} f_\gamma(\lambda)\left|\sum_{r=1}^{n} a_r e^{-ir\lambda}\right|^2 d\lambda.\end{aligned}$$

Como $f_\gamma(\lambda) \geq 0$, la integral anterior es no negativa, y entonces,

$$\sum_{r,s=1}^{n} a_r \gamma(r-s) a_s \geq 0,$$

estableciendo que $\gamma(\cdot)$ es no negativa definida. Esto establece que (ii) $\Rightarrow$ (i); una demostración de la implicación inversa, que es algo más técnica, no se dará aquí, y puede encontrarse en Brockwell y Davis (1998), Fuller (1998), o Shumway y Stoffer (2006).

Ejemplo 3.2.1. Aplicando el criterio espectral a la función:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } h = 0 \\ \rho, & \text{si } |h| = 1 \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

la cual fue analizada en la sección precedente, se obtiene la siguiente conclusión:

$$f\gamma(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)\cos(k\lambda) = 1 + 2\rho\cos(\lambda)$$

y la condición $f_\gamma(\lambda) \geq 0$ para todo λ equivale a $1 \geq 2|\rho|$, es decir, $|\rho| \leq 1/2$. De este modo, $\gamma(\cdot)$ es una función de autocovarianza si y sólo si, $|\rho| \leq 1/2$, en concordancia con el resultado de la sección anterior. Note que el esfuezo técnico en este caso es mucho menor aplicando el criterio espectral en el Teorema 3.2.1, que utilizando la verificación directa de la non negatividad.

Para analizar otro caso, considere ahora la función:

$$\gamma_1(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } |h| = 0 \\ .2, & \text{si } |h| = 5 \\ .4, & \text{si } |h| = 7 \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

para la cual se tiene,

$$f_{\gamma_1}(\lambda) = 1 - .4\cos(5\lambda) - .8\cos(7\lambda);$$

puesto que $f_{\gamma_1}(0) = -.2 < 0$, se desprende que $\gamma_1(\cdot)$ no es una función de autocovarianza. Note que la verificación directa de la condición de no negatividad para esta función no parece una tarea sencilla. En resumen, el criterio espectral en el Teorema 3.2.1 es un instrumento poderoso para comprobar si una función dada γ es o no de autocovarianza.

3.3. Filtros

En esta sección se discute la generación de nuevas series estacionarias a partir de otra. La idea principal ya ha sido utilizada anteriormente, como en el Ejemplo 2.3.1, donde a partir de un rudio blanco $\{Z_t\}$ se generaron nuevas series estacionarias; las construcciones en dicho ejemplo se generalizan a continuación. Sea $\ = \{ {}_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ una sucesión absolutamente sumable, esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} | \ {}_k| < \infty \tag{3.3.1}$$

A cada serie estacionaria $\{X_t\}$ se le asocia una nueva serie $\{Y_t\}$ especificada mediante:

$$Y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ {}_k X_{t-k} \tag{3.3.2}$$

La condición (3.3.1) garantiza que la serie definiendo Y_t converge absolutamente con probabilidad 1 y también en la media cuadrática (Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1998; Shumway y Stoffer, 2006).

Lema 3.3.1. Bajo la condición (3.3.1), para cada serie estacionaria $\{X_t\}$, la serie $\{Y_t\}$ especificada en (3.3.2) también es estacionaria. Más precisamente, si μ_X es la media común de las variables X_t y $\gamma_X(\cdot)$ es la función de autocovarianza de $\{X_t\}$, entonces,

$$E[Y_t] = \mu_X \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ {}_k,$$

y

$$\gamma_Y(h) = \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} {}_{k} \ {}_{s}\gamma_X(h-s+k) \tag{3.3.3}$$

Demostración. Utilizando las propiedades de continuidad de los operadores de esperanza y covarianza respecto a la media cuadrática (Royden, 2003; Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1998), se obtiene que:

$$E[Y_t] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{k}X_{t-k}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{k}E\left[X_{t-k}\right] = \mu_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{k},$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) &= \operatorname{Cov} \ \sum_{s=-\infty}^{\infty} {}_{s}X_{t+h-s}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{k}X_{t-k}\Bigg) \\ &= \sum_{s,k=-\infty}^{\infty} {}_{s} \ {}_{k}\operatorname{Cov}(X_{t+h-s}, X_{t-k}) \\ &= \sum_{s,k=-\infty}^{\infty} {}_{s} \ {}_{k}\gamma_X(h-s+k).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $E[Y_t]$ y $\operatorname{Cov}(Y_{t+h}, Y_t)$ no dependen de t, y entonces $\{Y_t\}$ es una serie estacionaria, con $\gamma_Y(\cdot)$ como se especificó en el enunciado del lema; note que los intercambios entre las sumatorias y los operadores de covarianza y valor esperado son legítimos, debido a la sumabilidad absoluta de los coeficientes ${}_{k}$.

Ejemplo 3.3.1. Suponga que $\{Z_t\}$ es un ruido blanco con media cero y varianza σ^2. Bajo la condición de sumabilidad absoluta en (3.3.1), la serie $\{Y_t = \sum_k \ {}_{k}Z_{t-k}\}$ como en (3.3.2) es estacionaria, y su función de autocovarianza está dada por:

$$\gamma_Y(h) = \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} {}_{k} \ {}_{s}\gamma_Z(h-s+k) = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{k} \ {}_{k+h},$$

donde para establecer la segunda igualdad se utilzó que $\gamma_Z(0) = \sigma^2$ y $\gamma_Z(r) = 0$ si $r \neq 0$. Note que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}_{k} \ {}_{k+h} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} {}_{s-h} \ {}_{s}$, de manera que la anterior fórmula puede escribirse como:

$$\gamma_Y(h) = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \;{}_{k}\;\;{}_{k+|h|}, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(a) Como caso particular, suponga que:

$$Y_t = Z_t + \;\;{}_1 Z_{t-1} + \cdots + \;\;{}_q Z_{t-q}$$

expresión que corresponde al caso $\;{}_0 = 1$ y $\;{}_k = 0$ si $k < 0$ o $k > q$. En este contexto,

$$\gamma_Y(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-|h|} \;{}_{i}\;\;{}_{i+|h|}, & \text{si } |h| \leq q, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(b) Si $Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}$, donde $|\phi| < 1$, entonces,

$$\gamma_Y(h) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \phi^{k+|h|} = \sigma^2 \phi^{|h|} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k} = \frac{\sigma^2 \phi^{|h|}}{1 - \phi^2}.$$

La serie $\{Y_t\}$ en (3.3.2) se denomina *promedio móvil* de la serie $\{X_t\}$; también se dice que $\{Y_t\}$ se obtiene filtrando la serie $\{X_t\}$ *a través del filtro* ; ésta última terminología será explicada posteriormente.

El operador de retardo B es un tipo especial de filtro, correspondiente a la sucesión $\;{}_k = 0$ si $k \neq 1$ y $\;{}_1 = 1$, de manera que la expresión (3.3.2) se reduce a $Y_t = X_{t-1}$, lo cual significa que la nueva serie Y_t se obtiene retardando la observación de la serie original en una unidad:

$$BX_t = X_{t-1}. \tag{3.3.4}$$

Las 'potencias' de B se especifican mediante:

$$B^k X_t = X_{t-k},$$

y con esta notación la serie (3.3.2) puede expresarse como:

$$Y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k B^k X_t.$$

Definiendo el operador:

$$\quad (B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k B^k$$

la ecuación anterior se escribirá, en adelante, como:

$$Y_t = \quad (B) X_t.$$

3.4. El Modelo Clásico

Como ya se ha mencionado, la idea de serie estacionaria es sumamente útil en el análisis de series de tiempo, pero es muy restrictiva para aplicarse directamente. En esta sección se discute un modelo general de series de tiempo que se acopla a situaciones prácticas, y en el cual las series estacionarias desempeñan un papel central. Como punto de partida, suponga que $\{Y_t\}$ es una serie estacionaria; si μ es el valor esperado de las variables Y_t y $X_t = Y_t - \mu$, entonces la serie $\{X_t\}$ también es estacionaria pero con media nula, y

$$Y_t = \mu + X_t. \tag{3.4.1}$$

En algunos casos, $\{Y_t\}$ puede modelar una serie interesante. Por ejemplo, suponga que se registra el número de clientes en un cine cada día lunes, de manera que Y_1 es el número de clientes el primer lunes de observación, Y_2 el número de asistentes en el segundo lunes, y en general Y_k es el número de clientes en el k-ésimo lunes. Con esta interpretación, al menos en el corto plazo, (3.4.1) es un modelo razonable para los datos Y_t, donde μ es el número promedio de clientes que visitan el cine *los días lunes*. Sin embargo, si el registro de clientes se lleva a cabo todos los días, de manera que Y_t es el número de clientes en el t-ésimo día de observación, ya no es razonable suponer que la media de Y_t es constante, pues, en general, los fines de semana, el cine recibe mucho más visitantes que los días lunes; de esta manera, la ecuación (3.4.1) debe reemplazarse por:

$$Y_t = \mu_t + X_t, \quad \text{donde } \mu_t = \mu_{t-7}; \tag{3.4.2}$$

note que la condición $\mu_t = \mu_{t-7}$ refleja el hecho de que el número esperado de visitantes en un día determinado, digamos lunes, es el mismo para todas las semanas bajo estudio. En este caso, se dice que μ_t es una función estacional (o periódica) con período 7. El modelo (3.4.2) es más razonable para el número de clientes del cine, y toma en cuenta que en los diversos días de la semana el número esperado de visitantes es, en general, diferente. Sin embargo, en el 'largo plazo', aún el número esperado de visitantes en el mismo día de la semana cambiará, por ejemplo, como consecuencia del incremento de la población en la ciudad, o por el efecto de la promoción constante que el cine despliega. Para reflejar este hecho, se incluye otra componente en el modelo, a saber, *la tendencia* m_t:

$$Y_t = m_t + \mu_t + X_t, \quad \text{donde } \mu_t = \mu_{t-7}; \tag{3.4.3}$$

Usualmente, $m_t = c_0 + c_1 t + c_2 t + \cdots + c_r t^r$, se selecciona como un polinomio de grado r cuyos coeficientes deben estimarse, pero otras elecciones para m_t son posibles. En general, el modelo clásico supone que las observaciones $\{Y_t\}$ se representan como:

$$Y_t = m_t + \mu_t + X_t, \quad \mu_t = \mu_{t-d} \tag{3.4.4}$$

donde μ_t es la componente estacional de período d, m_t es la función de tendencia, la cual comúnmente se supone polinomial, y $\{X_t\}$ es un porceso estacionario de media nula. Para determinar el grado de la tendencia polinomial, así como la magnitud d del período, es conveniente graficar los datos observados $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Una vez seleccionado el grado de la tendencia polinomial m_t, y el período d de la componente estacional, viene el importante problema de estimar los coeficientes de m_t y las cantidades $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ que determinan la componente estacional. Desde luego, la dificultad en esta dirección proviene de que m_t y μ_t se observan 'mezcladas' entre sí, y con X_t. Para disminuir este problema, se intenta separar μ_t de m_t mediante la aplicación de una transformación $\alpha(B) = \sum_j a_j B^j$, donde sólo un número finito de a_j's es no nulo, digamos $a_j = 0$ si $|j| > N$. Aplicando $\alpha(B)$ a la serie $\{Y_t\}$ se obtiene:

$$\tilde{Y}_t = \alpha(B)Y_t = \alpha(B)m_t + \alpha(B)\mu_t + \alpha(B)X_t.$$

Ahora se trata de seleccionar las constantes a_j de manera que:

$$\begin{aligned} \alpha(B)\mu_t &= \sum_{j=-N}^{N} a_j \mu_{t-j} = 0, \quad \text{cuando } \mu_t = \mu_{t-d} \\ \alpha(B)m_t &= \sum_{j=-N}^{N} a_j m_{t-j} = m_t \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Cuando se logra esto, se tiene que:

$$\tilde{Y}_t = m_t + \tilde{X}_t$$

donde $\tilde{X}_t = \alpha(B)X_t$ es una serie estacionaria; note que $\tilde{Y}_t = \alpha(B)Y_t = \sum_{j=-N}^{N} a_j Y_{t-j}$ es calculable en términos de las observaciones $Y_1, \ldots, Y_n$ cuando $N+1 \le t \le n-N$, así que, usando $\tilde{Y}_{N+1}, \ldots, \tilde{Y}_{n-N}$, se utilizan técnicas de regresión (Graybill, 2000) para estimar los coeficientes de la tendencia polinomial. Una vez realizada esta etapa, es posible estimar las cantidades $\mu_1, \ldots, \mu_d$ que determinan la componente estacional por completo; para detalles, vea Brockwell y Davis (1998), o Shumway y Stoffer (2006). Cuando (3.4.5) se satisface, se dice que $\alpha(B)$ detiene (elimina, o anula) a la componente estacional

μ_t, mientras que 'deja pasar', o 'filtra' a la componente m_t, motivando la denominación de filtro para el operador $\alpha(B)$. El diseño de un filtro $\alpha(B)$ que satisfaga (3.4.5) es un problema interesante por sí mismo, que a continuación se analizará en detalle para un ejemplo particular.

3.5. Construcción de un Filtro

En esta sección se ilustra la generación de un filtro que 'detenga' una componente estacional pero 'deje pasar' una tendencia polinomial. Para los propósitos de la ilustración, supondremos que la componente estacional tiene período tres, mientras que la tendencia polinomial tiene grado dos. El filtro $\alpha = \{a_r\}$ que se construirá es simétrico, en el sentido de que está determinado por una sucuesión finita,

$$a_{-N}, a_{-N+1} \ldots, a_{-1} a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N$$

donde,

$$a_{-r} = a_r, \quad r = 1, 2, \ldots, N.$$

de manera que,

$$a_j = 0, \quad |j| > N.$$

El número N es el orden del filtro y debe determinarse.

La discusión inicia con la determinación de las condiciones que el filtro $\alpha = \{a_k\}$ debe satisfacer para no distorsionar una tendencia polinomial de orden arbitrario.

Lema 3.5.1. El filtro $\alpha = \{a_j\}$ pasa una tendencia polinomial arbitraria de orden k, esto es,

$$m_t = \sum_j a_j m_{t-j}$$

para todos los polinomios $m_t = c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k$, si y sólo si,

$$\begin{cases} \sum_j a_j = 1, \\ \sum_j j^r a_j = 0, \quad \text{para } r = 1, 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

Demostración. Primeramente, dado un entero positivo r observe que:

$$\begin{aligned} \alpha(B)t^r &= \sum_j a_j (t-j)^r \\ &= \sum_j a_j \left[\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} t^{r-s}(-j)^s\right] \\ &= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} t^{r-s} \left[\sum_j a_j (-j)^s\right] \\ &= t^r \sum_j a_j + \sum_{s=1}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} t^{r-s} \left[\sum_j a_j j^s\right] \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

(a) *Suponga que el filtro $\alpha = \{a_j\}$ pasa sin distorsión a un polinomio arbitrario de grado k.* En este caso, $t^k = \sum_j a_j (t-j)^k$ para todo entero positivo t y, *vía* (3.5.2), se desprende que:

$$t^k = t^k \sum_j a_j + \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} t^{k-s} \left[\sum_j a_j j^s\right], \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

condición que inmediatamente muestra que (3.5.1) ocurre.

(b) Recíprocamente, *suponga que (3.5.1) se satisface.* En este contexto, (3.5.2) implica que $t^r = \sum_j a_j (t-j)^r$ para todo $r \leq k$ y cada entero t, esto es, el polinomio t^r pasa bajo el filtro $\alpha = \{a_j\}$ sin distorsión cuando $r \leq k$, y entonces, por linealidad, la acción del filtro no distorsiona a polinomios arbitrarios de grado $\leq k$.

Construcción de un filtro que no distorsiona una tendencia cuadrática y suprime una componente estacional de período 3.

Puesto que el filtro $\alpha = \{a_j\}$ no distorsiona tendencias cuadráticas, el lema precedente establece que las condiciones (3.5.1) deben satisfacerse con $k = 2$. Además, puesto que α se supone simétrico, la igualdad $\sum_j a_j j = 0$ se satisface automáticamente. Por lo tanto, en el presente caso de un filtro simétrico, las ecuaciones (3.5.1) se reducen a:

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j = 1, \quad \sum_{j=-N}^{N} a_j j^2 = 0. \tag{3.5.3}$$

A continuación se explorará la restricción de que el filtro elimina una componente estacional $\{s_t\}$ de período 3, la cual satisface $s_t = s_{t-3}$ para cada t y, por lo tanto, $s_{-1} + s_0 + s_1 = 0$. Esta igualdad muestra que la clase de todas las tendencias de período tres es un espacio vectorial de dimensión 2. Considere la tendencia $\{\tilde{s}_t\}$ especificada por:

$$\tilde{s}_{-1} = -1, \quad \tilde{s}_0 = 0, \quad \tilde{s}_1 = 1.$$

Esta tendencia, así como de las tendencias retardadas $\{\tilde{s}_{t-1}\}$ y $\{\tilde{s}_{t-2}\}$ se presentan a continuación:

$$\begin{array}{rccccccccccc} t: & \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \tilde{s}_t: & \cdots & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ \tilde{s}_{t-1}: & \cdots & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ \tilde{s}_{t-2}: & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \cdots \end{array} \tag{3.5.4}$$

El filtro $\alpha = \{a_t\}$ que se busca debe satisfacer:

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j \tilde{s}_{t-j} = 0, \quad \text{para cada entero } t. \tag{3.5.5}$$

Puesto que $\{\tilde{s}_t\}$ tiene período tres, esta ecuación se satisface si y sólo si, es válida para tres valores consecutivos de t, digamos, $t = 0, 1, 2$:

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j \tilde{s}_{-j} = 0, \quad \sum_{j=-N}^{N} a_j \tilde{s}_{-1-j} = 0, \quad \sum_{j=-N}^{N} a_j \tilde{s}_{-2-j} = 0.$$

En lo que concierne a la primera igualdad, observe que $\tilde{s}_j = -\tilde{s}_{-j}$, por (3.5.4); luego, usando la condición de simetría $a_j = a_{-j}$, la primera ecuación se satisface. Note ahora que $\tilde{s}_{-2-j} = -(\tilde{s}_{-1-j} + \tilde{s}_{-j})$, así que la segunda igualdad implica la tercera. Por lo tanto,

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j \tilde{s}_{-1-j} = 0 \tag{3.5.6}$$

y esta igualdad es equivalente a (3.5.5). Observe también que si $\{\tilde{s}_t\}$ satisface (3.5.5), entonces tal relación también es válida para $\{\tilde{s}_{t-1}\}$; puesto que $\{\tilde{s}_t\}$ y $\{\tilde{s}_{t-1}\}$ son linealmente independientes y el espacio de tendencias estacionales con período tres tiene dimensión 2, se sigue que el filtro simétrico $\alpha = \{a_t\}$ elimina tendencias con período tres si y sólo si, (3.5.6) ocurre.

A partir de (a) y (b), el filtro buscado debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j = 1, \quad \sum_{j=-N}^{N} a_j j^2 = 0, \quad \sum_{j=-N}^{N} a_j \tilde{s}_{-1-j} = 0.$$

Este sistema consta de tres ecuaciones, y para asegurar consistencia al menos tres incógnitas deben estar involucradas. Así, se selecciona el valor $N = 2$, puesto que en este caso el filtro $\alpha = \{a_t\}$ está determinado por la tripleta a_0, a_1, a_2. Sustituyendo $N = 2$ y usando la simetría del filtro, las ecuaciones anteriores pueden escribirse explícitamente como sigue:

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_1 + 4a_2 &= 0 \\ -a_0 + \ \ a_1 + \ \ a_2 &= 0. \end{aligned}$$

La solución a este sistema es $a_0 = 3/9$, $a_1 = 4/9$, $a_2 = -1/9$, y entonces el filtro que se busca está dado por:

$$a_t = 0, \quad |t| > 2, \quad a_0 = \frac{3}{9}, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{4}{9}, \quad a_2 = a_{-2} = -\frac{1}{9}.$$

CAPÍTULO 4

PROCESOS ARMA

En este capítulo se introduce una clase importante de procesos estacionarios que surgen resolviendo ecuaciones en diferencias, los cuales se denominan procesos ARMA. La variablilidad de esos procesos se debe a la presencia de un ruido blanco que influye en los datos observables de una manera simple, generando un modelo que es sencillo de analizar, pero lo suficientemente versátil para ser utilizado, ya que la función de autocovarianza de cualquier serie estacionaria $\{Y_t\}$ puede aproximarse, tanto como se desee, por la función de autocovarianza de un proceso ARMA adecuadamente seleccionado. La presentación incluye una discusión sobre la existencia y unicidad de processos ARMA, y finaliza con la introducción del concepto de *causalidad* de un proceso respecto a un ruido blanco.

4.1. Procesos ARMA

En esta sección se introduce una clase muy importante de procesos estacionarios, a saber, la familia de procesos autorregresivos y de promedios móviles, comúnmente referida como la clase ARMA de series estacionarias.

Definición 4.1.1. Considere un ruido blanco $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ y sea $\{X_t\}$ una serie estacionaria con media nula.

(i) La serie $\{X_t\}$ es un proceso de promedios móviles de orden q (MA(q)) si existen números (reales) $\theta_1, \ldots, \theta_q$ tales que:

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

(ii) El proceso $\{X_t\}$ es autorregresivo de orden p (AR(p)) si

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

para números (reales) $\phi_1, \ldots, \phi_p$;

(iii) La serie $\{X_t\}$ es un proceso autorregresivo y de promedios móviles de orden (p, q) (ARMA(p, q)) si existen números $\phi_1, \ldots, \phi_p$ y $\theta_1, \ldots, \theta_q$ tales que:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}. \quad (4.1.1)$$

Son varias las razones por las que los procesos ARMA desempeñan un papel importante en la teoría y aplicaciones de las series de tiempo: Primeramente, el problema de pronóstico puede analizarse de manera sencilla para esos procesos, y algoritmos generales—como el algoritmo de innovaciones—se implementan de manera simple y eficiente para estos procesos. Por otro lado, es claro que ningún proceso real obedecerá de manera exacta a un modelo teórico, pero para cualquier proceso estacionario $\{Y_t\}$, es posible seleccionar un proceso ARMA $\{X_t\}$ cuya función de autocovarianza esta arbitrariamente cercana a la de $\{Y_t\}$, en el sentido de que $\max_h |\gamma_X(h) - \gamma_Y(h)|$ es tan pequeña como se desee si el orden (p, q) y los coeficientes del proceso ARMA se eligen adecuadamente (Brockwell y Davis, 1998; Fuller, 1988).

Si $\phi_1, \ldots, \phi_p$ y $\theta_1, \ldots, \theta_q$ son como en la Definición 4.1.1, los polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ se especifican mediante:

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z_1 + \cdots + \theta_q z^q \tag{4.1.2}$$

y

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z_1 - \cdots - \phi_p z^p, \tag{4.1.3}$$

los cuales se denominan polinomio de promedios móviles y autorregresivo, respectivamente. Evaluando estos polinomios en el operador de retardo B, se obtiene que:

$$\theta(B)Z_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

y

$$\phi(B)X_t = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$$

de tal manera que las ecuaciones que satisface un proceso $\{X_t\}$ cuando es MA(q), AR(p) o ARMA(p, q) pueden escribirse como:

$$X_t = \theta(B)Z_t, \quad \phi(B)X_t = Z_t, \quad \text{y} \quad \phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

respectivamente. Las siguientes secciones se ocupan de los problemas de existencia y unicidad de soluciones a la ecuación (4.1.1). Más explícitamente, se analizarán las siguientes preguntas: Dado un ruido blanco $\{Z_t\}$ y los polinomios $\theta(z)$ y $\phi(z)$ ¿Existe un proceso estacionario $\{X_t\}$ que satisfaga (4.1.1)? y en caso afirmativo ¿es única la serie $\{X_t\}$?

4.2. Existencia

En esta sección se establece un criterio suficiente para garantizar que las ecuaciones (4.1.1) tengan una solución $\{X_t\}$. Las condiciones involucran a las raíces del polinomio autorregresivo $\phi(z)$. Primeramente, note que si $\phi(z) = 1$, las ecuaciones (4.1.1) se reducen a $X_t = \theta(B)Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ecuaciones que claramente tienen solución única. En adelante, se supondrá que $\phi(z)$ tiene grado $p > 1$, de manera que $\phi_p \neq 0$. En este caso, $\phi(z)$ posee p raíces, las cuales (pueden repetirse y) se denotarán mediante $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

$$\phi(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{4.2.1}$$

Debido a que $\phi(0) = 1$ (vea (4.1.3)), el polinomio autorregresivo se factoriza como:

$$\phi(z) = (1 - z/\xi_1)(1 - z/\xi_2) \cdots (1 - z/\xi_p) = \prod_{i=1}^{p} (1 - z\xi_i^{-1}). \tag{4.2.2}$$

Teorema 4.2.1. Si las raíces del polinomio autorregresivo $\phi(z)$ satisfacen:

$$|\xi_i| \neq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

entonces las siguientes afirmaciones (i)–(iii) son válidas.

(i) La función $1/\phi(z)$ se expande en serie de Laurent alrededor del círculo unitaro $|z| = 1$ (Alfhors, 1980; Rudin, 1984; Apostol, 1980). Más precisamente, existen constantes R_0 y R_1 con $R_0 < 1 < R_1$ tales que:

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ {}_k z^k, \quad R_0 < |z| < R_1 \tag{4.2.3}$$

donde la serie converge absolutamente en la región indicada,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\quad_k||z|^k < \infty, \quad R_0 < |z| < R_1.$$

(ii) Considere la sucesión $\quad = \{\quad_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ y el correspondiente filtro $\quad(B)$. Si la serie estacionaria $\{X_t\}$ se define como:

$$X_t = \quad (B)\theta(B)Z_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

entonces $\{X_t\}$ satisface las ecuaciones ARMA en (4.1.1).

(iii) Si $\{X_t\}$ y $\{\tilde{X}_t\}$ son dos soluciones a las ecuaciones (4.1.1), entonces $X_t = \tilde{X}_t$ para todo t.

De acuerdo a este resultado, cuando las raíces de $\phi(\cdot)$ no tienen módulo 1, entonces existe un proceso estacionario que satisface las ecuaciones ARMA, y dicho proceso es único. El argumento para establecer este teorema utiliza los resultados preliminares que se establecen en el siguiente Lema.

Lema 4.2.1. Sea a número (complejo) tal que $|a| \neq 1$. En este caso, las siguientes expansiones en serie son válidas para $1/(1 - z/a)$.

(i) Si $|a| > 1$, entonces, para cada entero positivo m,

$$\frac{1}{(1 - z/a)^m} = \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} \frac{z^{k-m+1}}{a^{k-m+1}} \quad \text{si } |z| < |a|.$$

Similarmente,

(ii) Cuando $|a| < 1$ y $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{(1 - z/a)^m} = (-1)^m \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} \frac{a^{k+1}}{z^{k+1}}, \quad \text{cuando } |a| < |z|.$$

Demostración. Recuerde que para cualquier número complejo r con $|r| < 1$, se tiene la siguiente expansión en serie:

$$\frac{1}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k. \tag{4.2.4}$$

Usando esta relación con $|r|$ en lugar de r, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |r|^k = 1/(1-|r|) < \infty,$$

de manera que la convergencia de la serie anterior es absoluta. Puesto que una serie puede derivarse término a término en su región de convergencia (Fulks, 1982; Khuri, 2002), a partir de (4.2.4) se desprende que:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1}$$

Derivando sucesivamente,

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{(1-r)^2} = \frac{2\cdot 1}{(1-r)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) r^{k-2},$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{(1-r)^3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(1-r)^4} = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) r^{k-3},$$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{(1-r)^4} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(1-r)^5} = \sum_{k=4}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3) r^{k-4}.$$

En general, aplicando esta idea, se llega a la siguiente expresión para cualquier entero $m \geq 1$,

$$\frac{(m-1)!}{(1-r)^m} = \sum_{k=m-1}^{\infty} (k)_{m-1} r^{k-m+1},$$

donde $(k)_s = k(k-1)\cdots(k-s+1)$ es el número de permutaciones de tamaño s de un conjunto de tamaño k. Recordando que:

$$\frac{(k)_s}{s!} = \binom{k}{s},$$

se desprende que:

$$\frac{1}{(1-r)^m} = \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} r^{k-m+1}, \quad |r| < 1, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.2.5}$$

donde la serie converge absolutamente.

(i) Suponga que $|a| > 1$ y sea z tal que $|z/a| < 1$. Sustituyendo r por z/a en (4.2.5) se desprende que:

$$\frac{1}{(1-z/a)^m} = \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} \frac{z^{k-m+1}}{a^{k-m+1}}, \quad |z| < |a|, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.2.6}$$

y la serie es absolutamente convergente.

(ii) Suponga ahora que $|a| < 1$ y sea z tal que $|a/z| < 1$, esto es $|z| > |a|$. Usando (4.2.6) con a/z en lugar de r, se obtiene:

$$\frac{1}{(1-a/z)^m} = \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} \frac{a^{k-m+1}}{z^{k-m+1}};$$

multiplicando ambos lados por $1/(z/a)^m = (a/z)^m$ se desprende que:

$$\frac{1}{(z/a-1)^m} = \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} \frac{a^{k+1}}{z^{k+1}},$$

y entonces, para todo z tal que $|z| > |a|$

$$\frac{1}{(1-z/a)^m} = (-1)^m \sum_{k=m-1}^{\infty} \binom{k}{m-1} \frac{a^{k+1}}{z^{k+1}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Demostración del Teorema 4.2.1. Sean $a_1, \ldots, a_d$ las raíces diferentes de $\phi(\cdot)$. Con esta notación, cada a_i es igual a algún ξ_j en (4.2.2); si m_i es el número de veces que a_i se repite en la sucesión $\xi_1, \ldots, \xi_p$, la factorización (4.2.2) puede escribirse como:

$$\phi(z) = \prod_{i=1}^{d} (1 - z/a_i)^{m_i}$$

de manera que:

$$\frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{d}(1 - z/a_i)^{m_i}} \tag{4.2.7}$$

Utilizando la descomposición en fracciones parciales para una función racional (Fulks, 1982; Khuri, 2002), la anterior expresión puede escribirse como:

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ji}}{(1 - z/a_i)^j}.$$

Por el Lemma 4.2.1, cada término en la suma precedente puede expresarse como:

$$\frac{A_{ji}}{(1 - z/a_i)^j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k^{(i\,j)} z^k$$

donde la serie converge absolutamente en una región de la forma:

$$R_{i\,j} < |z| < R^{i\,j}$$

donde $R_{i\,j} < 1 < R^{i\,j}$. Combinando las tres relaciones desplegadas se desprende que $1/\phi(z)$ puede expresarse como en (4.2.3), donde la serie converge absolutamente en la región $R_0 < |z| < R_1$, y las constantes están dadas por $R_0 = \max\{R_{i\,j}\} < 1$ y $R_1 = \min\{R^{i\,j}\} > 1$.

(ii) Como la serie en (4.2.3) converge absolutamente en una región que incluye al círculo unitario, se desprende que la $\sum_k | \quad _k| < \infty$. Por lo tanto, el filtro $\quad (B)$ está bien definido y la serie $X_t = \quad (B)\theta(B)Z_t$ es estacionaria. Más aún,

$$\phi(B)X_t = \phi(B) \quad (B)\theta(B)Z_t = \theta(B)Z_t \tag{4.2.8}$$

pues, recordando que $\phi(z) \quad (z) = \phi(z)[1/\phi(z)] = 1$ obtiene que:

$$W_t = \phi(B) \quad (B)W_t$$

para cada serie estacionaria, hecho que fue utilizado con $W_t = \theta(B)Z_t$ para establecer la segunda igualdad en (4.2.8). Por lo tanto, X_t satisface las ecuaciones ARMA.

(iii) Si $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, y $\phi(B)\tilde{X}_t = \theta(B)Z_t$, entonces $\phi(B)X_t = \phi(B)\tilde{X}_t$; aplicando el filtro (B) en ambos lados de esta igualdad se concluye que $X_t = (B)\phi(B)X_t = (B)\phi(B)\tilde{X}_t = \tilde{X}_t$, completando la demostración del teorema.

El argumento usado para establecer el Teorema 4.2.1 revela que en la expansión (4.2.3) aparecen potencias negativas de z sólo cuando alguna de las raíces ξ_i de $\phi(z)$ tiene módulo menor a 1. Este hecho es importante, y para propósitos de referencia futura se resalta a continuación.

Corolario 4.2.1. Si todas las raíces de $\phi(z)$ tienen módulo mayor que 1, entonces los coeficientes $_k$ en (4.2.3) son tales que $_k = 0$ para $k < 0$, de manera que:

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k Z_{t-k}.$$

4.3. Raíces Sobre el Círculo Unitario

El criterio para la existencia de un proceso ARMA establece que si el polinomio autorregresivo no se anula sobre el círculo unitario, entonces tal proceso existe. Luego, es interesante analizar que sucede cuando $\phi(z) = 0$ para algún z con módulo 1; como se muestra en el siguiente teorema, en ese caso las ecuaciones ARMA no necesariamente tienen solución.

Teorema 4.3.1. Suponga que los polinomios $\phi(z)$ y $\theta(z)$ no tienen raíces comunes. En este caso, si $\phi(\alpha) = 0$ para algún número complejo α con $|\alpha| = 1$, entonces, *no* *existe proceso estacionario* $\{X_t\}$ *que satisfaga las ecuaciones* $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Demostración. Como $\phi(z)$ y $\theta(z)$ no tienen raíces comunes, la condición $\phi(\alpha) = 0$ implica que:

$$\theta(\alpha) \neq 0. \tag{4.3.1}$$

Por otro lado, debido a que α es una raíz de $\phi(z)$, es posible factorizar $\phi(z)$ como:

$$\phi(z) = (1 - z\alpha^{-1})\tilde{\phi}(z) \tag{4.3.2}$$

donde el polinomio $\tilde{\phi}(z)$ tiene grado $p-1$. A partir de este punto el argumento es por contradicción. Suponga que para algún proceso estacionario $\{X_t\}$ se satisface que:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

y considere el nuevo proceso estacionario $\{Y_t\}$ especificado mediante,

$$Y_t = \tilde{\phi}(B)X_t$$

En este caso,

$$\begin{aligned} Y_t - \alpha^{-1}Y_{t-1} &= (1 - B\alpha^{-1})Y_t \\ &= (1 - B\alpha^{-1})\tilde{\phi}(B)X_t \\ &= \phi(B)X_t \\ &= \theta(B)Z_t, \end{aligned}$$

donde se utilizó la factorización (4.3.2) para establecer la tercera igualdad. A continuación, a partir de la igualdad $Y_t - \alpha^{-1}Y_{t-1} = \theta(B)Z_t$ se desprende que:

$$Y_t = \theta(B)Z_t + \alpha^{-1}Y_{t-1} = \theta(B)Z_t + \alpha^{-1}\theta(B)Z_{t-1} + \alpha^{-2}Y_{t-2},$$

y en general, para cada entero positivo N,

$$Y_t = \sum_{k=0}^{N} \alpha^{-k}\theta(B)Z_{t-k} + \alpha^{-N-1}Y_{t-N-1}$$

Ahora se estudiará la suma en esta expresión:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \alpha^{-k}\theta(B)Z_{t-k} &= \sum_{k=0}^{N} \alpha^{-k}\sum_{s=0}^{q}\theta_s Z_{t-k-s} \\ &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{q}\alpha^{-k}\theta_s Z_{t-k-s}\end{aligned}$$

de donde se desprende que:

$$Y_t - \alpha^{-N-1}Y_{t-N-1} = \sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{q}\alpha^{-k}\theta_s Z_{t-k-s}. \tag{4.3.3}$$

En esta última sumatoria, se agruparán los términos de acuerdo al valor de $m = k + s$, y luego se sumara desde $m = 0$ hasta su valor máximo, que es $m = N + q$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{q}\alpha^{-k}\theta_s Z_{t-k-s} &= \sum_{m=0}^{N+q}\ \sum_{\substack{s,k:\ s+k=m\\ 0\le s\le q,\ 0\le k\le N}} \alpha^{-k}\theta_s Z_{t-k-s} \\ &= \sum_{m=0}^{N+q}\ \sum_{\substack{s,k:\ s+k=m\\ 0\le s\le q,\ 0\le k\le N}} \alpha^{-k}\theta_s Z_{t-m} \\ &= \sum_{m=0}^{N+q} Z_{t-m}c_m\end{aligned}$$

donde,

$$c_m = \sum_{\substack{s,k:\ s+k=m\\ 0\le s\le q,\ 0\le k\le N}} \alpha^{-k}\theta_s; \tag{4.3.4}$$

combinado este desarrollo con (4.3.3) se obtiene:

$$Y_t - \alpha^{-N-1}Y_{t-N-1} = \sum_{m=0}^{N+q} Z_{t-m}c_m \tag{4.3.5}$$

Ahora se analizará el valor de c_m. Suponga que $q \leq m \leq N$ y note que en la suma que define a c_m, la igualdad $k = m - s$ ocurre y $0 \leq s \leq q$, de manera que la condición $0 \leq k \leq N$ se satisface automáticamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{\substack{s,k:\ s+k=m \\ 0 \leq s \leq q,\ 0 \leq k \leq N}} \alpha^{-k}\theta_s \\ &= \sum_{0 \leq s \leq q,} \alpha^{-(m-s)}\theta_s \\ &= \alpha^{-m}\sum_{s=0}^{q}\alpha^{s}\theta_s = \alpha^{-m}\theta(\alpha) \end{aligned}$$

y puesto que $|\alpha| = 1$, se desprende que:

$$|c_m| = |\theta(\alpha)| \quad \text{si } q \leq m \leq N. \tag{4.3.6}$$

Tomando ahora la norma cuadrática en ambos lados de (4.3.5) y recordando que $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, se obtiene que (Graybill, 2001; Lipchutz, 1995):

$$\|Y_t - \alpha^{-N-1}Y_{t-N-1}\|^2 = \sum_{m=0}^{N+q}\|Z_{t-m}\|^2|c_m| \geq \sum_{m=q}^{N}\|Z_{t-m}\|^2|c_m|^2$$

y entonces,

$$\|Y_t - \alpha^{-N-1}Y_{t-N-1}\|^2 \geq \sum_{m=q}^{N}\sigma^2|\theta(\alpha)|^2 = (N-q)\sigma^2|\theta(\alpha)|^2.$$

Finalmente, la desigualdad del triángulo y la estacionaridad de la serie $\{Y_t\}$ implican que:

$$\|Y_t - \alpha^{-N-1}Y_{t-N-1}\| \leq \|Y_t\| + |\alpha|^{-N-1}\|Y_{t-N-1}\| \leq 2\gamma_Y(0)$$

y junto con la precedente desigualdad desplegada, esta relación implica que:

$$2\gamma_Y(0) \geq (N-q)\sigma^2\|\theta(\alpha)|^2$$

y entonces,

$$\frac{2\gamma_Y(0)}{N-q} \geq \sigma^2 \|\theta(\alpha)|^2.$$

Tomando el límite cuando N tiende a infinito, se llega a $\theta(\alpha) = 0$, lo cual contradice (4.3.1). El origen de esta contradicción es el supuesto de que existe una serie estacionaria $\{X_t\}$ que satisface $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, por lo que se concluye que tal serie no existe.

4.4. Causalidad

De acuerdo al Teorema 4.2.1, cuando el polinomio autorregresivo $\phi(z)$ no tiene raíces sobre el círculo unitario, las ecuaciones $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ tienen la única solución

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k Z_{t-k} \tag{4.4.1}$$

donde $\quad (z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \quad {}_k z^k = \theta(z)/\phi(z)$. La perturbación Z_t se manifiesta en el tiempo t, así que,

$$\text{si} \quad {}_k = 0 \text{ para } k < 0, \text{ entonces } X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \quad {}_k Z_{t-k}$$

y la observación X_t es una función de las perturbaciones Z_r que han ocurrido antes de t, o en el tiempo t. En contraste, si $\quad {}_k \neq 0$ para algún $k < 0$, entonces la suma en (4.4.1) contiene el término $\quad {}_k Z_{t-k}$, en el cual $t - k > t$, indicando que Z_{t-k} se manifestará en un tiempo posterior a t, de modo que X_t depende de perturbaciones que surgirán en el futuro, situación que no se antoja razonable. Cuando $\quad {}_k = 0$ para $k < 0$, se dice que la *serie* $\{X_t\}$ *es una función causal de* $\{Z_t\}$. A partir de la demostración del Teorema 4.2.1, es claro que para que un coeficiente $\quad {}_k$ con $k < 0$ sea no nulo es necesario y suficiente que el polinomio autorregresivo $\phi(z)$

tenga raíces dentro del círculo unitario. Por lo tanto, la causalidad del proceso $\{X_t\}$ depende sólo del polinomio autorregresivo.

Definición 4.4.1. Un polinomio $\phi(z)$ de grado p mayor a cero se denomina *causal* si y sólo si, todas sus raíces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ se ubican fuera del disco unitario, esto es,

$$|\xi_i| > 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Debido a que determinar las raíces de un polinomio $\phi(z)$ no es, en general, una tarea sencilla, es conveniente disponer de un criterio que permita decidir si el polinomio es causal o no, *sin determinar sus raíces*. En la literatura, es posible encontrar enunciado uno de tales criterios para polinomios de grado dos, el cual se discute a continuación. Como se verá después del siguiente análisis, el problema de construir un criterio para la causalidad de un polinomio es realmente interesante.

Ejemplo 4.4.1. En la literatura se propone el siguiente criterio para la causalidad de un polinomio,

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$$

de grado dos con coefficientes reales. Para que $\phi(z)$ sea un polinomio causal es necesario (Brockwell and Davis, 1998) que los coeficientes (ϕ_1, ϕ_2) satisfagan,

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1, \\ \phi_1 - \phi_2 &< 1, \\ |\phi_2| &< 1. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Estas condiciones se proponen como necesarias y suficientes en Shumway y Stoffer (2006).

A continuación se analizará la necesidad de las condiciones (4.4.2) para la causalidad de $\phi(z)$. Como antes, las raíces de $\phi(z)$ se denotarán mediante ξ_1

y ξ_2. Utilizando que $\phi(z) = (1 - \xi_1^{-1}z)(1 - \xi_2^{-1}z)$ se desprenden las siguientes expresiones para los coeficiente ϕ_1 y ϕ_2:

$$\phi_1 = \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2}, \quad \phi_2 = -\frac{1}{\xi_2\xi_1}. \tag{4.4.3}$$

Para verificar la necesidad de las condiciones (4.4.2) debe mostrarse que:

$$|\xi_1| > 1 \quad \text{y} \quad |\xi_2| > 1 \Rightarrow (4.4.2). \tag{4.4.4}$$

Considere los siguientes dos casos:

Caso 1: Las raíces de ϕ son genuinamente complejas, en el sentido de que su parte imaginaria es no nula:

$$\xi_1 = a + ib, \quad \text{y} \quad \xi_2 = a - ib, \quad b \neq 0.$$

En estas circunstancias

$$\phi_1 = \frac{1}{a+ib} + \frac{1}{a-ib} = \frac{2a}{a^2+b^2}, \quad \phi_2 = -\frac{1}{(a+ib)(a-ib)} = -\frac{1}{a^2+b^2}$$

así que,

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2a+1}{a^2+b^2}.$$

Observe ahora que:

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_2 < 1 &\iff \frac{2a+1}{a^2+b^2} < 1 \\ &\iff 2a + 1 < a^2 + b^2 \\ &\iff 2 < (a-1)^2 + b^2 \end{aligned}$$

Así, si (4.4.4) ocurre, entonces debe tenerse la siguiente implicación:

$$a^2 + b^2 > 1 \Rightarrow 2 < (a-1)^2 + b^2.$$

Sin embargo, poniendo $a = 1.01$ y $b = 0.01$ se sigue que $a^2 + b^2 > 1$ y entonces, $(a-1)^2 + b^2 = 0.0002 < 2$, de manera que la implicación anterior no se satisface, y por lo tanto en el caso actual, la afirmación (4.4.4) *no es correcta.*

Caso 2: Las raíces ξ_1 y ξ_2 son reales.

En este contexto se analizarán tres casos exahustivos.

(i) $\xi_1 > 0$ y $\xi_2 > 0$. En esta situación, si (4.4.4) es válida, entonces la siguiente afirmación es correcta:

$$\xi_1 > 1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 \Rightarrow \phi_1 - \phi_2 < 1$$

Por medio de (4.4.3) esto es equivalente a:

$$\xi_1 > 1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 \Rightarrow \frac{\xi_2 + \xi_1 + 1}{\xi_1 \xi_2} < 1$$

Sin embargo, poniendo $\xi_1 = 2 = \xi_2$, no es difícil ver que que la anterior implicación es falsa. En consecuencia, (4.4.4) falla también en el cotexto actual.

(ii) $\xi_1 < 0$ y $\xi_2 < 0$. En estas condiciones, $\xi_1 \xi_2 > 0$ y

$$\left.\begin{array}{c} \xi_1 < -1 \\ \text{y} \\ \xi_2 < -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 + 1}{\xi_1 \xi_2} < \dfrac{\xi_1}{\xi_1 \xi_2} = \dfrac{1}{\xi_2} < 0 < 1 \\ \phi_1 + \phi_2 = \dfrac{\xi_1 + \xi_2 - 1}{\xi_1 \xi_2} < \dfrac{\xi_1}{\xi_1 \xi_2} = \dfrac{1}{\xi_2} < 0 < 1 \\ |\phi_2| = \dfrac{1}{|\xi_1 \xi_2|} = \dfrac{1}{\xi_1 \xi_2} < 1 \end{cases}$$

Así, (4.4.4) ocurre en el presente contexto.

(iii) Las raíces son reales con diferente signo. En este caso $\xi_1 \xi_2 < 0$ y, sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $\xi_1 < 0$ y $\xi_2 > 0$. Note ahora que:

$$\xi_1 < -1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 \Rightarrow \phi_2 < 0 \quad \text{y} \quad |\phi_2| = \frac{1}{|\xi_1| \xi_2} < 1$$

$$\begin{aligned} \xi_1 < -1 \quad \text{y} \quad \xi_2 > 1 &\Rightarrow \xi_1 \xi_2 < 0, \quad \xi_2 > 1 \quad \text{y} \quad \xi_1 + \xi_2 + 1 > \xi_1 \\ &\Rightarrow \xi_2 > 1 \quad \text{y} \quad \frac{\xi_1 + \xi_2 + 1}{\xi_1 \xi_2} < \frac{1}{\xi_2} \\ &\Rightarrow \frac{\xi_1 + \xi_2 + 1}{\xi_1 \xi_2} < 1 \\ &\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 < 1 \\ &\Rightarrow \phi_1 + \phi_2 < 1 \end{aligned}$$

donde la penúltima implicación se debe a (4.4.3), y la desigualdad $\phi_2 < 0$ fue utilizada en el último paso. Las dos últimas relaciones desplegadas implican que (4.4.4) ocurre en las presentes circunstancias.

CAPÍTULO 5

CRITERIO INTEGRAL DE CAUSALIDAD

En este capítulo se presenta el resultado principal de este trabajo, a saber, un criterio para determinar si el polinomio autorregresivo de un proceso ARMA es causal. El criterio en cuestión involucra la integral de una función racional sobre el círculo unitario en el plano complejo, y es un caso particular del denominado teorema del residuo en la teoría de funciones de variable compleja (Alfhors, 1980); sin embargo, hasta el mejor de los conocimientos del autor, este criterio no ha sido explícitamente establecido ni utilizado en la literatura de series de tiempo. Así, la presentación inicia con una discusión de la integral de una función continua sobre el círculo unitario, y se ejemplifica esta noción en los casos más sencillos y útiles. Posteriormente, se establece el criterio de causalidad para un polinomio, y se demuestra la validez del criterio en el caso más simple, a saber, aquél en que el polinomio bajo análisis es de grado uno. Utilizando este caso particular, el criterio general se demuestra por medio de la descomposición en fracciones parciales de una función racional (Fulks, 1980; Khuri, 2002). La presentación conluye con una implementación práctica del criterio en el lenguaje R.

5.1. Integrales Sobre el Círculo Unitario

El criterio de causalidad para un polinomio $\phi(z)$ que se presenta en la siguiente sección involucra la idea de integral de una función sobre el círculo de radio 1 en el plano complejo, concepto que se introduce a continuación. Primeramente, defina:

$$\mathcal{C} = \{z \,|\, z \text{ es un número complejo con } \ |z| = 1\}.$$

Definición 5.1.1. Dada una función continua $f(\cdot)$ sobre el círculo $\mathcal{C}$, la integral de f sobre $\mathcal{C}$ se denota mediante $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$ y se define como:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = i \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\lambda})\, e^{i\lambda} d\lambda.$$

La racionalidad detrás de esta especificación, proviene de la observación de que, cuando λ varía en $(-\pi, \pi]$, el punto $z = e^{i\lambda} = \cos(\lambda) + i \sin(\lambda)$ recorre todo el círculo $\mathcal{C}$ una vez y $dz/d\lambda = ie^{i\lambda}$. Note que si f y g son dos funciones continuas definidas en $\mathcal{C}$, entonces para todos los números complejos a y b,

$$\int_{\mathcal{C}} [af(z) + bg(z)]\, dz = a \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz + b \int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz,$$

es decir, la integral sobre $\mathcal{C}$ es una transformación lineal, y

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz - \int_{\mathcal{C}} g(z)\, dz \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\lambda}) - g(e^{i\lambda})|\, d\lambda; \tag{5.1.1}$$

vea, por ejemplo, Apostol (1980), o Royden (2003). Ahora se ilustrará esta idea en un caso muy simple y útil.

Ejemplo 5.1.1. Si n es un entero y $f(z) = z^n$, entonces $f(e^{i\lambda}) = e^{in\lambda}$ por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{C}} z^n\, dz = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda}\, e^{i\lambda}\, d\lambda = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)\lambda}\, d\lambda.$$

Entonces, si $n \neq -1$, utilizando que la función $\lambda \mapsto e^{i\lambda}$ tiene período 2π,

$$\int_{\mathcal{C}} z^n \, dz = \left. \frac{e^{i(n+1)\lambda}}{(n+1)} \right| = e^{i(n+1)\pi} - e^{-i(n+1)\pi} = 0,$$

mientras que:

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-1} \, dz = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i0\lambda} d\lambda = i \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda = 2\pi i.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathcal{C}} z^n \, dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{si } n = -1; \end{cases} \tag{5.1.2}$$

particularmente si $P(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_k z^k$ es un polinomio arbitrario de grado k, entonces $\int_{\mathcal{C}} P(z) \, dz = 0$.

5.2. Criterio de Causalidad

En esta sección se utiliza la idea de integral sobre el círculo unitario para obtener una fórmula para el número de raíces de un polinomio arbitrario $\phi(z)$ que se ubican dentro del círculo unitario. Primeramente, sean $a_1, \ldots, a_d$ las raíces diferentes de $\phi(z)$, de tal manera que:

$$\phi(z) = c(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_d)^{m_d} = c \prod_{i=1}^{d} (z - a_i)^{m_i} \tag{5.2.1}$$

donde m_i es la multiplicidad de la raíz a_i, de modo que:

$$k = m_1 + \cdots + m_d$$

es el grado del polinomio, y $c = (-1)^k \phi(0)/[a_1^{m_1} \cdots a_d^{m_d}]$. Contando las multiplicidades, el número de raíces de $\phi(z)$ que se ubican dentro del círculo unitario es:

$$\sum_{i:\ |a_i| < 1} m_i, \tag{5.2.2}$$

y el siguiente resultado establece que dicho número puede expresarse mediante una integral sobre el círculo unitario.

Teorema 5.2.1. Si $\phi(z)$ es un polinomio con raíces distintas $a_1, a_2 \ldots, a_d$, cada una con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_d$, respectivamente (como en (5.2.1)), y si $\phi(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z| = 1$, entonces:

(i)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz = \sum_{i:\ |a_i|<1} m_i.$$

Por lo tanto,

(ii) El polinomio $\phi(z)$ es causal si y sólo si,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\, dz = 0.$$

La expresión en la parte (i) de este teorema es conocida en la teoría de funciones de variable compleja, y se desprende de forma directa de la denominada fórmula de Cauchy (Alfhors, 1980; Rudin, 1984); sin embargo, hasta el mejor de los conocimientos del autor, esta idea no se ha usado directamente en el análisis de series de tiempo. Antes de abordar la demostración del Teorema 5.2.1 en forma general, primero se estudiará un caso particular sencillo.

5.3. El Caso de un Polinomio Lineal

Considere un polinomio $\phi(z)$ de grado 1, de tal manera que $\phi(\cdot)$ se escribe como:

$$\phi(z) = c(z - a)$$

donde a es la única raíz de $\phi(z)$. En este caso $\phi'(z) = c$ y entonces,

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{c}{c(z-a)} = \frac{1}{z-a},$$

de manera que:

$$\int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\,dz = \int_C \frac{1}{z-a}\,dz.$$

Usando esta relación, la parte (i) del Teorema 5.2.1 establece que, si $|a| \neq 1$, entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-a}\,dz = \begin{cases} 1, & \text{si } |a| < 1 \\ 0, & \text{si } |a| > 1. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

El objetivo de esta sección es verificar esta expresión.

Lema 5.3.1. Si $|a| \neq 1$, entonces la fórmula (5.3.1) es válida.

Demostración. *Suponga que* $|a| < 1$. En este caso, para cada z tal que $|z| = 1$ se tiene que:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k-1}$$

donde la segunda igualdad se debe a la expansión (4.2.4) aplicada al caso $r = az^{-1}$; recuerde que $|z| = 1$ y note que $|r| = |az^{-1}| = |a| < 1$, de manera que la aplicación de (4.2.4) es legítima. Ahora, defina $S_n(z)$ como la n-ésima suma parcial de la serie anterior, esto es:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} \tag{5.3.2}$$

y observe que:

$$\left|\frac{1}{z-a} - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a^k z^{-k-1}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |a|^k\right| = \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}.$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad (5.1.1) se desprende que:

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}\,d\lambda = 2\pi\frac{|a|^{n+1}}{1-|a|}.$$

y tomando límite conforme n tiende a ∞, esta relación implica que:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz. \tag{5.3.3}$$

Observe ahora que para cada entero positivo n,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a^k z^{-k-1} = z^{-1} + az^0 + a^2 z + \cdots + a^n z^{-n-1},$$

de tal modo que:

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}} z^{-1}\,dz + a\int_{\mathcal{C}} z^0\,dz + a^2\int_{\mathcal{C}} z\,dz + \cdots + a^n \int_{\mathcal{C}} z^{-n-1}\,dz;$$

utilizando la igualdad (5.1.2) establecida en el Ejemplo 5.1.1, es claro que todas las integrales en el lado derecho se anulan, excepto la primera que es igual a $2\pi i$, y por lo tanto $\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz = 2\pi i$; combinando esta relación con (5.3.3) se obtiene que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = 1 \qquad \text{cuando } |a| < 1,$$

de conformidad con (5.3.1).

Suponga que $|a| > 1$. En esta circunstancia observe que para cada z tal que $|z| = 1$ se tiene que:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-za^{-1}} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} z^k a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a^{-k-1}$$

donde, como antes, la segunda igualdad se debe a la expansión (4.2.4) aplicada al caso $r = za^{-1}$; note que, como $|z| = 1$, se tienen las relaciones $|r| = |za^{-1}| = |a|^{-1} < 1$, de manera que la aplicación de (4.2.4) es posible. Procediendo de manera similar al caso anterior, defina $S_n(z)$ como la n-ésima suma parcial de la serie que aparece en el desplegado precedente, es decir,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k a^{-k-1} \tag{5.3.4}$$

y note que:

$$\left|\frac{1}{z-a} - S_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} z^k a^{-k-1}\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |a|^{-k-1}\right| = \frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}}.$$

Combinando esta relación con la desigualdad (5.1.1), se concluye que:

$$\left|\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}}\,d\lambda = 2\pi\frac{|a|^{-n-1}}{1-|a|^{-1}},$$

y tomando el límite conforme n tiende a ∞, esto implica que:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz. \tag{5.3.5}$$

Para concluir, note que para cada entero positivo n,

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k a^{-k-1} = z^0 a^{-1} + z a^0 + z^2 a + \cdots + z^n a^{-n-1},$$

de tal modo que:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz \\ &\quad = a^{-1}\int_{\mathcal{C}} z^0\,dz + a^0 \int_{\mathcal{C}} z\,dz + a^1 \int_{\mathcal{C}} z^2\,dz + \cdots + a^{-n-1}\int_{\mathcal{C}} z^n\,dz;\end{aligned}$$

utilizando de nueva cuenta la igualdad (5.1.2) establecida en el Ejemplo 5.1.1, es claro que todas las integrales en el lado derecho se anulan, y entonces, $\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,dz = 0$; combinando esta relación con (5.3.5) se obtiene que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a}\,dz = 0 \quad \text{cuando } |a| > 1,$$

completando la verificación de (5.3.1).

5.4. El Caso General

En esta sección se establecerá el Teorema 5.2.1 para un polinomio arbitrario $\phi(\cdot)$ de grado positivo.

Demostración del Teorema 5.2.1. Factorice $\phi(z)$ como en (5.2.1), y suponga que ninguna de las raíces diferentes a_i tiene módulo 1. A partir de la relación,

$$\phi(z) = c\prod_{i=1}^{d}(z-a_i)^{m_i},$$

la fórmula para la derivada de un producto permite concluir que:

$$\begin{aligned}
\phi'(z) &= c\,\frac{d}{dz}\prod_{1\le i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\
&= c\,m_1(z-a_1)^{m_1-1}\prod_{2\le i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\
&\quad + c\,m_2(z-a_2)^{m_2-1}\prod_{1\le i\neq 2,\, i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\
&\quad + c\,m_3(z-a_3)^{m_3-1}\prod_{1\le i\neq 3,\, i\le d}(z-a_i)^{m_i}\\
&\quad + \cdots\\
&\quad + c\,m_d(z-a_d)^{m_d-1}\prod_{1\le i\neq d,\, i\le d}
\end{aligned}$$

y entonces,

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \sum_{i=1}^{d}\frac{m_i}{z-a_i}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{d} m_i\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{z-a_i}\,dz$$

y combinando esta igualdad con el Lemma 5.3.1, se desprende que:

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\,dz = \sum_{i:\ |a_i|<1} m_i$$

estableciendo la parte (i), y a partir de este punto la parte (ii) se obtiene de inmediato.

5.5. Implementación del Criterio

El Teorema 5.2.1 expresa la cantidad de raíces de un polinomio que se ubican dentro del círculo unitario mediante una integral y, por supuesto, la gran ventaja de la fórmula establecida en el Teorema 5.2.1(i) es que la integral puede calcularse, al menos aproximadamente, sin conocer las raíces. Para propósitos de ilustración, a continuación se muestra la implementación de un algoritmo para evaluar el número de raíces de un polinomio que tienen módulo menor a uno. Para empezar, note que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi'(e^{i\lambda})}{\phi(e^{i\lambda})}\,ie^{i\lambda}d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\phi'(e^{i\pi\omega})}{\phi(e^{i\pi\omega})}\,e^{i\pi\omega}\,d\omega \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

donde la segunda igualdad se obtuvo a través del cambio de variable $\lambda = \pi\omega$. Para calcular esta última integral se utilizó el lenguaje R. La idea del procedimiento es la siguiente:

- **Primero**, se formuló una función que permite evaluar un polinomio de grado mayor o igual a 1 en cualquier punto deseado x. Dicha función se denominó `evalpol` y acepta dos argumentos: el primero es un vector $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ que corresponde a los coeficientes del polinomio:

$$p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$$

para el cual se desea determinar el número de raíces dentro del círculo unitario. El segundo argumento es un número x, y la función devuelve el valor $p(x)$, que se calcula de manera anidada como sigue:

$$p(x) = x * (x * (\cdots (x * (x * (p_n * x + p_{n-1}) + p_{n-2}) + p_{n-3}) \cdots + p_1) + p_0$$

El código de la función es el siguiente:

```
evalpol <- function(p, x) {
  n<- length(p)
  suma <- p[n]
  for(i in ((n-1):1)) suma <- suma*x + p[i]
  suma }
```

• **Posteriormente**, se define una función que calcula la mitad de la integral en (5.5.1) de manera aproximada mediante una suma de Riemman:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\phi'(e^{i\pi\omega})}{\phi(e^{i\pi\omega})}\,e^{i\pi\omega}\,d\omega \approx \frac{1}{2}\sum_{i}\frac{\phi'(e^{i\pi\omega_i})}{\phi(e^{i\pi\omega_i})}\,e^{i\pi\omega_i}\Delta$$

donde dos puntos sucesivos ω_{i+1} y ω_i están separados por una distancia Δ, y además, $\omega_1 = -\pi$ y $\omega_n = \pi - \Delta$. El código de la función aparece a continuación:

```
Criterio <- function(p, Delta= .001) {
  n<- length(p)-1
  derp <- p[2:  (n+1)] *(1:n)
  puntos <- seq(-1, 1, by= Delta)
  puntos <- puntos* pi*1i
  puntos <- exp(puntos)
  N<- length(puntos)
  SUMA <- 0i
  for(i in (1:N)) {
  SUMA <- SUMA+
  Delta*(exp(puntos[i])*evalpol(derp,
  puntos[i])/evalpol(p,puntos[i]))
  }
  cat ("El polinomio tiene ",
    ceiling(trunc(Mod(SUMA/2)+.5)),
```

```
    "raíces dentro del círculo
unitario\n")
}
```

Note que se incluyó un valor por defecto para Δ, y que dicho valor es un milésimo.

Para ver la aplicación de esta función a continuación se analizarán algunos polinomios:

(a) $p(z) = .4 + z^3$. Este polinomio corresponde al vector de coeficientes $p = (.4, 0, 0, 1)$. Invocando a la función `Criterio` con este argumento, se obtiene:

```
> Criterio (c(.4, 0, 0, 1)).
El polinomio tiene 3 raíces dentro del círculo
unitario.
```

(b) Ahora se alterará ligeramente el polinomio anterior para obtener $p(z) = .4 + .2z + z^3$, polinomio que corresponde al vector $p = (.4, .2, 0, 1)$. La aplicación de la función `Criterio` con este argumento, arroja:

```
> Criterio(c(.4, .2, 0, 1))
El polinomio tiene 3 raíces dentro del círculo
unitario.
```

La implementación del criterio de causalidad presentada arriba es, desde luego, para propósitos de ilustración, pero muestra que es posible aplicar el Teorema 5.2.1 de manera práctica para determinar la causalidad de un polinomio sin conocer sus raíces.

LITERATURA CITADA

[1]. L. Alfhors (1980), Complex Variables, *McGraw-Hill*, New York.

[2]. T. M. Apostol (1980), Mathematical Analysis, *Addison Wesley*, Reading, Massachusetts.

[3]. A. A. Borovkov (1999), Mathematical Statistics, *Gordon and Breach*, New York

[4]. P. J. Brockwell y R. A. Davis (1998), Time Series: Theory and Methods, *Springer-Verlag*, New York.

[5]. E. Dudewicz y S. Mishra (1998). Mathematical Statistics, *Wiley*, New York.

[6]. W. A. Fuller (1998), Introduction to Statistical Time Series ,*Wiley*, New York.

[7]. W. Fulks (1980), Cálculo Avanzado, *Limusa*, México, D. F.

[8]. F. A. Graybill (2000), Theory and Application of the Linear Model, *Duxbury*, New York.

[9]. F. A. Graybill (2001), Matrices with Applications in Statistics *Duxbury*, New York.

[10]. D. A. Harville (2008), Matrix Algebra Form a Statistician's Perspective, *Springer-Verlaf*, New York.

[11]. K. Hoffman y R. Kunze (1975), Linear Algebra, *Prentice-Hall*, New York.

[12]. A. I. Khuri (2002), Advanced Calculus with Applications in Statistics, *Wiley*, New York.

[13]. S. Lipschutz (1995), Linear Algebra, *McGraw-Hill*, New York.

[14]. M. Loève (1984), Probability Theory, I, Springer-Verlag, New York.

[15]. N. Y. Martínez Martínez (2010), Una Implementación de Orden Cuadrático Para el Algoritmo de Innovaciones Aplicado a una Serie Estacionaria, Tesis de

Maestría en Estadística Aplicada, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Saltillo Coah., MÉXICO.

[16]. W. Rudin (1984), Real and Complex Analysis, *McGraw-Hill*, New York.

[17]. H. L. Royden (2003), Real Analysis, *MacMillan*, London.

[18]. J. Shao (2010), Mathematical Statistics, *Springer*, New York.

[19]. R. H. Shumway y D. S. Stoffer (2006), Time Series Analysis and Its Applications With R Examples, *Springer-Verlag*, New York.

[20]. S. Vázquez Baxcajay (2010), Ejemplos sobre la Teoría Espectral para Series de Tiempo Estacionarias, Tesis de Maestría en Estadística Aplicada, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Saltillo Coah., MÉXICO.

[21]. D. Wackerly, W. Mendenhall y R. L. Scheaffer (2009), Mathematical Statistics with Applications, *Prentice-Hall*, New York.