UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA

ANTONIO NARRO

DIVISIÓN DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE RIEGO Y DRENAJE

HIDRÁULICA AGRÍCOLA

TEORÍA Y APLICACIÓN DE LA HIDRÁULICA EN LA IRRIGACIÓN

PRESENTADA POR: SERGIO ZEFERINO GARZA VARA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE RIEGO Y DRENAJE

BUENAVISTA SALTILLO COAHUILA MÉXICO

21 de Agosto 1984

INTRODUCCION

Existe una gran cantidad de libros de Hidráulica que tradicionalmente se utilizan como fuente de consulta para los cursos que se imparten en las diferentes carreras profesionales de Ingeniería, algunos de ellos fueron elaborados para utilizarse en determinadas especialidades, sin embargo, dentro del medio agrícola existe muy poca información concreta y con la aplicación adecuada que requieren los estudiantes de la carrera de Ingeniero Agrónomo con especialidad en Irrigación o Ingeniería Agrícola.

El presente trabajo tiene como objetivo general el de elaborar un documento de Hidráulica con enfoque y aplicación directa en los problemas propios de la Agricultura Nacional, preparando al estudiante en el diseño de sistemas de conducción desde la fuente en el diseño de sistemas de conducción desde la fuente de abastecimiento hasta el área de utilización; además, se intenta que sea una fuente de conocimientos básicos para el estudio de otras disciplinas tales como: Diseño de Obras Hidráulicas, Equipos de Bombeo,

CAPITULO I

ANTECEDENTES E IMPORTANCIA DE LA HIDRAULICA

DEFINICION DE LA HIDRAULICA

El término Hidráulica se deriva de los vocablos griegos "hydor" que significa agua, y "aulos" que significa conducción. Actualmente se le define como la parte de la mecánica que estudia las leyes que rigen a los fluídos (principalmente el agua) en reposo y movimiento, aplicando dichas leyes en la solución de problemas prácticos. En otras palabras, particularizando con el agua sería comprender las normas y principios relativos a la técnica de contener, conducir, elevar y aprovechar el fluído mencionado.

DESARROLLO HISTORICO DE LA HIDRAULICA, EN CUANTO A SU METODOLOGIA

Antiguamente el estudio de los fluídos seguía dos caminos diferentes. El primero estrictamente teórico, basado en leyes físicas derivadas de análisis matemáticos, deniminado Hidromecánica teórica; fué considerado un medio muy efectivo en la investigación científica, pero su aplicación era restringida por su inhabilidad para solucionar planteamientos de orden esencialmente práctico. El segundo, la Hidráulica, basada cien por ciento en experimentos

científicos de los que se obtenía información que se aplicaba de - inmediato en la solución de problemas derivados de la ingeniería - práctica. Era conocido también con el nombre de Hidromecánica - práctica.

La Hidromecánica práctica propició la proliferación de un sin número de fórmulas sin buscar la unificación de criterios. Además, las ecuaciones obtenidas eran basadas en experimentos tan particulares que la información en muchos casos resultaba difícil de extrapolar.

La naturaleza de los problemas que la Hidráulica trata, ha hecho necesario al paso del tiempo, reducir sus limitaciones utili - zando conceptos de la hidromecánica teórica, hoy mecánica de fluídos, para la solución de determinados problemas prácticos, de tal manera que han ido desapareciendo cada vez más las diferencias conceptuales entre ambas disciplinas.

En la actualidad, la metodología que sigue la Hidráulica re - quiere de cinco fases para su pleno entendimiento. Estas son:

a) La idealización del fenómeno estudiado para eliminar el mayor número de variables en él involucradas.

b) La definición de un modelo matemático del fenómeno idealizado basándose en la aplicación de las leyes de la mecánica de fluídos.

c) La conducción de un experimento que permita la obtención - de datos sobre el fenómeno de interés.

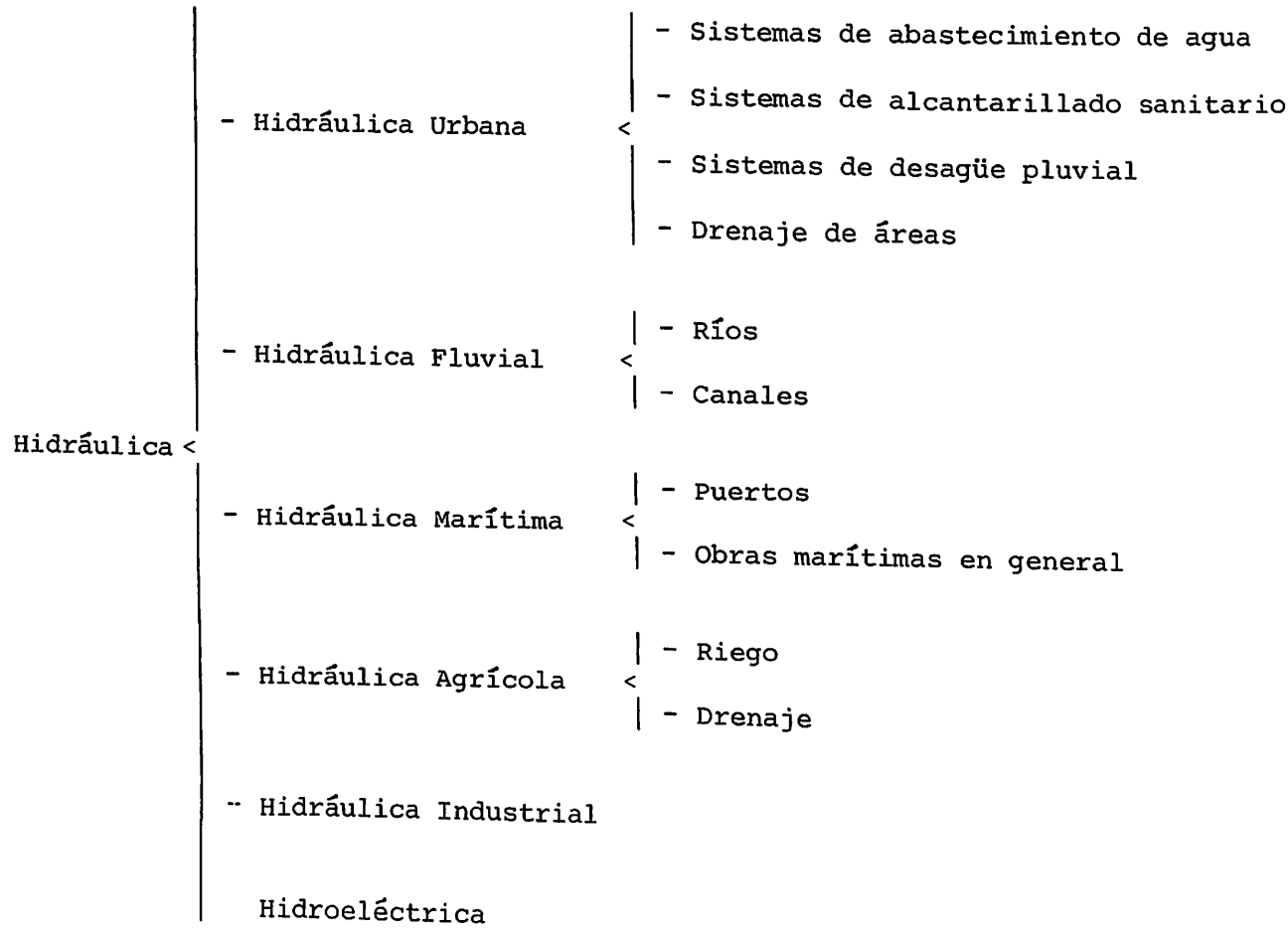
d) La cuantificación del grado de divergencia entre los datos obtenidos del modelo del fenómeno idealizado y los datos - experimentales.

e) La corrección del modelo del fenómeno ideal para su ajuste a los resultados experimentales a través de coeficientes - de proporcionalidad que permitan su aplicación práctica.

Todos los pasos anteriores que aplica la Hidráulica, tienen - como objetivo el resolver problemas prácticos con la más alta precisión posible, utilizando una metodología simple que involucre - fórmulas y conceptos universales.

RAMAS DE LA HIDRAULICA DONDE SE APLICA LA HIDRAULICA

Acevedo y Alvarez (1975) nos ilustran todas las ramas de ingeniería donde se aplica la Hidráulica como se muestra en el siguiente cuadro:



IMPORTANCIA DE LA HIDRAULICA EN EL MEDIO AGRICOLA NACIONAL

Para ubicar la hidráulica en el medio agrícola, es necesario primero definir la agricultura como un conjunto de técnicas utilizadas para la producción de alimentos y materias primas de origen vegetal. Para ésto, el recurso más importante con el que se debe contar, es el fluído agua, ya que cumple un gran número de funcio-

nes importantes para el desarrollo completo de las plantas. De - acuerdo con Currier (1967), estas funciones pueden sumarizarse de la siguiente manera:

a) Es un constituyente estructural almacenado en las células por fuerzas osmóticas y mátricas principalmente.

b) Hidrata ciertas enzimas que tienen mucha importancia en el metabolismo de las plantas.

c) Es un gran disolvente de sustancias, permitiendo que ocu - rran reacciones metabólicas que sólo pueden efectuarse en el medio acuoso.

d) Es un medio por el que todas las sustancias pueden moverse de la región de abastecimiento (el suelo y otras células) a la región de uso.

e) Por su alto calor específico y alto calor de vaporización, actúa como regulador de la temperatura de las plantas, - trasladando hacia la atmósfera el calor solar que entra a los tejidos celulares, por medio de la transpiración.

f) Es un reactivo en la fotosíntesis.

Por otra parte, para tener una idea acerca del aprovechamiento del agua por los cultivos, existen ya datos que relacionan el - medio geográfico y la producción, con respecto al volumen bruto - utilizado en el riego como se ve en el siguiente cuadro. (Jasso, 1981).

Cultivo	Cantidad	Producto	Litros de agua utilizados (Volumen bruto)	Región
Trigo	1 Kg	Grano	1 000	Delicias, Chih.
Algodón	1 kg	Algodón hueso	2 000	La Laguna
Nogal Maduro	1 kg	Nuez	4 000	R. Arizpe, Coah.

De lo expuesto anteriormente, se tiene una panorámica general de la cantidad de agua que se utiliza en la producción agrícola y su importancia.

La República Mexicana tiene una extensión territorial de 195.8 millones de hectáreas y datos oficiales de la DGEA - SARH (1977), informa que sólo 16.8 millones anualmente se han utilizado como área de cultivo, y se cuenta con una gran extensión territorial árida y semiárida donde la precipitación es escasa y no es suficiente para abastecer las demandas hídricas de los cultivos regionales. La agricultura de riego se realiza en 5.4 millones de hectáreas para obtener cosechas agrícolas comercialmente productivas, por lo que es necesario emplear técnicos que, además de conocer aspectos agronómicos, conozcan también el aspecto hidráulico para obtener el manejo adecuado y óptimo aprovechamiento del recurso.

CAPITULO II

SOLIDOS Y FLUIDOS

Todos los materiales que se conocen hasta la fecha se pueden clasificar en dos grandes grupos: Sólidos y Fluídos. En el capí - tulo anterior, se definió la Hidráulica como la ciencia que estu - dia a los fluídos. Por ello, es muy importante saber diferenciar - estos dos grupos, entender el concepto de fluído, clasificarlos y ver en qué parte de esta clasificación se ubica al agua que es el principal fluído en este estudio y, por último, tener presente las principales propiedades físicas de los fluídos.

ANALOGIA ENTRE SOLIDOS Y FLUIDOS

Si tenemos un conjunto de elementos y compuestos tales como: pasta dentrífica, oro, mayonesa, acero, agua, aire, goma de mascar masticada; y quisiéramos agrupar en un subconjunto los sólidos y - en otro los fluídos, lo primero que debemos tener firme es el con- cepto de lo que es un sólido y de lo que es un fluído para poder - hacer una analogía entre ambos.

Para poder definir cada concepto, debemos someter a los materiales a esfuerzos cortantes para ver su deformación y analizar su comportamiento. Un esfuerzo cortante se define como la fuerza por unidad de área, siendo esta fuerza tangencial a dicha área (Figura 2.1.), y se representa con la letra griega τ

$$\tau = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}} \qquad 2.1$$

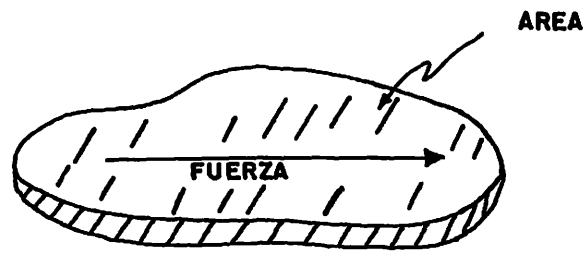


Fig. 2.1. Fuerza tangencial sobre una superficie

Dado un sólido, que por simplicidad se escoge de forma de paralelepípedo, y sometiéndolo a esfuerzos cortantes cada vez mayores, se puede observar que el ángulo de deformación del sólido ϕ, va a estar en relación directa con la magnitud del esfuerzo cortante, como se ilustra en la figura 2.2 ($\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ y $\phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3$)

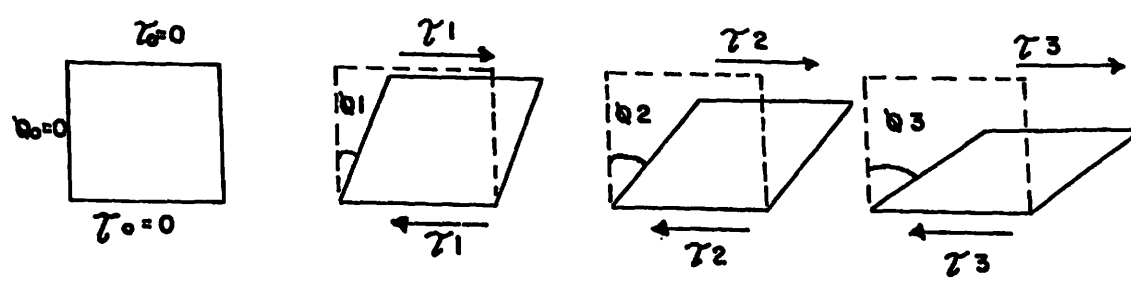


Fig. 2.2 Sólido en forma de paralelepípedo (visto en dos dimensiones) sometido a diferentes esfuerzos de corte.

Graficando τ en función de ϕ y uniendo los puntos mediante una línea, se observa una recta que parte del origen con pendiente Y (Figura 2.3). La ecuación de esta recta es:

$$\tau = Y \phi$$

Donde τ se le nombra módulo de elasticidad de Young y nos indica el grado de rigidez del sólido.

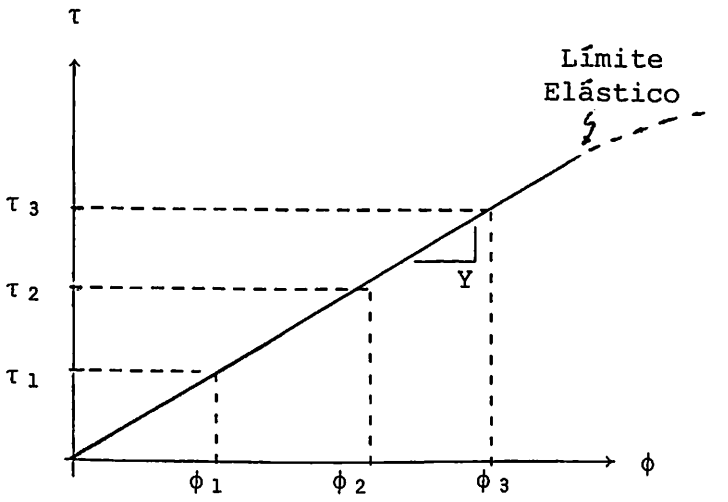


Fig. 2.3 Esfuerzo cortante en relación al ángulo de deformación de un sólido.

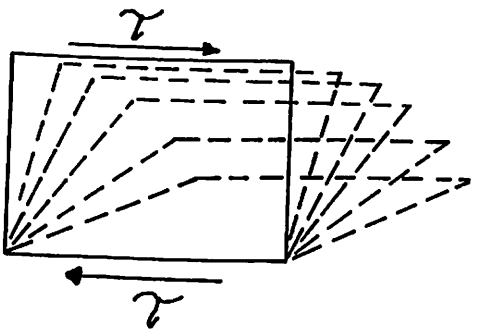


Fig. 2.4 Deformación continua de un fluído al estar sometido a un esfuerzo cortante.

Si ahora se tiene un fluído en forma de paralelepípedo y se le somete a un esfuerzo cualquiera τ'; se verá una deformación con

tinua del fluído hasta alcanzar un ángulo de 90° y de ahí sufrirá una discontinuidad en la materia. (Figura 2.4). Graficando τ contra ϕ se verá una línea recta horizontal y si se grafica para todos los valores de (Figura 2.5) se verá un área sombreada de puntos, por lo que no habrá una relación lineal de τ contra ϕ como lo existe en un sólido.

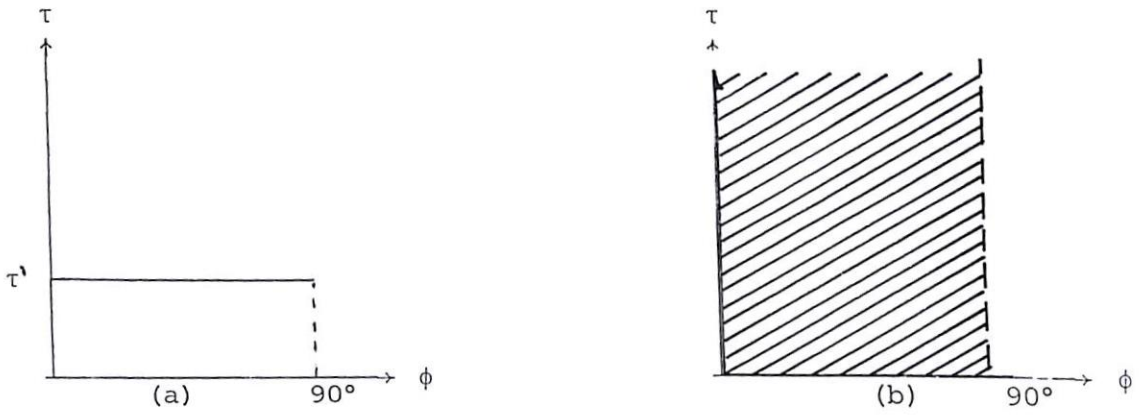


Fig. 2.5 El esfuerzo cortante τ en relación al ángulo ϕ (a) τ' contra ϕ (b). Todos los valores de τ - contra ϕ.

Con lo visto anteriormente, ya podemos observar una diferencia entre sólidos y fluídos, en el modo de comportarse al estar sometidos a esfuerzos de corte.

Si tenemos un fluído cualquiera y lo sometemos a diferentes - esfuerzos cortantes τ_1, τ_2 y τ_3 de manera que $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ observaremos que a medida que se incrementa τ también aumenta la velocidad de deformación angular del fluído $\frac{d\phi}{dt}$ por lo que se concluye que para cada τ va a tener un valor único de $\frac{d\phi}{dt}$, y diferente a - los demás. Graficando τ contra $\frac{d\phi}{dt}$, encontraremos una relación - lineal característica de cada fluído (Figura 2.6) donde μ es la - pendiente de la recta llamada viscosidad dinámica del fluído, e in

dica el grado de movilidad que tiene el fluído.

Utilizando la ecuación general de la recta, podemos obtener - la ecuación general de un fluído que está bajo esfuerzos de corte

$$\tau = \mu \frac{d\phi}{dt} \qquad 2.3$$

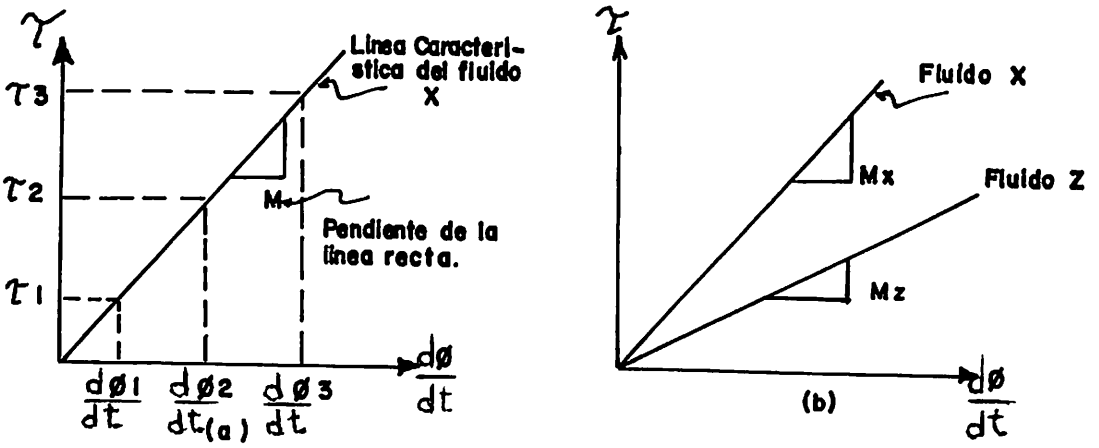


Fig. 2.6 Gráfica de τ contra $\frac{d\phi}{dt}$. a) τ contra $\frac{d\phi}{dt}$ de un fluído cualquiera. b) Comparación de dos fluídos diferentes.

Si ponemos en práctica estos conceptos para poder diferenciar un fluído de un sólido, veremos que el oro y el acero pertenecen - al subconjunto de los sólidos; el aire, agua, goma de mascar masticada, mayonesa y la pasta dental, pertenecen al subconjunto de los fluídos, donde el aire pertenece al estado gaseoso, el agua al estado líquido y los demás fluídos no encajan exactamente en el estado líquido de la materia porque tienen forma propia y por esta propiedad tienen semejanza con los sólidos, pero hay que aclarar que la forma que tienen la pueden moldear a otras formas con esfuerzos de corte relativamente pequeños o sea que su forma propia no es - muy estable.

Se debe tomar en cuenta que la mayoría de los sólidos se pueden convertir en fluídos variando la temperatura y/o la presión, - lo mismo sucede con los fluidos para convertirlos a sólidos. Se - ha observado que en las ventanas de las casas milenarias el vidrio que se considera un sólido, tiene mayor grosor en su parte inte - rior, por lo que se concluye que el vidrio tiene el comportamiento de un fluído a través de los siglos.

Lo anterior implica que no existe una frontera bien definida entre sólidos y fluídos, pero los conceptos de lo que es un sólido o fluído vistos anteriormente, son firmes siempre y cuando se en - cuentren bajo un marco referencial en donde la temperatrua sea la del medio ambiente emitiendo temperaturas extremas y el tiempo sea relativamente corto.

FLUIDOS

La noción "fluído" incluye a todos los cuerpos que tienen la capacidad de deformarse como se desee bajo la acción de fuerzas - por pequeñas que estas sean, o sea que tienen la propiedad de flui dez.

Los fluídos se pueden clasificar en dos grupos: fluídos newto nianos y no newtonianos. Cualquier fluído newtoniano tiene la característica de que al mantener la temperatura y presión constante y someterlos a diferentes esfuerzos cortantes, su viscosidad no va ría. En cambio, un fluído no newtoniano, al mantenerlo en las mis mas condiciones que el anterior, varía su viscosidad al variar el esfuerzo cortante.

Los fluídos no newtonianos se pueden subdividir en varios tipos en cuanto a su comportamiento reológico[1]. Estos tipos son: - fluído de Bingham, plástico, pseudoplástico, dilatante y fluído - ideal. (Figura 2.7).

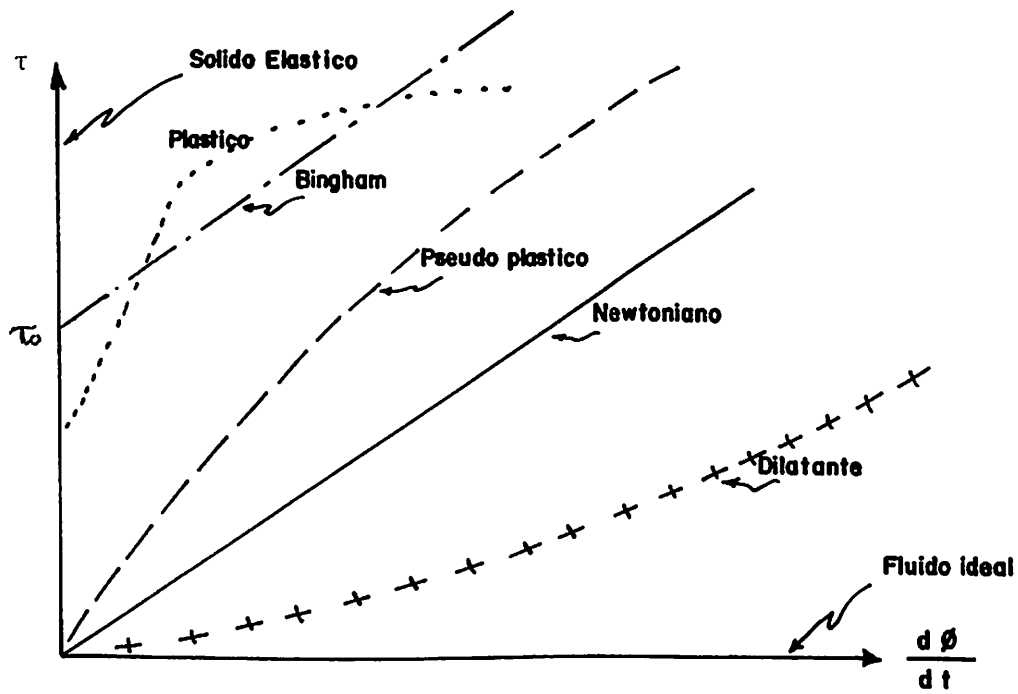


Fig. 2.7 Tipos de comportamiento reológico para toda clase de fluídos.

El sólido elástico o sólido plástico es uno de los casos extremos de los fluídos, ya que su viscosidad es infinita pues es - un material que permanece rígido a cualquier esfuerzo cortante.

El fluído de Bingham o plástico ideal, es un fluído que se - comporta como un sólido elástico mientras que el esfuerzo cortante no alcanza un cierto valor, y cuando excede dicho valor de τ se - comporta de igual forma que un fluído newtoniano. Como ejemplo - de estos fluídos, tenemos las pinturas de aceite y la pasta den -

[1] Definido como el comportamiento gráfico de un fluído cuando se relaciona su - velocidad de deformación con el esfuerzo cortante.

trífica.

El fluído pseudoplástico tiene la característica de que al aumentar el esfuerzo cortante disminuye su viscosidad. Entre los compuestos que se consideran pseudoplásticos, tenemos la mayonesa y el aceite de linaza combinado con un 40% de polvo de aluminio.

El fluído dilatante o plástico invertido, se distingue de los demás porque aumenta su viscosidad al aumentar el esfuerzo cortante. Se consideran dentro de este tipo de fluídos las suspensiones densas de almidón y las arenas movedizas.

Fluído plástico. Para que tenga la propiedad de fluidez, el esfuerzo cortante τ debe alcanzar cierto límite como en el caso del plástico ideal y a partir de ese límite fluye de manera que al aumentar el esfuerzo cortante disminuye su viscosidad. Existen muy pocos plásticos verdaderos, entre ellos se encuentran las resinas sintéticas durante el moldeo, y el aceite de linaza combinado con un 56% de aluminio.

El fluído ideal es el extremo opuesto del sólido elástico y comprende sobre todo a líquidos y gases, que se les desprecia la viscosidad ($\mu = 0$). El fluído ideal no existe en la naturaleza, pues es un modelo abstracto de un fluído.

Entre los fluídos newtonianos se encuentran el aire, éter, keroseno, aceite medio para motores S.A.E. 10, glicerina, aceite de ricino, melazas, glucosa y nuestro principal fluído en este estudio: el agua.

PROPIEDADES ESPECIFICAS DE LOS LIQUIDOS

Como el fluído agua se encuentra dentro del estado líquido - de la materia en condiciones normales de presión y temperatura, - veremos algunas propiedades específicas de los líquidos que los - relacionan o diferencían de los sólidos y los gases.

El líquido cambia muy poco su volumen al variar la presión, estando en condiciones normales de temperatura. En esta propie - dad coincide con los sólidos y difiere de los gases, o sea que se considera prácticamente incompresible.

El líquido posee fluidez. Debido a esta propiedad, no tiene forma y tendrá la forma del recipiente que lo contenga. En esta propiedad coincide con los gases y difiere de los sólidos.

Un sólido tiene forma propia debido a las fuerzas cohesivas intermoleculares tan grandes que tiene, provocando que existan - fuerzas tangenciales en el interior de él, lo cual evita que resbalen unas con otras las capas de moléculas que lo forman.

Si tenemos un sólido en un recipiente y lo dividimos en dos partes por una línea imaginaria m-n para que la parte uno no resbale sobre la parte dos, debe haber un par de fuerzas tangencia - les sobre la línea m-n (Figura 2.8)

Los líquidos no tienen forma propia, porque no existen fuerzas tangenciales en su interior, debido a que las fuerzas cohesivas intermoleculares son pequeñas por lo que las capas molecula - res del líquido resbalan hasta que adquieren la forma del reci - piente que lo contiene. Un líquido contenido en un recipiente di

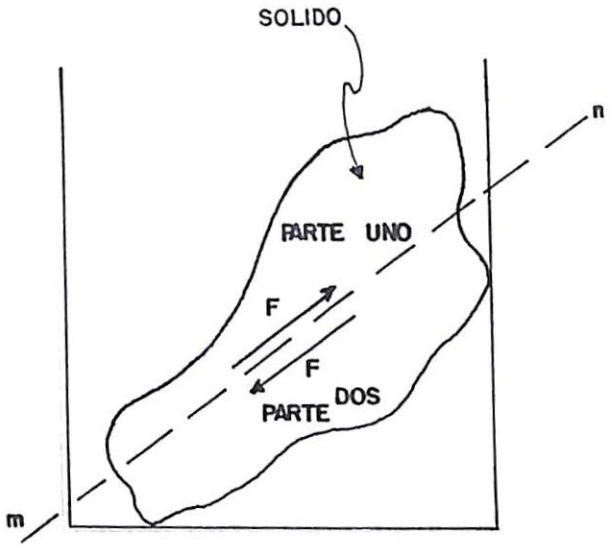


Fig. 2. 8 Sólido contenido en un recipiente donde las fuerzas externas no necesariamente son normales al sólido.

vidido en dos partes por la línea imaginaria m-n no tiene fuerzas tangenciales a la línea, por lo que la forma del líquido se adquiere por fuerzas externas a él y normales al recipiente (Figura 2.9)

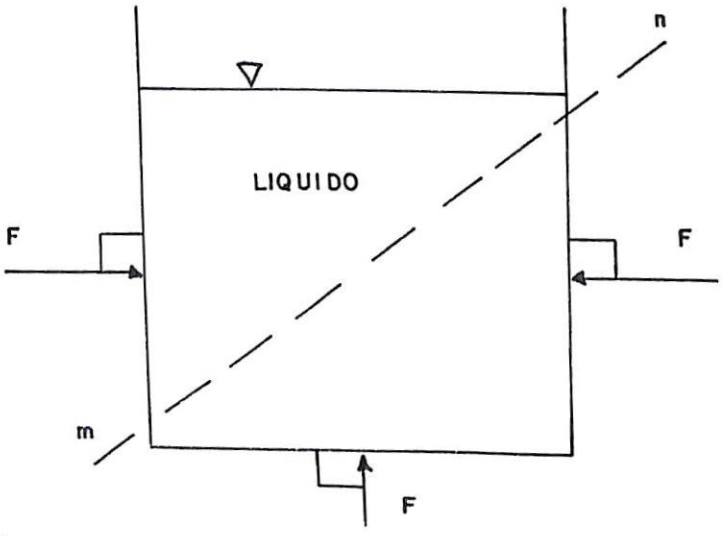


Fig. 2. 9 Líquido contenido en un recipiente donde todas las fuerzas externas son normales al líquido.

PRINCIPALES PROPIEDADES FISICAS DE LOS FLUIDOS

Las propiedades físicas de un fluído se utilizan para poder describirlo en términos numéricos, y así identificarlo para poder - diferenciarlo de otros fluídos.

Densidad (ρ). Se define como la relación que existe entre - la masa de un fluído[1] y el volumen que la contiene.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} \qquad 2.4$$

Se hace un análisis dimensional de la densidad

$$\rho = \frac{M}{L^3} = \frac{\text{Masa}}{\text{longitud}^3}$$

Las unidades de densidad en el sistema métrico decimal son - las siguientes: $kgm \cdot m^{-3}$, $gm \cdot cm^{-3}$, $U.T.M. \cdot m^{-3}$, $kgf \cdot seg^2 m^{-4}$ - y $Nt \cdot seg^2 m^{-4}$

TABLA 2.1 DENSIDAD DEL AGUA EN $U.T.M/m^3$ A DIFERENTES TEMPERATURAS EN °C.

Temp.	Densidad	Temp.	Densidad
0	101.96	25	101.67
5	101.97	30	101.53
10	101.95	35	101.37
15	101.88	40	101.18
20	101.79	50	100.76

[1] Puede ser fluído o sólido aunque en nuestro caso hablamos de un fluído porque estamos estudiando las propiedades físicas de los fluídos.

TABLA 2.2 VALOR DE LA DENSIDAD DEL AGUA A 4°C, UTILIZANDO DIFERENTES UNIDADES.

1 000 Kgm/m^3
1 gm/cm^3
1 000 $Kgf\ seg^2/m^{-4}$
9 810 $Nt\ seg^2/m^{-4}$
101.97 $U.T.M./m^3$

Peso específico (γ). Se define como la relación que existe entre el peso de un fluído y el volumen que lo contiene.

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{Peso}{Volumen} \qquad 2.5$$

$$W = Mg \qquad 2.6$$

Se sustituye la ecuación 2.6 en 2.5

$$\gamma = \frac{Mg}{V} \qquad 2.7$$

Se sustituye la ecuación 2.4 en 2.7

$$\gamma = \rho g \qquad 2.8$$

Se hace el análisis dimensional correspondiente:

$$\gamma = F/L^3$$

Unidades del peso específico en el sistema métrico decimal son: $Kgf\ m^{-3}$, $gf\ m^{-3}$, $Newton\ m^{-3}$, y $dina\ cm^{-3}$

Las presiones de la tabla 2.4 son presiones que exceden a la presión atmosférica, por ejemplo, la presión igual a cero signifi-

TABLA 2.2 VALOR DE LA DENSIDAD DEL AGUA A 4°C, UTILIZANDO DIFERENTES UNIDADES.

1 000 Kgm/m^3
1 gm/cm^3
1 000 $Kgf\ seg^2/m^{-4}$
9 810 $Nt\ seg^2/m^{-4}$
101.97 $U.T.M./m^3$

Peso específico (γ). Se define como la relación que existe entre el peso de un fluído y el volumen que lo contiene.

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{Peso}{Volumen} \qquad 2.5$$

$$W = Mg \qquad 2.6$$

Se sustituye la ecuación 2.6 en 2.5

$$\gamma = \frac{Mg}{V} \qquad 2.7$$

Se sustituye la ecuación 2.4 en 2.7

$$\gamma = \rho g \qquad 2.8$$

Se hace el análisis dimensional correspondiente:

$$\gamma = F/L^3$$

Unidades del peso específico en el sistema métrico decimal - son: $Kgf\ m^{-3}$, $gf\ m^{-3}$, $Newton\ m^{-3}$, y $dina\ cm^{-3}$

Las presiones de la tabla 2.4 son presiones que exceden a la presión atmosférica, por ejemplo, la presión igual a cero signifi-

ca que el agua se encuentra a presión atmosférica, o en otras palabras, tiene cero presión excedente de la presión atmosférica

TABLA 2.3 PESO ESPECIFICO DEL AGUA ($Kg_f\ m^{-3}$) A DIFERENTES TEMPERATURAS (°C)

T	Y	T	Y	T	Y
0	999.87	20	998.23	65	980.54
4	1000	25	997.07	80	971.83
10	999.73	30	995.67	90	965.34
14	000.53	50	998.07	100	958.38

TABLA 2.4 PESO ESPECIFICO DEL AGUA ($Kg_f\ cm^{-3}$) A DIFERENTES PRESIONES ($Kg_f\ cm^{-2}$)

P $Kg_f\ cm^{-2}$	Y $Kg_f\ m^{-3}$	P $Kg_f\ cm^{-2}$	Y $Kg_f\ m^{-2}$
0	1000.0	1500	1007.2
10	1000.4	2000	1009.4
100	1004.8	4500	1099.0

Dentro de la irrigación se trabaja generalmente con agua a temperaturas extremas que oscilan entre 0 y 40°C y a presiones muy por debajo de los 100 $kg_f\ cm^{-2}$ por lo que, para propósitos de cálculos prácticos, asignamos al agua un peso específico redondeado a 1000 $kg_f\ m^{-3}$ aún cuando el agua tiene impurezas, su peso específico se verá afectado por el grado de impurezas que tiene (Tabla 2.5)

TABLA 2.5 AGUA CON IMPUREZAS PROVENIENTES DE DISTINTAS FUENTES

O r i g e n	Peso Específico ($Kg_f - m^{-3}$)
Río Garona (Francia	1000.1
Río Támesis (Inglaterra)	1000.3
Agua de manantial	100.3 - 1005.9
Océano Pacífico	1026.4
Mar muerto	1171.9

GRAVEDAD ESPECIFICA O DENSIDAD RELATIVA O PESO ESPECIFICO RELATIVO (g.e. ó d.r.)

Se define como la relación entre el peso específico de cual - quier fluído y el peso específico del agua, o entre la densidad de cualquier fluído y la densidad del agua.

$$g.e. = \frac{\gamma_{fluído}}{\gamma_{agua}} \qquad 2.9$$

Se sustituye la ecuación 2.8 en la ecuación 2.9

$$g.e. = \frac{(\rho_{fluído})g}{(\rho_{agua})g} \qquad 2.10$$

$$d.r. = \frac{\rho_{fluído}}{\rho_{agua}} \qquad 2.11$$

La gravedad específica o densidad relativa es adimensional. En la Tabla 2.6 se exponen algunos valores de la gravedad específi ca del agua al variar la temperatura.

TABLA 2.6 VALORES DE LA GRAVEDAD ESPECIFICA CON RESPECTO A LA TEMPERATURA EN °C

Temperatura	Gravedad específica del agua	Temperatura	Gravedad específica del agua
5	1.000	30	0.995
10	1.000	35	0.993
15	0.999	40	0.991
20	0.998	50	0.999
25	0.997	65	0.980

COEFICIENTE DE COMPRESION VOLUMETRICO (β_p)

Es la propiedad de la masa de cambiar su volumen cuando está bajo el efecto de la presión, o sea, cuantifica el cambio relativo de volumen por unidad de presión.

$$\beta = - \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dP} \qquad 2.12$$

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dP} \qquad 2.13$$

Donde: v y ρ son el volumen y la densidad de antes de incrementarse la presión; dv es el volumen que se pierde al incrementar la presión, de ahí el signo negativo de la ecuación 2.30; $d\rho$ es la densidad que se gana (al perder el volumen) debido al incremento de la presión, de ahí el signo positivo de la ecuación 2.13, dP es el incremento de presión que tiene la masa.

Las ecuaciones 2.12 y 2.13 son iguales como se demostrará a continuación (Figura 2.10)

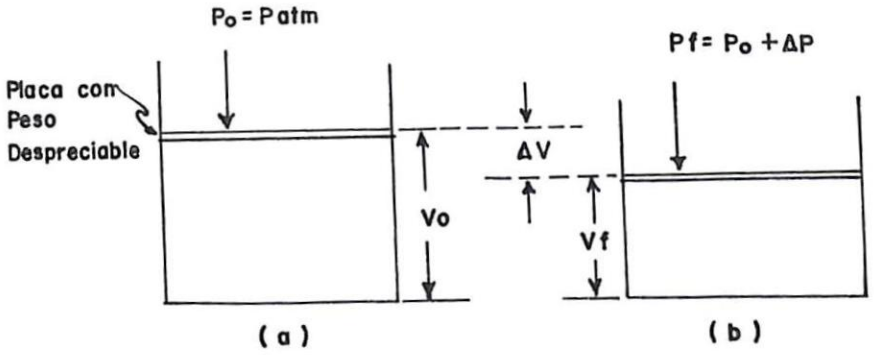


Fig. 2.10 Compresibilidad de un líquido. a) Líquido a la presión atmosférica. v) Líquido con una presión mayor que la atmosférica.

La masa del fluído M contenido en el cilindro es constante

$$M = \rho V = cte.$$

Si se deriva la masa ó ρV, se obtiene:

$$d(\rho V) = 0$$

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

$$V d\rho = - \rho dV$$

Ahora bien, si se reagrupa la ecuacion anterior, tenemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dV}{V}$$

Como interviene la presión, se multiplica en ambos lados de la ecuación por $1/dP$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \beta_p$$

Al hacer un análisis dimensional del coeficiente de compresión volumétrico, resulta:

$$\beta_p = \frac{1}{L^3} \quad \frac{L^2}{F/L^2} = \frac{L^2}{F}$$

Unidades del coeficiente de compresión volumétrico en el sistema métrico decimal son: $cm^2 Kg_f^{-1}$, $cm^2 Nt^{-1}$ y $cm\ dina^{-1}$

MODULO DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO (E_v)

Se define como el recíproco del coeficiente de compresión volumétrico.

$$E_v = -V \frac{dP}{dV} \qquad 2.14$$

$$E_v = \rho \frac{dP}{d\rho} \qquad 2.15$$

Para el caso de que la presión inicial sea mayor que la presión final, entonces el volumen va a aumentar a un decremento de presión, por la que se conserva negativa la ecuación 2.14. Con respecto a la ecuación 2.15, a un incremento de presión negativo aumenta el volumen y disminuye la densidad por lo que al haber una división de incrementos negativos se vuelve positiva la fracción (Ecuación 2.16)

$$\frac{-dP}{-d\rho} = \frac{dP}{d\rho} \qquad 2.16$$

El análisis dimensional para el módulo de elasticidad volumétrico será:

$$E_v = L^3 \quad \frac{F/L}{L^3} \quad \frac{F}{L^2}$$

Unidades del módulo de elasticidad volumétrico en el sistema métrico decimal son: $Kg_f - cm^{-2}$, $Nt - cm^{-2}$ y $dina - cm^{-2}$

En la tabla 2.7 se puede observar los diferentes valores del módulo de elasticidad volumétrico del agua al variar la temperatura.

TABLA 2.7 VALORES DEL COEFICIENTE DE ELASTICIDAD VOLUMETRICO EN Kg_f/cm^2 A DIFERENTES TEMPERATURAS EN °C

T	E_v	T	E_v
0	20 200	25	22 800
5	20 900	30	23 100
10	21 500	35	23 200
15	22 000	40	23 300
20	22 400	50	23 400

Ejemplo 2.1. Encontrar la pérdida de volumen de un litro de agua a 25°C cuando se le incrementa la presión a 30 Kg_f/cm^2

Solución. Se despeja el incremento de volumen de la ecuación 2.10

$$dv = \frac{V\ dP}{E_v}$$

E_v a 25°C = 22 800 Kg_f/cm^2

1 Litro = 1 000 cm^3

$$dv = \frac{(1\,000\ cm^3)(30\ Kg_f/cm^2)}{22\,800\ Kg_f/cm^2}$$

$$dv = -\ 1.3158\ cm^3$$

El signo negativo significa la pérdida de volumen.

VISCOSIDAD DINAMICA O ABSOLUTA (μ)

Se define como la propiedad del fuído de oponerse al deslizamiento de sus capas, y esta propiedad del fluído se manifiesta en su interior, porque al deslizarse sus capas con diferentes velocidades, están implícitas las fuerzas tangenciales o esfuerzos de corte τ.

Anteriormente se mencionaba que el esfuerzo cortante y la viscosidad se relacionaban con la ecuación 2.3:

$$\tau = \mu \frac{d\phi}{dt}$$

El inconveniente de la fórmula anterior se debe a que en la práctica no vemos la velocidad de deformación angular $\frac{d\phi}{dt}$, ya que esta ecuación es de naturaleza abstracta, o sea, que no vamos a tener un fluído que al aplicarle un esfuerzo cortante, podamos ver la velocidad de deformación angular, como se ilustra en la Figura 2.5. La ecuación 2.3 se modifica en función de otras variables que pueden ser medibles en la práctica.

Consideremos dos placas largas y paralelas con una separación Y muy pequeña que contienen un fluído en reposo, como se aprecia en la Figura 2.11a

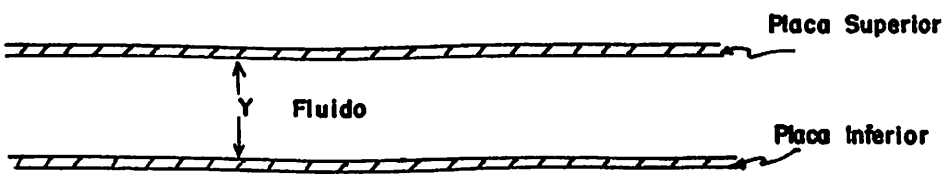


Fig. 211a El fluído y las dos placas se encuentran en reposo

Dejando fija la placa inferior y poniendo en movimiento la - placa superior a una velocidad constante la capa del fluído adyacente a la placa superior adquiere la misma velocidad debido a que está adherido a ella, de manera que las demás capas inferiores van ganando movimiento, tal como se muestra en la figura 2.11b

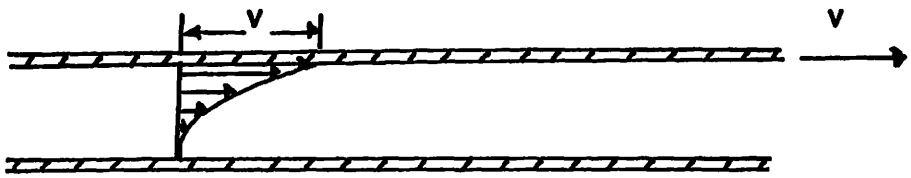


Fig. 2.11b Distribución de velocidades al empezar el movimiento

Al adquirir la capa de fluído adyacente a la placa en movimiento su misma velocidad, el movimiento se va transmitiendo entre capas debido al rozamiento que hay entre las superficies de sus capas, hasta que finalmente adquiere una distribución de velocidades como se ve en la Figura 2.11c

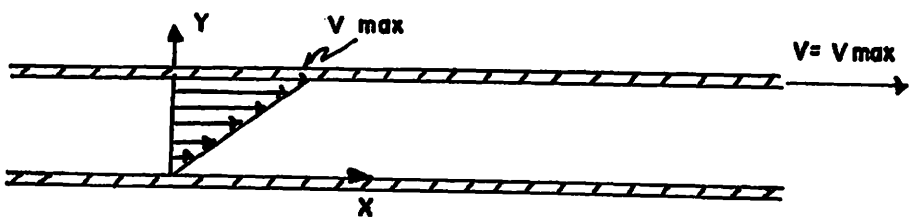


Fig. 2.11c Perfil de velocidades final

En la Figura 2.11c se observa que la distribución de velocidades es lineal, y esto es debido a que la separación entre las dos placas tiende a ser cero ($Y \to 0$); también se observa que al variar y (sobre el eje), varían las velocidades desde $y = 0$ hasta $y = Y$) por lo tanto, las velocidades están en función de la variable y. Por otra parte, el deslimamiento que hay entre las capas del fluído origina fuerzas de fricción o fuerzas tangenciales y -

dichas fuerzas por unidad de superficie son los esfuerzos cortantes τ, que están en función directa de la distribución de velocidades

$$\tau \propto \frac{dv_x}{dy}$$

Para eliminar la proporcionalidad, se multiplica el gradiente de velocidad por la constante de proporcionalidad μ (viscosidad).

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} \qquad 2.17$$

La ecuación 2.17 es una modificación de la ecuación 2.3

Observando nuevamente la Figura 2.11a, y si ahora se pone en movimiento la placa inferior con una velocidad constante v y la placa superior se deja fija, tendrá una distribución de velocidades como se puede apreciar en la Figura 2.12

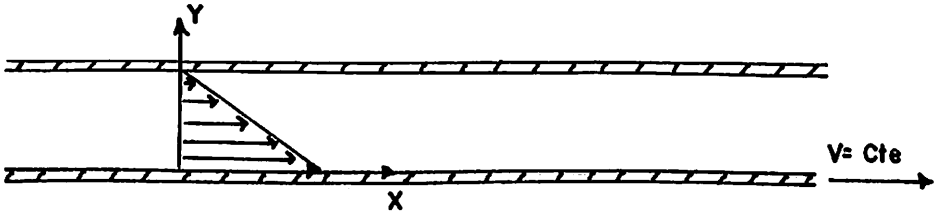


Fig. 2.12 Perfil de velocidades

De la Figura 2.12 se observa que al aumentar y disminuye la velocidad, o sea que a incrementos de y hay incrementos negativos de velocidad (decrementos de velocidad) por lo que a la ecuación 2.17 se le modificará el signo.

$$\tau = -\mu \frac{dv_x}{dy} \qquad 2.17a$$

La ecuación 2.17 ó 2.17a se utiliza solamente en fluídos Newtonianos, que tengan un movimiento ordenado de sus partículas, o sea

que el conjunto de ellas formen capas bien definidas y a la vez - dichas capas se estén resbalando unas con otras por tener diferentes velocidades. Las ecuaciones 2.17 y 2.17a son conocidas como la "ley de Newton de la viscosidad"

Despejando μ de la ecuación 2.17 y 2.17a, tenemos:

$$\mu = \pm \frac{\tau}{\frac{dv_x}{dy}} \qquad 2.18$$

El análisis dimensional de la viscosidad es:

$$\mu = \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{\frac{L}{T}}{L}} = \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{L}{LT}} = \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{1}{T}} = \frac{FT}{L^2}$$

Las unidades en el sistema métrico decimal son: $\frac{\text{dina-seg}}{\text{cm}^2}$, $\frac{g_f\text{-seg}}{\text{cm}^2}$, $\frac{Kg_f\text{-seg}}{\text{m}^2}$, $\frac{\text{Newton-seg}}{\text{m}^2}$ y el Poise.

TABLA 2.10 EQUIVALENCIA DEL POISE CON OTRAS UNIDADES

1 Poise = 1 $\frac{\text{dina-seg}}{\text{cm}^2}$	1 Poise = 1 $\frac{1}{981}$ $\frac{g_f - \text{seg}}{\text{cm}^2}$
1 Poise = 100 Centipoises	1 Poise = $\frac{1}{98.1}$ $\frac{Kg_f - \text{seg}}{\text{m}^2}$

AGRADECIMIENTO

Al **Dr. Salvador Muñoz Castro**, por su valiosa ayuda, dirección y asesoramiento para la realización de este trabajo.

Al **M.C. Manuel González Molina** y al **M.C. Arnoldo Rodríguez - Villarreal**, por su valiosa intervención en la revisión de la tesis.

Al **Dr. Juan Francisco Pissani**, por su enseñanza y consejos - durante mis estudios y por su colaboración en esta tesis.

A **Raúl Cepeda Garza, Luis A. Villarreal Manzo** y **Sergio M. Chapa Garza**, por su colaboración en la realización de las figu - ras incluídas en este trabajo.

A Leticia Ayala López, quien tan pacientemente mecanografió este trabajo.

I N D I C E

	Pág.
INTRODUCCION	1
CAPITULO I	
ANTECEDENTES E IMPORTANCIA DE LA HIDRAULICA	3
Definición de la Hidráulica	3
Desarrollo histórico de la hidráulica en cuanto a su metodología	3
Rama de la hidráulica	6
Importancia de la hidráulica en el medio agrícola nacional	6
CAPITULO II	
SOLIDOS Y FLUIDOS	9
Analogía entre sólidos y fluídos	9
Fluídos	14
Propiedades específicas de los líquidos	17
Principales propiedades físicas de lso fluídos	19
CAPITULO III	
HIDROSTATICA	37
Presión hidrostática	37
Propiedades de la presión hidrostática	38
Ecuaciones diferenciales de un líquido en reposo	38

Pág.

Integración de las ecuaciones diferenciales de un líquido en reposo 48

Manometría 50

Fuerzas de la presión hidrostática sobre superficies planas 65

Otro método para calcular la fuerza resultante y el centro de presiones 81

Fuerza de la presión hidrostática sobre superficies curvas 88

CAPITULO IV
HIDRODINAMICA 99

Indicaciones preliminares 100

Ecuaciones del movimiento de un líquido ideal 106

Ecuación de continuidad 107

Ecuación de continuidad para una vena líquida 108

Ecuaciones generales del movimiento de Euler y Bernoulli 110

CAPITULO V
FLUJO DE LIQUIDOS REALES EN CONDUCTOS A PRESION 122

Experimento de Reynolds 123

Corrección de la ecuación de Bernoulli 125

Pérdida de carga por longitud 129

Teoría de la corriente laminar 131

Teoría de la corriente turbulenta 139

Pérdida de cargas locales 154

Fórmula de Hazen-Williams 177

Analogía de la fórmula de Hazen-Williams y Darcy-Weisbach 180

TABLA 2.11 VALORES APROXIMADOS DE LA VISCOSIDAD EN CENTIPODIOS PARA DIFERENTES LIQUIDOS NEWTONIANOS A 20°C

Líquido	Viscosidad	Líquido	Viscosidad
Eter	0.1	Glicerina, aceite de	
Agua	1.0	ricino	1 000.0
Keroseno	10.0	Jarabe de maíz karo	
Aceite medio para		etiqueta azul	10 000.0
motores S.A.E. 10	100.0	Melazas	100 000.0
		Glucosa para dulcería	1 000 000.0

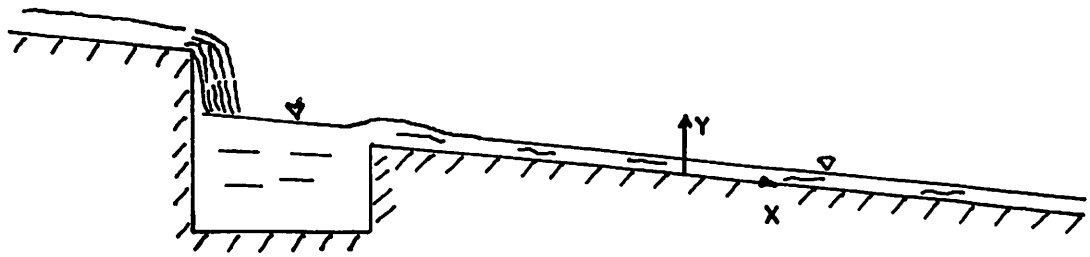
TABLA 2.12 VALORES DE LA VISCOSIDAD DEL AGUA EN Kg_f-seg-m^{-2} A DIFERENTES TEMPERATURAS EN °C

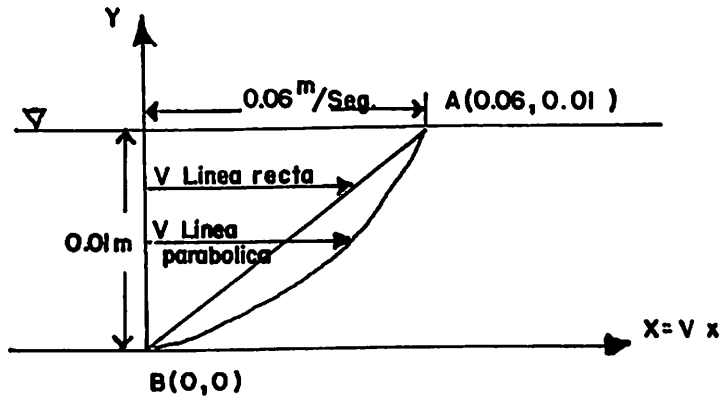
Temperatura	Viscosidad	Temperatura	Viscosidad
0	1.827×10^{-6}	25	0.912×10^{-6}
5	1.550×10^{-6}	30	0.817×10^{-6}
10	1.334×10^{-6}	35	0.737×10^{-6}
15	1.163×10^{-6}	40	0.669×10^{-6}
20	1.025×10^{-6}	50	0.560×10^{-6}

Ejemplo 2.2. En la siguiente figura se ilustra un canal muy pequeño por el que fluye agua a una temperatura de 15°C; se asume que la máxima velocidad se encuentra en la superficie del líquido, siendo igual a 0.06 m/seg. Calcular el gradiente de velocidad y el esfuerzo cortante en el piso, y a cada 2 mm arriba de él hasta llegar a la superficie, si la profundidad es de 1 cm. Asuma que la distribución de velocidades sea:

a) En línea recta

b) En línea parabólica





Solución. a) Calcular el gradiente de velocidades y el esfuerzo cortante a 0, 2, 4, 6, 8 y 10 mm.

La ecuación general de la línea recta es:

$$y = mx + b$$

Ajustándola a las variables que tenemos:

$$y = mv_x$$

Despejando v_x

$$v_x = \frac{1}{m} y$$

Derivando la v_x con respecto a y

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{m}$$

Como m es la pendiente de la recta, la obtenemos de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_A - y_B}{Vx_A - Vx_B} = \frac{0.01 - 0}{0.06 - 0} = 0.1666 \text{ seg}$$

Por lo tanto, el gradiente de velocidad será:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{0.1666 \text{ seg}} = 6 \text{ seg}^{-1}$$

Como m es constante para una línea recta, el gradiente de velocidades será el mismo para todos los puntos. (En este caso para todos los valores de "y").

El esfuerzo cortante (τ) será:

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

De la tabla 2.7 $\mu = 1.163 \times 10^{-6}$ $Kg_f\text{-seg}/m^2$ a 15°C

$\tau = (1.163 \times 10^{-6})(6) = 0.000007$ Kg_f/m^2 para cualquier valor de y.

b) Calcular el gradiente de velocidades y el esfuerzo cortante a 0, 2, 4, 6, 8 y 10 mm.

La ecuación de la parábola, cuando su eje es paralelo al eje x:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

donde h y k son las coordenadas del vértice de la parábola y p es la distancia del foco al vértice o del vértice a la directriz.

Despejando p de la ecuación de la parábola:

$$p = \frac{(y - k)^2}{4(x - h)}$$

Donde los valores del vértice son:

$$h = 0.06 \text{ m/seg}$$

$$k = 0.01 \text{ m}$$

Las variables "x" y "y" pueden tomar cualquier valor, pero como conocemos además del vértice el punto de origen, entonces los valores son:

$$x = V_x = 0 \text{ m/seg}$$

$$y = 0 \text{ m}$$

Por lo tanto:

$$p = \frac{(0 - 0.01)^2}{4(0 - 0.06)} = - 0.00042 \text{ m-seg}$$

Cuando p es negativo, nos indica que la parábola se abre hacia la izquierda, tal como se ilustra en la figura.

Despejando x que es la velocidad (v_x) de la ecuación de la parábola:

$$x = v_x = h + \frac{(y - k)^2}{4p}$$

Derivando la v_x con respecto a y de la ecuación anterior

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{2p} (y - k)$$

Valorando la ecuación anterior:

$$\frac{dv_x}{dy} = -\ 1190.48\ (y - 0.01)$$

Tabulando los diferentes valores de "y" para obtener el gradiente de velocidades ($\frac{dv_x}{dy}$) y el esfuerzo cortante (τ).

y (m)	dv_x/dy (seg^{-1})	$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy}$ (Kg_f/m)
0	11.905	0.0000138
0.002	9.524	0.0000111
0.004	7.143	0.0000083
0.006	4.762	0.0000055
0.008	2.381	0.0000028
0.010	0.000	0.0000000

VISCOSIDAD CINEMATICA (ν)

Se define como la relación que existe entre la viscosidad dinámica y la densidad de un fluído.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad 2.19$$

Si hacemos un análisis dimensional de la viscosidad cinemática, obtenemos:

$$\mu = \frac{\frac{FT}{L^2}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{F\ TL^3}{ML} = \frac{(F)\ TL}{M} = \frac{(M\ \frac{L}{T^2}\ )TL}{M} = \frac{L^2}{T}$$

Las unidades en el sistema métrico decimal son: $\frac{cm^2}{seg}$, $\frac{m^2}{seg}$ y el Stoke.

TABLA 2.13 EQUIVALENCIA DEL STOKE CON OTRAS UNIDADES

1 Stoke = 1 cm^2/ seg	1 Stoke = 100 centistokes
1 Stoke = 1 x $10^{-4} m^2$/seg	1 Centistoke = 1 mm^2/seg

TABLA 2.14 VALORES DE LA VISCOSIDAD CINEMATICA EN m /seg PARA EL AGUA A DIFERENTES TEMPERATURAS EN °C

Temperatura	Viscosidad Cinemática x 10^{-6}	Temperatura	Viscosidad Cinemática x 10^{-6}
5	1.520	25	0.897
10	1.308	30	0.804
15	1.142	35	0.727
20	1.007	40	0.661
		50	0.556
		65	0.442

CAPITULO III

HIDROSTATICA

El estudio de los fluídos en reposo relativo recibe el nombre de "Estática de los Fluídos". Este capítulo se enfocará principalmente al estudio de los líquidos en reposo o "Hidrostática". La Hidrostática marca como principal objetivo el estudio del comportamiento de la presión de un líquido en función de la distancia, tanto en su interior como en sus fronteras. Este estudio se divide en varias etapas que se explicarán ampliamente en el presente capítulo.

PRESION HIDROSTATICA

La presión hidrostática se define como la presión que ejerce un líquido en reposo en su interior o sobre una superficie que está en contacto con él.

Si se tiene un área A en contacto con un líquido en reposo, donde la presión que ejerce el líquido varía en diferentes puntos del área, para poder cuantificar la presión hidrostática en toda

el área P_A, es necesario obtener la fuerza resultante del líquido F_A de toda el área y dividirla entre ella (Ecuación 3.1).

$$P_A = \frac{F_A}{A} \qquad 3.1$$

donde: P_A = Presión promedio sobre el área A.

F_A = Fuerza resultante del líquido

A = Area

Si en un incremento del área ΔA, la fuerza de presión del líquido que actúa en ella ΔF, se divide entre el incremento del área, se obtiene un incremento de presión ΔP (Ecuación 3.2)

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad 3.2$$

ΔP es una presión promedio de las diferentes presiones que tiene ΔA, y no tiene necesariamente que ser igual a P_A. Si se aplica un límite de manera que el incremento del área tienda a ser cero, se estará reduciendo el incremento del área a un punto, por lo que la presión del líquido aplicada en un punto se llamará presión hidrostática puntual P (Ecuación 3.3)

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta A} \right) = \frac{dF}{dA} \qquad 3.3$$

P no tiene que ser igual a ΔP ni a ΔA, solamente será igual cuando todas las presiones puntuales sean iguales.

PROPIEDADES DE LA PRESION HIDROSTATICA

La fuerza que ejerce un líquido en el punto, actúa normal al área de acción. En el caso de una superficie curvada, esta fuer-

za estará actuando en forma perpendicular a la tangente de la cur va en este punto (Figura 3.1).

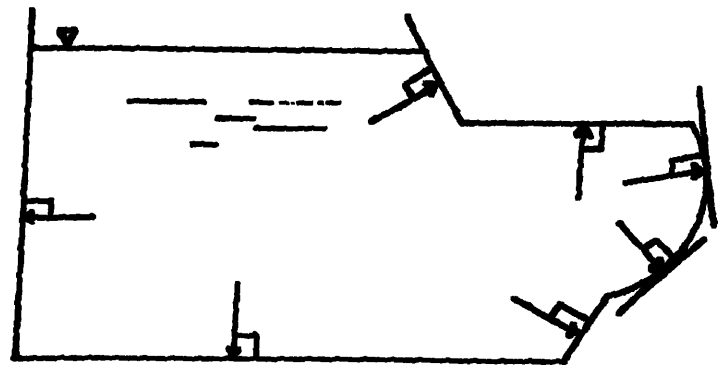


Fig. 3.1 Fuerzas de presión actuando sobre las paredes de un recipiente.

Un líquido en reposo está expuesto a tensión de compresión y nunca de expansión. Todas las presiones de compresión que vienen en todas direcciones y se dirigen a un punto en el interior del - líquido en reposo son iguales. $P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = P_n$. (Figura 3.2)

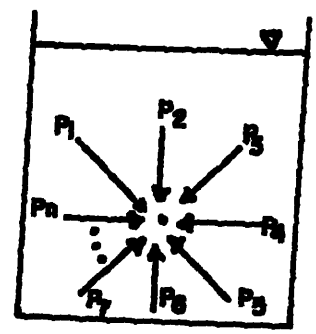


Fig. 3.2 Fuerzas de presión en el interior de un líquido

Lo anterior se demuestra si tenemos una figura imaginaria - cualesquiera que sea, que se encuentre en el interior de un líqui- do en repsoo, por ejemplo, un prisma trangular de anchura unitaria (Figura 3.3 y 3.4)

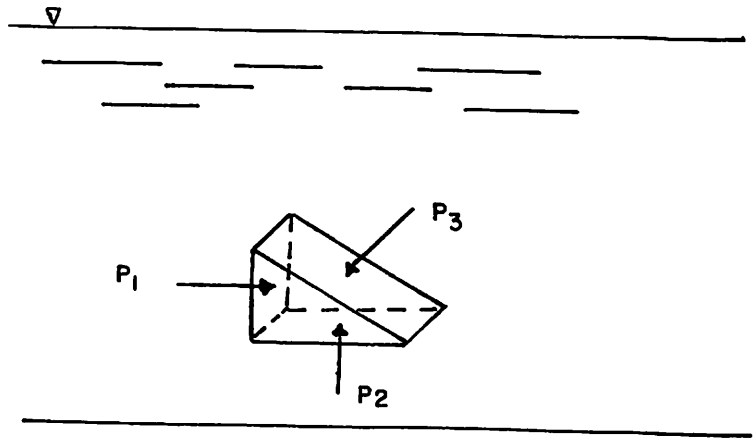


Fig. 3.3 Prisma triangular de anchura unitaria imaginaria en el interior de un líquido en reposo.

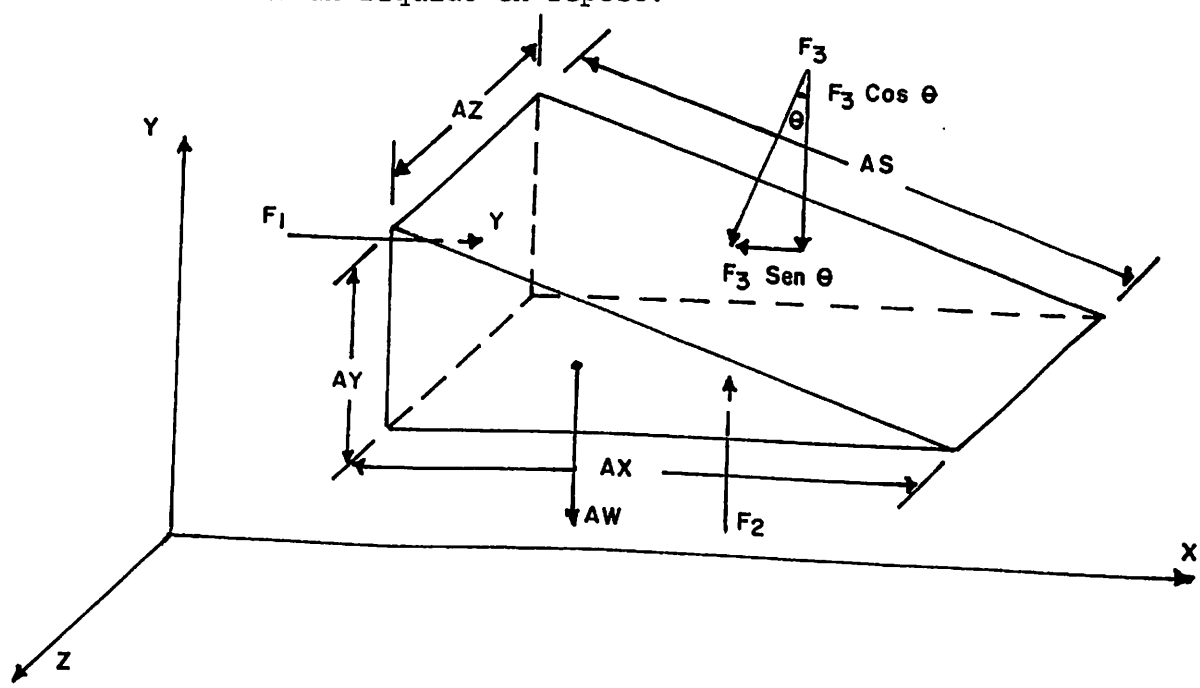


Fig. 3.4 Fuerzas de presión actuando en todas las caras del prisma triangular en el interior de un líquido en reposo.

donde:

$$F_1 = P_1 \Delta Y \ \Delta Z = P_1 \ \Delta Y \qquad 3.4a$$

$$F_2 = P_2 \Delta X \ \Delta Z = P_2 \ \Delta X \qquad 3.4b$$

$$F_3 = P_3 \Delta S \ \Delta Z = P_3 \ \Delta S \qquad 3.4c$$

$$\Delta W = \left(\frac{\Delta X \ \Delta Y}{2} \right) ZY = \left(\frac{\Delta X \ \Delta Y}{2} \right) \gamma \qquad 3.4d$$

Como el sistema en estudio se encuentra en reposo, se aplica la primera ley de Newton

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F_1 - F_3 (Sen\theta) = 0 \qquad 3.5$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_2 - F_3 (Cos\theta) = W = 0 \qquad 3.6$$

Se sustituye 3.4a y 3.4c en 3.5; 3.4b, 3.4c; y 3.4d en 3.6

$$P_1 \Delta y - P_2 \Delta S (Sen\theta) = 0 \qquad 3.7$$

$$P_2 \Delta x - P_3 \Delta S (Cos\theta) - \left(\frac{\Delta x \Delta y}{2} \right) = 0 \qquad 3.8$$

También:

$$\Delta y = \Delta S (Sen\theta) \qquad 3.9$$

$$\Delta x = \Delta S (Cos\theta) \qquad 3.10$$

Se sustituye 3.9 en 3.7; 3.10 en 3.8

$$P_1 \Delta S (Sen\theta) - P_3 \Delta S (Sen\theta) = 0 \qquad 3.11$$

$$P_2 \Delta S (Cos\theta) - P_3 \Delta S (Cos\theta) - \frac{\Delta S(Sen\theta)\ \Delta S(Cos\theta)\gamma}{2} = 0 \qquad 3.12$$

Ahora dividimos 3.11 entre $\Delta S (Sen\theta)$ y obtenemos:

$$P_1 - P_3 = 0 \qquad 3.13$$

De la ecuación 3.12 se concluye que:

$$P_1 = P_3 \qquad 3.14$$

Si se divide 3.12 entre $\Delta S (Cos\theta)$, resulta:

$$P_2 - P_3 - \frac{\Delta S (Sen\theta)}{2} = 0 \qquad 3.15$$

Si se aplica un límite a la ecuación 3.15 de manera que el $\Delta S \to 0$ la figura se transforma en un punto, y la fracción $\frac{\Delta S(Sen\theta)\gamma}{2}$ tiende a ser cero, por lo que la ecuación 3.15 se transforma en:

$$P_2 - P_3 = 0 \qquad 3.16$$

De la ecuación 3.16 se concluye que:

$$P_2 = P_3 \qquad 3.17$$

Si la $P_2 = P_3$ y la $P_3 = P_1$, entonces:

$$P_1 = P_2 = P_3 \qquad 3.18$$

La ecuación 3.18 demuestra que todas las presiones que intervienen en un punto en el interior del líquido son iguales.

Toda presión aplicada a un líquido encerrado en un depósito, se transmite sin reducción alguna a todos los puntos del líquido y a las paredes del depósito que lo contiene (Principio de Pascal).

La Figura 3.5a muestra la presión que tiene un líquido en su interior, en tres puntos diferentes, mientras que la Figura 3.5b muestra el mismo recipiente con un incremento de presión ΔP que se transmite a los tres puntos anteriores desde la superficie, el cual no muestra reducción alguna en cualquiera de los puntos por más alejados que estén de la superficie del líquido.

Un cuerpo parcial o totalmente sumergido en un líquido, es empujado hacia arriba por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado. (Principio de Arquímedes).

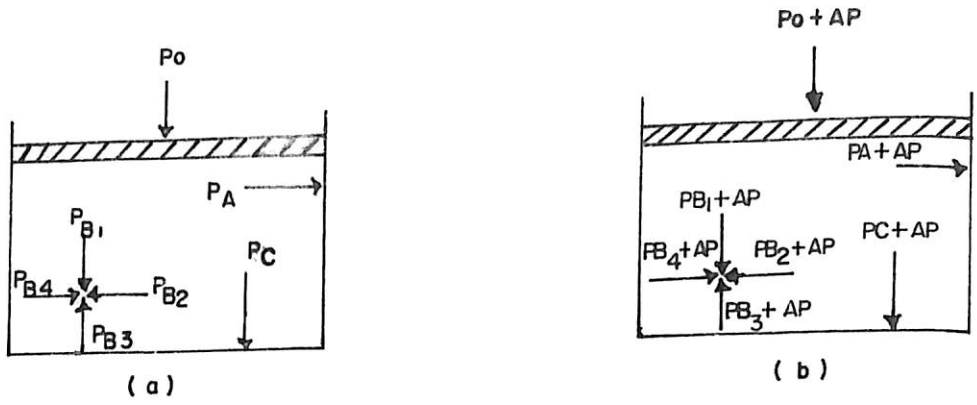


Fig. 3.5 Presión en el interior de un líquido. a) Con una presión P_0. b) con un incremento de presión

En la Figura 3.6 se observa un recipiente grande y otro pequeño. El recipiente más grande contiene un líquido con un cuerpo parcialmente sumergido, en un caso (Figura 3.6a) y totalmente sumergido, en otro (Figura 3.6b). El recipiente más pequeño contiene el volumen del líquido desplazado debido a la sumersión parcial (Figura 3.6a) o total (Figura 3.6b) del cuerpo. Para ambos casos, la fuerza vertical ascendente con que empuja el líquido al cuerpo, es igual al peso del líquido desplazado. (Fv = W)

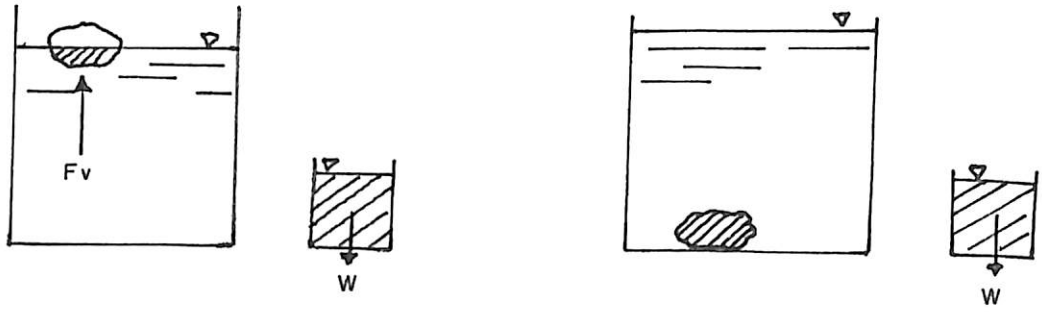


Fig. 3.6 Cuerpos empujados en forma ascendente por un líquido. a) Cuerpo parcialmente sumergido. b) Cuerpo totalmente sumergido.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE UN LIQUIDO EN REPOSO

Si se tiene un líquido en reposo y analizamos las fuerzas - que actúan sobre una porción infinitesimal del fluído en forma de paralelepípedo (Figura 3.7), se observarán que existen dos clases de fuerzas.

a) Fuerzas de masa.

b) Fuerzas superficiales

Las fuerzas de masa son fuerzas que se originan sin estar en contacto directo con un medio externo o sea, son fuerzas internas a la porción infinitesimal del líquido, como por ejemplo, las - fuerzas gravitacionales o peso y se deben a la atracción de la - tierra sobre la masa, otro ejemplo serían las fuerzas electromagnéticas. Las fuerzas superficiales son fuerzas que se originan - al estar en contacto directo con un medio externo, o sea, son - fuerzas externas a la porción infinitesimal del líquido o fuerzas que ejerce el líquido externo sobre el contorno de la porción del líquido en forma de paralelepípedo.

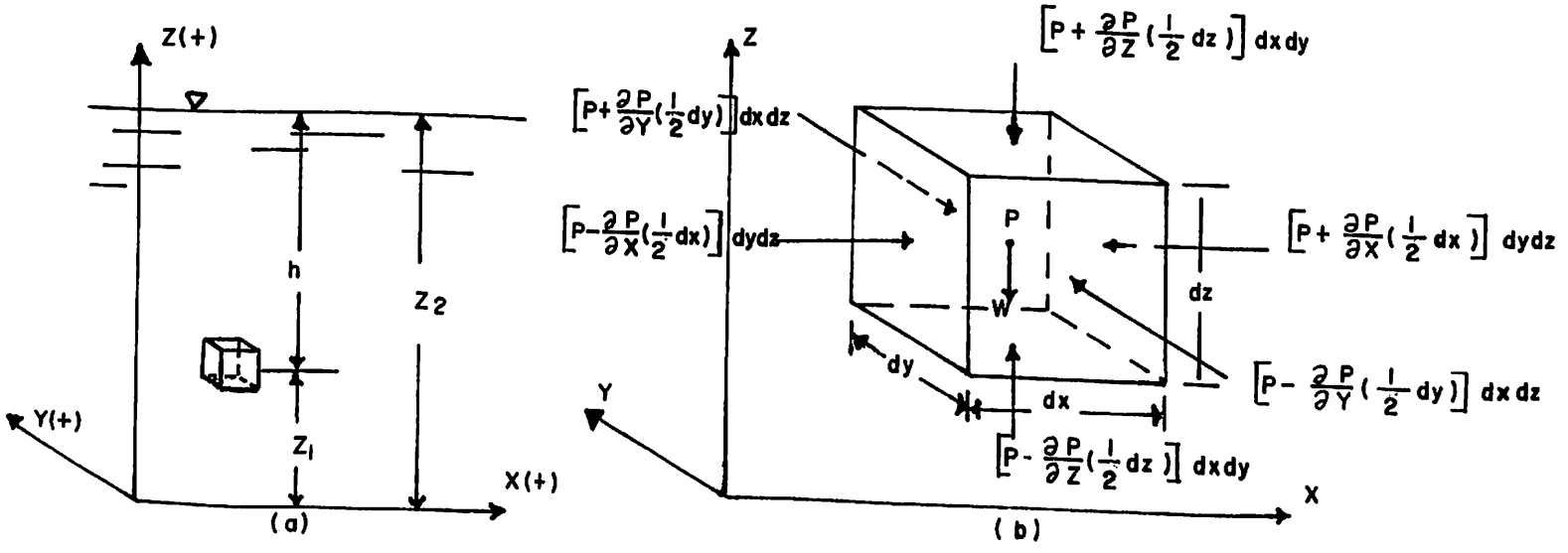


Fig. 3.7 Líquido en reposo dentro de un plano referencial x,y,z. (a) Porción infinitesimal del líquido en forma de paralelepípedo. (b) Porción infinitesimal agrandada donde - actúan las fuerzas externas e internas.

La presión en el centro del paralelepípedo será igual a P y a la vez se tendrán las siguientes asunciones:

a) La presión en cualquier otro punto que no sea el centro - será diferente a P.

b) Las presiones se incrementarán hacia el sentido positivo de los ejes.

En el caso de que no sea real cualquiera de las asunciones, la primera se corregirá en el momento de obtener la ecuación diferencial del líquido en reposo, y la segunda se corregirá al integrar la ecuación diferencial.

Para obtener las fuerzas externas que actúan en cada cara - del paralelepípedo, es necesario que a P se le agregue el aumento de presión que se tiene al variar la distancia del centro a una de las caras del paralelepípedo en el caso de que sea en dirección - positiva, o restarle la disminución de la presión cuando sea en - sentido contrario y, finalmente, multiplicarlo por el área de la cara del paralelepípedo para obtener la fuerza externa. Por ejemplo, si se quieren conocer las fuerzas perpendiculares al plano - zy tendríamos que ver el plano zx del paralelepípedo (Figura 3.8) y calcular el aumento o la disminución de la presión del centro a las caras paralelas al plano zy.

aumento o disminución de la presión dentro del paralelepípedo a las caras paralelas al plano zy $= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{2} dx \right)$ 3.19

Es necesario derivar en forma parcial para mantener constan-

tes a las variables y y z por lo que el estudio es en línea recta del centro del paralelepípedo al centro de sus caras.

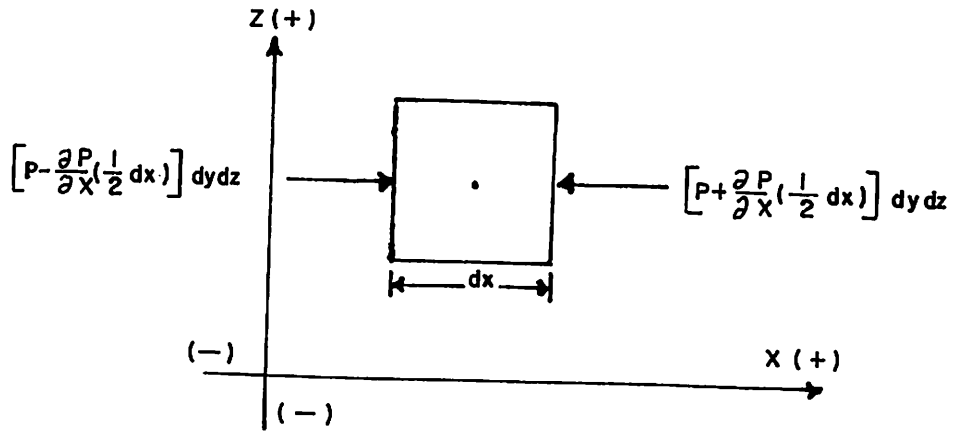


Fig. 3.8 Plano zx de la figura tridimensional paralelepípeda

Si el líquido está estático, las fuerzas que intervienen en la porción infinitesimal del líquido se anularán.

$$\Sigma Fx = 0 \qquad 3.20$$

$$\Sigma Fy = 0 \qquad 3.21$$

$$\Sigma Fz = 0 \qquad 3.22$$

$$\Sigma Fx = [P - \frac{\partial P}{\partial x}(\tfrac{1}{2}dx)]dydz - [P + \frac{\partial P}{\partial x}(\tfrac{1}{2}dx)]dydz = 0 \qquad 3.23$$

$$\Sigma Fy = [P - \frac{\partial P}{\partial y}(\tfrac{1}{2}dy)]dxdz - [P + \frac{\partial P}{\partial y}(\tfrac{1}{2}dy)]dxdz = 0 \qquad 3.24$$

$$\Sigma Fz = [P - \frac{\partial P}{\partial z}(\tfrac{1}{2}dz)]dydx - [P + \frac{\partial P}{\partial z}(\tfrac{1}{2}dz)]dydx - W = 0 \qquad 3.25$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = 0 \text{ (en dirección x)} \qquad 3.26$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = 0 \text{ (en dirección y)} \qquad 3.27$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz + W = 0 \text{ (en dirección z)} \qquad 3.28$$

Donde W es el peso del líquido dentro del paralelepípedo

$$W = (\rho\, dxdydx)(g) \qquad 3.29$$

Si sustituímos 3.29 en 3.28 , obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \text{ dxdydz} + (\text{ dxdydz})g = 0 \qquad 3.30$$

Ahora, dividamos 3.26 , 3.27 y 3.30 entre dxdydz

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ (en dirección x)} \qquad 3.31$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ (en dirección y)} \qquad 3.32$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g \text{ (en dirección z)} \qquad 3.33$$

Las ecuaciones 3.31, 3.32 y 3.33 son conocidas como las ecuaciones de Euler, por Leonhard Euler (1707-1783) matemático, físico y astrónomo suizo.

Se observa de las ecuaciones 3.31 y 3.32 que la presión es constante con respecto a los ejes x y y, por lo que la ecuación 3.33 se puede convertir en una derivada total.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - g \qquad 3.34$$

$$\gamma = \rho g \qquad 3.35$$

Se sustituye 3.35 en 3.34

$$\frac{dP}{dz} = - \gamma \qquad 3.36$$

Al despejar dP, resulta:

$$dP = - \gamma \, dz \qquad 3.37$$

La ecuación 3.37 es la ecuación diferencial de un líquido en reposo y observamos que cuando un líquido se encuentra estático, la presión en un plano horizontal no varía (mientras exista continuidad en el líquido), sino que solamente varía en un plano vertical. También se observa que la primera asunción era falsa porque todos los puntos que se encuentran a la misma profundidad del punto central del paralelepípedo, tienen la misma presión P.

INTEGRACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE UN LIQUIDO EN REPOSO

Para poder cuantificar la presión del líquido en función de la profundidad, es necesario integrar la ecuación diferencial y - se puede hacer de dos maneras:

a) Integrando con límites.
b) Integrando sin límites.

Si se integra con límites la ecuación 3.37, va de un límite - inferior (subíndice 1) a un superior (subíndice 2), o sea: $z_1 < z_2$ y $P_1 < P_2$ (según la segunda asunción).

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = - \gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \qquad 3.38$$

$$P_2 - P_1 = - \gamma (z_2 - z_1) \qquad 3.39$$

Donde P_1 es la presión del líquido a cierta profundidad h y P_2 es la presión en la superficie libre del líquido. Observando la Figura 3.7a, se tiene que:

$$P_1 = Ph \qquad 3.40$$

$$P_2 = P_0 \qquad 3.41$$

$$z_2 - z_1 = h \qquad 3.42$$

Al sustituír la ecuación 3.40, 3.41 y 3.42 en 3.39 resulta:

$$P_0 - Ph = - \gamma h \qquad 3.43$$

Si despejamos Ph, se obtiene:

$$Ph = \gamma h + P_0 \qquad 3.44$$

La ecuación 3.44 nos indica que para cuantificar la presión a cualquier profundidad, es necesario conocer el peso específico del líquido para multiplicarlo por la profundidad y acondicionarle la presión que tiene la superficie libre del fluído.

La ecuación 3.44 también nos indica que las presiones se incrementarán en el sentido negativo del eje z, por lo que la segunda asunción también es falsa.

Si la ecuación 3.37 se integra sin límites, habrá que evaluar la constante de integración (c) por medio de condiciones frontera

$$\int dP = - \gamma \int dz \qquad 3.45$$

$$P = -\gamma z + c \qquad 3.46$$

Utilizando la condición frontera en la superficie libre del líquido, se tiene que $P = P_0$ si y sólo si $z = z_2$

$$P_0 = - \gamma z_2 + c \qquad 3.47$$

Si se despeja c de la ecuación 3.47, resulta:

$$c = P_2 + \gamma z_2 \qquad 3.48$$

Ahora, sustituyamos 3.48 en 3.46

$$P = - \gamma z + P_0 + \gamma z_2 \qquad 3.49$$

Al utilizar la condición frontera a cualquier profundidad, - se tiene que $P = Ph$ si y sólo si $z = z_1$

$$Ph = - \gamma z_1 + P + \gamma z_2 \qquad 3.50$$

Al factorizar la ecuación 3.42 se tiene:

$$Ph = \gamma (z_2 - z_1) + P_0 \qquad 3.51$$

Si sustituimos la ecuación 3.42 en 3.51 se obtiene la ecuación 3.44

$$Ph = \gamma h + P_0$$

MANOMETRIA

La manometría se define como la técnica de medir la presión a un fluído. Para ello, se basa en la ecuación 3.44

Cuando el fluído es un gas, el peso específico es relativa - mente pequeño, por lo que, para alturas no muy grandes, la presión tiene una variación insignificante y así, en un depósito que tiene encerrado un gas, se puede considerar que la presión es cons - tante en todos los puntos. Si la altura es muy grande, la variación es significativa y como es un fluído compresible, el peso específico varía con la altura y la temperatura.

En 1657 Otto Von Guericke (1602-1686), nacido en Magdeburg, Alemania, demostró la existencia del vacío y la posibilidad de obtenerlo.

El vacío absoluto se define como el espacio que tiene ausencia de materia y, por lo tanto, tendrá ausencia de presión de algún fluído.

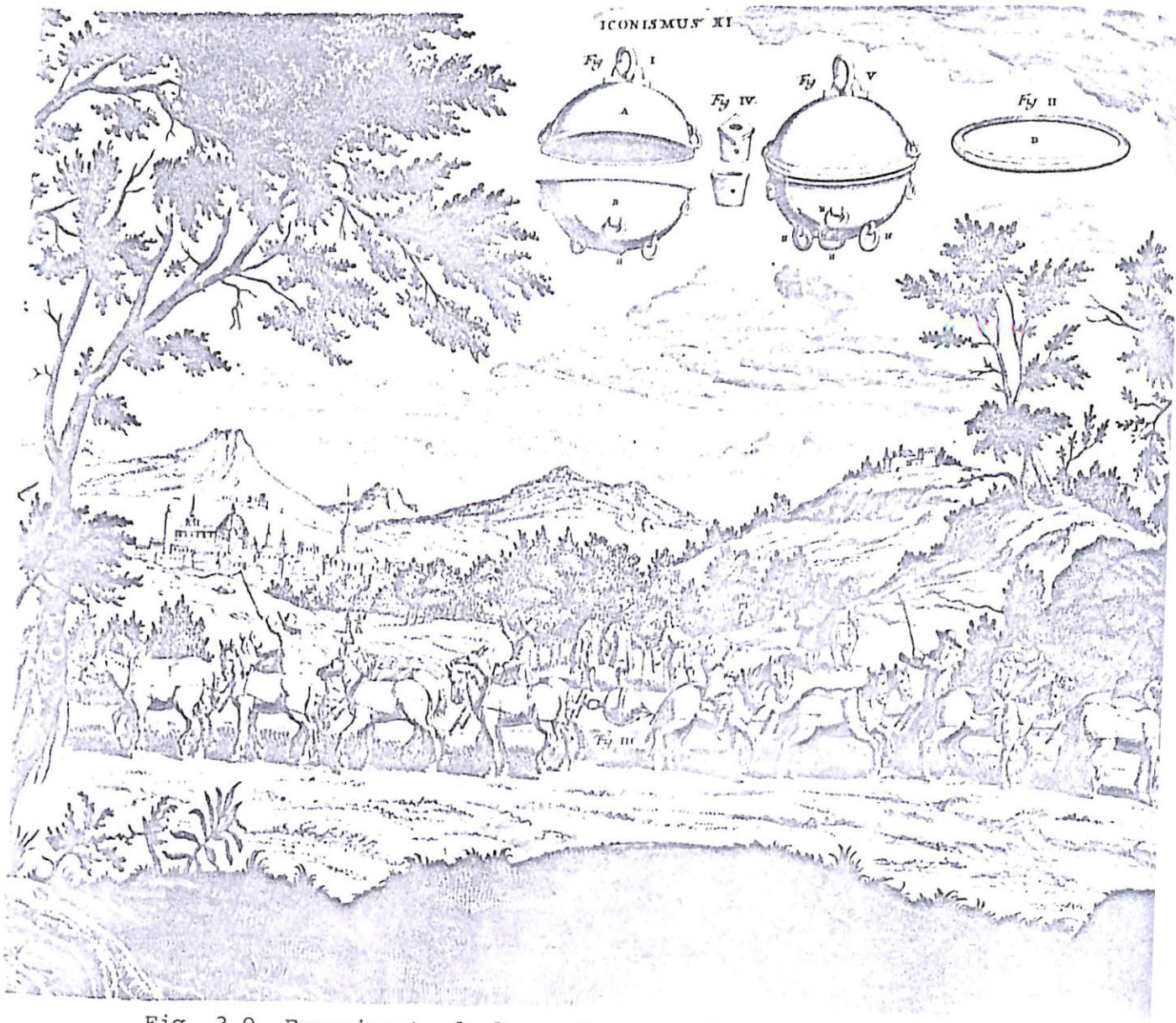


Fig. 3.9 Experimento de las esferas en Magdeburg hecho por Guericke. Londres, Science Museum.

La presión atmosférica local[1] se define como la presión que ejerce la atmósfera sobre un lugar determinado de nuestro planeta y varía con la altitud y con las condiciones climatológicas del - lugar.

La presión atmosférica estandar es la presión atmosférica al nivel del mar y equivale a una atmósfera de presión que es igual a 1.033 kgf/cm^2 o la presión que ejerce sobre su base una columna de agua de 10.33 m de altura sin contar con la presión en la su - perficie ($P_0 = 0$) o la presión que ejerce una columna de mercurio de 760 mm de altura en las mismas condiciones que la columna de - agua.

Se dice que un sistema[2] tiene un vacío parcial siempre y - cuando la presión atmosférica que lo rodea sea mayor que la pre - sión en su interior, pero hay que aclarar que cuando el sistema - tenga ausencia de materia, el vacío parcial se transforma en va - cío absoluto.

Cuando se habla de medir presiones, se han tomado dos nive - les de referencia para medirlas. La primera es un nivel de refe- rencia fijo y parte del vacío absoluto, por lo que este tipo de - medida se le nombra presión absoluta (Figura 3.10). El segundo - nivel de referencia es móvil y se mide a partir de la presión at- mosférica local que varía con el lugar, y a esta clase de medida

---

[1] A la presión atmosférica local se le llamará simplemente presión atmosférica. Cuando se haga referencia a la presión al nivel del mar o estándar, se le nombrará en forma completa, y hay que recordar que la presión al nivel - del mar es fija, $P = 1.133\ kgf/cm^2$.

[2] Sistema se define como cualquier porción del universo, puede ser, por ejemplo, todo el interior de un recipiente.

se le define como presión relativa o manométrica. En la Figura 3.10 se ve claramente que si el sistema tiene una presión absoluta mayor que la presión atmosférica, la presión relativa será un excedente a la presión atmosférica y será positiva, en cambio si es lo contrario, la presión relativa será un faltante para que la presión absoluta se iguale con la atmosférica.

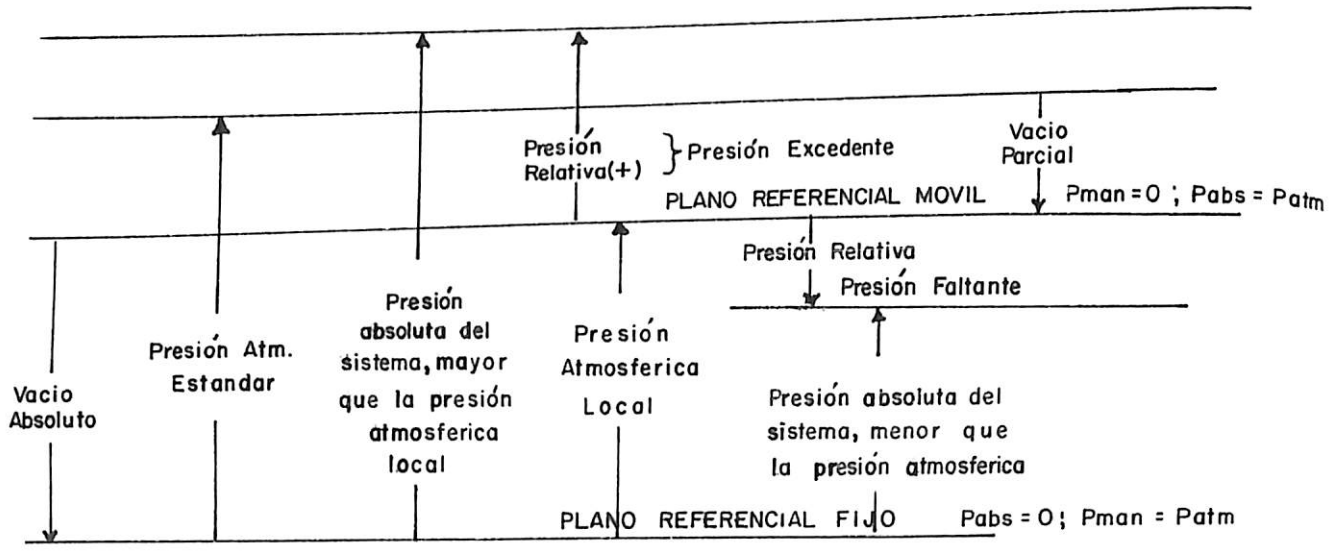


Fig. 3.10 Nivel fijo y nivel móvil referencial para medir presiones.

$$P_{abs} = P_{atm} + P \text{ manométrica o relativa} \qquad 3.52$$

$$P_{abs} = P_{atm} - P \text{ manométrica o relativa} \qquad 3.53$$

La ecuación 3.52 se utiliza para sistemas que tienen presiones absolutas mayores a la presión atmosférica y la ecuación 3.53 se utiliza cuando el sistema tiene vacío parcial o total. En las presiones manométricas, si la presión está por arriba del nivel referencial, la presión es positiva; si está en el nivel referencial ($P_{abs} = P_{atm}$) la presión es cero, y si está por debajo, la presión es negativa. Sin embargo, hay que aclarar que una presión manométrica negativa lleva ese signo para restarsela a la -

presión atmosférica y estar en función de la presión absoluta como nos expresa la ecuación 3.53

DISPOSITIVOS QUE MIDEN PRESIONES ABSOLUTAS Y MANOMETRICAS

Barómetro de Mercurio

Inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647) en el año de 1643, nacido en Faenza, Italia; fue discípulo de Galileo y en 1644 escribió una obra en la que afirmaba que vivimos en un océano de aire de 800 km de altura y un peso de 1/800 de la densidad del agua, donde demostró la fuerza de la presión atmosférica.

El barómetro de mercurio, es un dispositivo que consta de un tubo recto de vidrio cerrado por un extremo, un recipiente y mercurio; y sirve para medir la presión atmosférica local o barométrica.

Para medir la presión se llena el tubo totalmente con mercurio, se tapa evitando que entre aire y tapado se invierte, sumergiéndolo en el recipiente, el cual también contiene mercurio, ya sumergido, se destapa y se notará que el líquido baja hasta un cierto nivel, que resulta al igualarse la presión en un punto A en el interior del tubo, con la presión atmosférica local (el punto A y la superficie libre del líquido exterior se encuentran al mismo nivel).

La presión en el punto A, se debe a la columna de mercurio que se encuentra sobre él, más la presión que ejercen las partículas de vapor que se desprenden de la superficie libre del mercu

rio (interior) llamada presión de vapor Pv (variable con la temperatura). Para nuestro caso, la presión de vapor del mercurio es tan insignificante que se desprecia, por lo tanto, la presión en el punto A se deberá exclusivamente a la presión de la columna de mercurio.



Fig. 3.11 Experimento de Torricelli para medir la presión atmosférica. (a) Torricelli en un grabado del siglo XIX. The Granger Collection.

De acuerdo a lo anterior, se utilizará la ecuación 3.44 haciendo las siguientes observaciones:

a) La presión en el punto A es igual a la presión atmosférica local por estar al mismo nivel de la superficie libre del mercurio en el recipiente.

b) El punto A se va a tomar como un punto a cierta profundidad h medida a partir de la superficie libre del mercurio en el interior del tubo.

c) La presión de vapor del mercurio Pv que tiende a ser cero se tomará como P_0.

Por lo tanto: Ph = P_A y P_0 = Pv; al sustituir los datos anteriores en la ecuación 3.44, se obtiene:

$$P_A = \gamma \text{ Hg } h + Pv \qquad 3.54$$

También $P_A = P_{atm}$ y $P_v \cong 0$; por lo que al sustituír en la ecuación 3.54 resulta:

$$P_{atm} = \gamma \text{ Hg } h \qquad 3.55$$

Ejemplo 3.1 Encuentre la presión en columna de mercurio, si el barómetro se encuentra al nivel del mar y en condiciones normales.

Solución. Se despeja h de la ecuación 3.55

$$h = \frac{P_{atm}}{Hg} = \frac{1.033 \text{ Kgf/cm}^2}{0.013570 \text{ Kgf/cm}^3} = 76 \text{ cm de Hg}$$

Piezómetro

Es el manómetro de forma más simple y se utiliza para medir presiones relativas o manométricas. Consiste en un tubo en el cual uno de sus extremos está abierto a la atmósfera y el otro conectado en forma perpendicular a la pared de un recipiente o conducto que lo comunica hasta su interior. Este aparato es muy utilizado para ver el nivel de líquido en un recipiente cerrado no -

transparente en el cual la presión de la superficie libre del líquido interior, es igual a la presión atmosférica (Figura 3.12).

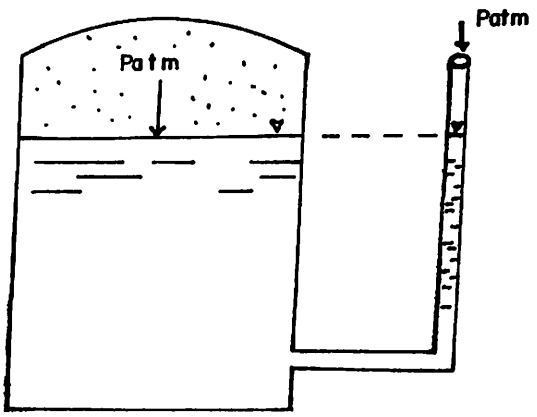
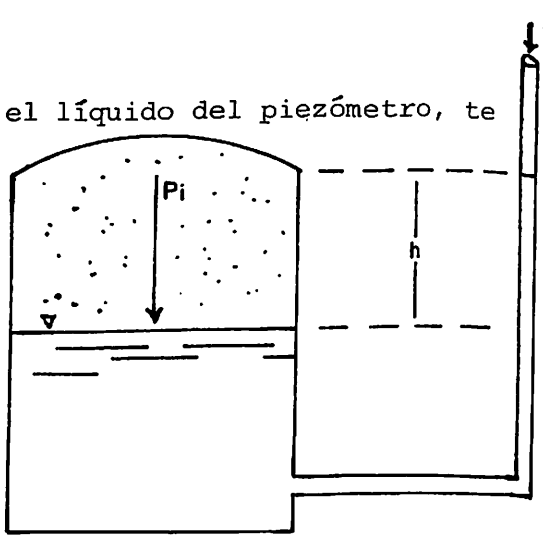


Fig. 3.12 Piezómetro instalado en un tanque cerrado

Ejemplo 3.2. Encontrar la presión relativa del aire que se encuentra en el interior del recipiente si la superficie libre del agua en el piezómetro se encuentra: a) a una altura h por arriba de la superficie libre del agua en el recipiente. b) a una altura h por debajo de la superficie libre del agua en el recipiente.

Solución Inciso (a)

Si se aplica la ecuación 3.44 en el líquido del piezómetro, tenemos:



$$Ph = \gamma h + P_0$$

$$Ph = P_i$$

$$P_0 = P_{atm}$$

$$P_i = \gamma h + P_{atm}$$

Si la ecuación 3.52 la comparamos con la anterior, se observa:

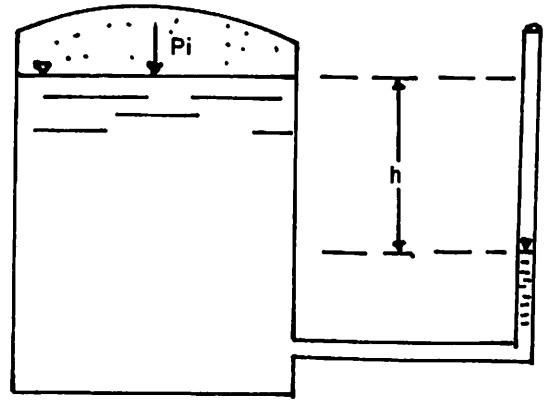
$$\begin{array}{ccccc} P_{abs} & = & P_{atm} & + & P_{manométrica} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P_i & = & P_{atm} & + & \gamma h \end{array}$$

$$P_i = P_{abs}$$

$$P_{man} = \gamma\ h$$

El signo positivo indica el excedente que tiene P_i con respecto a la presión atmosférica.

Solución Inciso (b)



Al aplicar la ecuación 3.44 en el líquido del recipiente, resulta:

$$Ph = \gamma\ h + P_0$$

$$Ph = P_{atm}$$

$$P_0 = P_i$$

$$P_{atm} = \gamma\ h + P_i$$

$$P_i = P_{atm} - \gamma\ h$$

Comparando la última ecuación con la ecuación 3.53

$$P_{abs} = P_{atm} - P_{manométrica}$$

$$P_i = P_{atm} - \gamma\ h$$

$$P_i = P_{abs}$$

$$P_{man} = -\ \gamma\ h$$

El signo negativo nos indica el faltante que tiene P_i para que se iguale con la presión atmosférica.

Los piezómetros también se utilizan para medir la presión con que vienen comprimidos los líquidos que fluyen por un conducto.

Las principales limitantes de los piezómetros se presentan cuando hay que medir grandes presiones en líquidos ligeros, y para medir la presión en los gases. En el primer caso, se tendrían que usar piezómetros demiasiado largos, como por ejemplo, para medir 3 atm. de presión, se requiere de un piezómetro de poco más de 30 m de longitud, y para el segundo caso, no es posible medir la presión debido a que el gas se escaparía a la atmósfera a través del piezómetro.

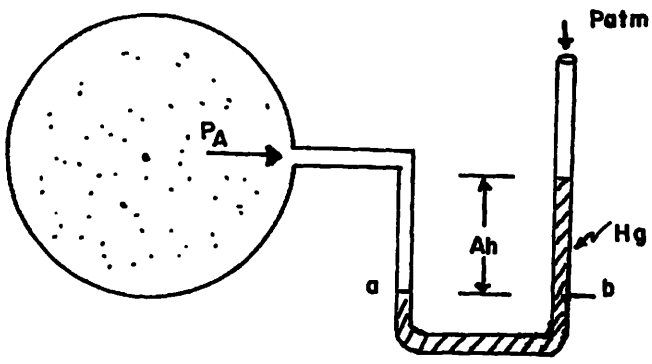
Manómetro Abierto

Es un tubo generalmente doblado en forma de U, que contiene líquido pesado, de peso específico conocido, por lo común mercurio. Uno de sus extremos está abierto a la atmósfera y el otro conectado en forma perpendicular a un depósito o conducto que contenga un fluído (líquido o gas).

Ejemplo 3.3 Encontrar la presión absoluta y relativa en un depósito que tiene confinado gas propano, si la presión atmosférica es conocida. ¿La presión del propano es absoluta o relativa?

Solución. Como los puntos a y b están en un plano horizontal:

$$Pa = Pb$$



$P_a = P_A$

$P_b = P_{atm} + \gamma\ Hg\ \Delta h$

$P_A = P_{atm} + \gamma\ Hg\ \Delta$

P_A = Presión absoluta

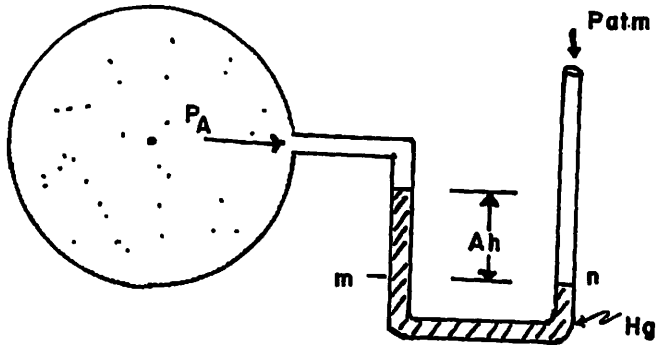
$P_{man} = \gamma\ Hg\ \ \Delta H$

$P_{man\ A}$ = Presión del Propano

Ejemplo 3.4 Encontrar la presión absoluta y relativa en un depósito que tiene confinado aire, si es conocida la presión atmosférica.

Como los puntos m y n están en un plano horizontal:

$$P_m = P_n$$



$P_m = P_A + \gamma\ Hg\ \Delta h$

$P_n = P_{atm}$

$P_A + \gamma\ Hg\Delta h = P_{atm}$

P_A = Presión Absoluta

$P_{man\ A} = -\ \gamma\ Hg\ \Delta h$

también podría ser:

$P_{man\ A} = \gamma\ Hg\ \Delta h$

vacío parcial.

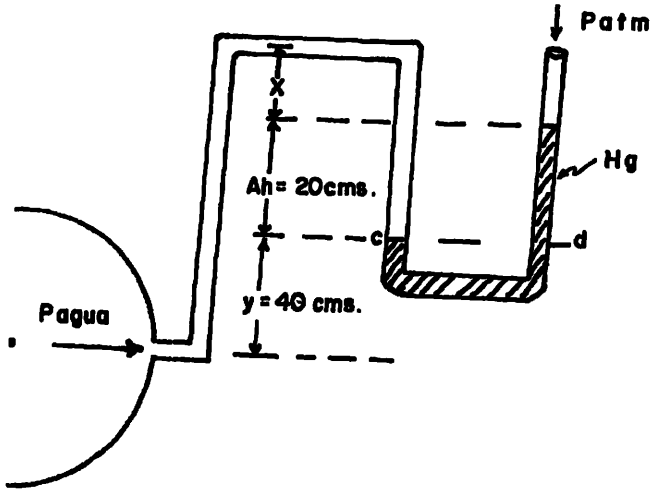
Ejemplo 3.5 Encontrar la presión manométrica del agua que fluye a presión por un conducto circular.

Se va a considerar que la presión del agua (P_{agua}) es positiva de manera que todas las presiones que estén a su favor son positivas y las que estén en contra, negativas; desde el extremo del manómetro insertado hasta el punto C; y en el otro extremo

la Patm es positiva y la presión que vaya en contra, negativa.

Pudo hacerse todo lo contrario en estas consideraciones:

$$P_c = P_d$$



$$P_c = P_{agua} - \gamma_{agua}\,(y + \Delta h + x) + \gamma_{agua}\,(x + \Delta h)$$

$$P_d = P_{atm} + \gamma_{Hg}\,\Delta h$$

$$P_c = P_{agua} - \gamma_{agua}\,y$$

$$P_{agua} - \gamma_{agua}\,y = P_{atm} + \gamma_{Hg}\,\Delta h$$

$$P_{agua\ absoluta} = P_{atm} + \gamma_{Hg}\,\Delta h + \gamma_{agua}\,y$$

$$P_{agua\ manométrica} = \gamma_{Hg}\,\Delta h + \gamma_{agua}\,y^{1}$$

$$P_{agua\ manométrica} = (13\,570\ Kg_f/m^3)\,(0.2) + (1\,000\ Kg_f/m^3)\,(0.4m)$$

$$P_{agua\ manométrica} = 3\,114\ Kg_f/m^2$$

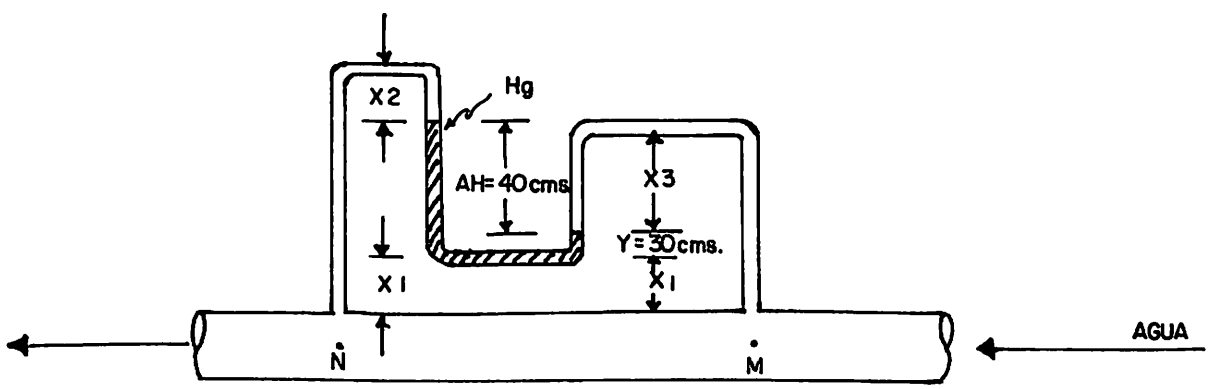
Manómetro Diferencial

En su forma tiene las mismas características que el manóme - tro abierto, con la diferencia de que el manómetro diferencial no tiene ningún extremo abierto a la atmósfera, sino que los dos ex-

[1] se desprecia la presión atmosférica

tremos están conectados a dos recipientes o a uno solo o a dos puntos en una línea de un conducto. El manómetro diferencial, como su nombre lo indica, sólo mide diferencias de presiones entre dos puntos.

Ejemplo 3.6 Encuentre la pérdida de presión en Kg_f/cm que existe entre M y N debido al paso del agua por el conducto circular.



Solución

$$P_a = P_b$$

$$P_a = PM - \gamma \text{ agua } (X_1 + y + X_3) + \gamma \text{ agua } X_3$$

$$P_b = PN - \gamma \text{ agua } (X_1 + \Delta h + X_2) + \gamma \text{ agua } X_2 + \gamma \text{ Hg} \Delta h$$

$$P_a = PM - \gamma \text{ agua } (X_1 + y)$$

$$P_b = PN - \gamma \text{ agua } (X_1 + \Delta h) + \gamma \text{ Hg } \Delta h$$

$$PM - PN = (\gamma \text{ Hg} - \gamma H_2O)\ \Delta h + \gamma \text{ agua } y$$

$$PM - PN = \left(13\,570 \frac{Kgf}{m^3} - 1\,000 \frac{Kgf}{m^3}\right)\ 0.4 \text{ m} + \left(1\,000 \frac{Kgf}{m^3}\right)(0.3m)$$

$$PM - PN = 0.53\ Kg_f/cm^2$$

Manómetro de Bourdon

Mide presiones manométricas o relativas; la parte sensible del aparato es un tubo de metal hueco flexible, aplanado en su sección transversal y encorvado en su longitud, el cual uno de sus extremos está cerrado y el otro comunicado a la presión que ha de medirse. Cuando aumenta la presión, el tubo tiende a esti-

rarse y el extremo cerrado acciona una manecilla mediante una serie de eslabones. Dicha manecilla indica los aumentos de presión mediante una escala graduada de acuerdo a un sistema de unidades.

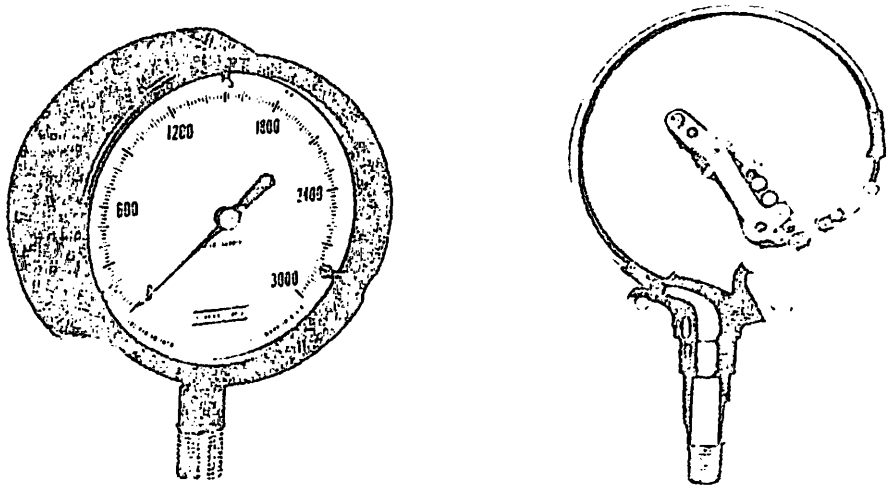
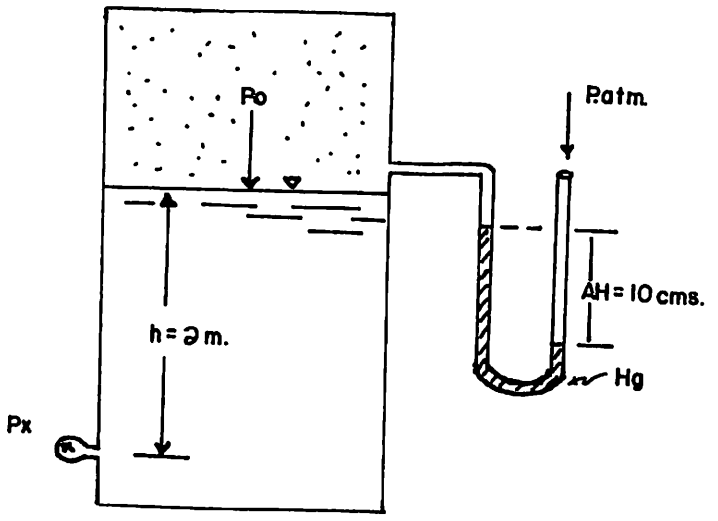


Fig. 3.14 Manómetro de Bourdon

Cuando la presión es la atmosférica local, la manecilla indica el valor de cero, por lo que no la toma en cuenta, por eso mide presiones relativas. Antes de usar esta aparato, hay que ajustarlo haciendo que la manecilla marque cero.

En este tipo de dispositivo, existen los vacuómetros que miden presiones negativas, que son usados en los tensiómetros para medir el potencial mátrico del suelo, y por último, también los hay que miden tanto presiones positivas como negativas.

Ejemplo 3.7 Calcule la presión del manómetro bourdon (P_X) y especifique si es una presión positiva o negativa. ¿Qué presión manométrica tiene el aire del interior del recipiente (PA)?



Solución

$Ph = \gamma h + P_0$

Ph es una presión absoluta

$Ph_{man} = \gamma h + P_{0man}$

P_{0man} no considera la P_{atm}

$Ph_{man} = Px$

$Px = \gamma$ agua $h + P_{0man}$

$P_a = P_b$

$P_a = P_0 + \gamma$ Hg Δh

$P_b = P_{atm}$

$P_{0man} = -\gamma$ Hg Δh

$Px = \gamma$ agua $h - \gamma$ Hg Δh

$Px = (1\,000\ Kg_f/m^3)(2m) - (13\,570\ Kg_f/m^3)(0.1m)$

$Px = 0.0643\ Kg_f/cm^2$

$P_{man} = PA$

$PA = 0.1\,357\ Kg_f/cm^2$

o también:

$PA = 0.1\,357\ Kg_f/cm^2$

Vacío parcial

FUERZA DE LA PRESION HIDROSTATICA SOBRE SUPERFICIES PLANAS

Si se tiene un muro reteniendo agua y queremos saber la fuerza resultante con que el agua empuja al muro, lo primero que debemos tomar en cuenta, es que la fuerza de empuje tiene su origen en una presión relativa, porque la fuerza de la presión atmosférica se elimina (Figura 3.15), y la distribución de presiones que resulte eliminando la presión atmosférica es la presión que realmente ejerce el agua sobre el muro y la única que efectivamente puede provocar un volteo o deslizamiento de él.

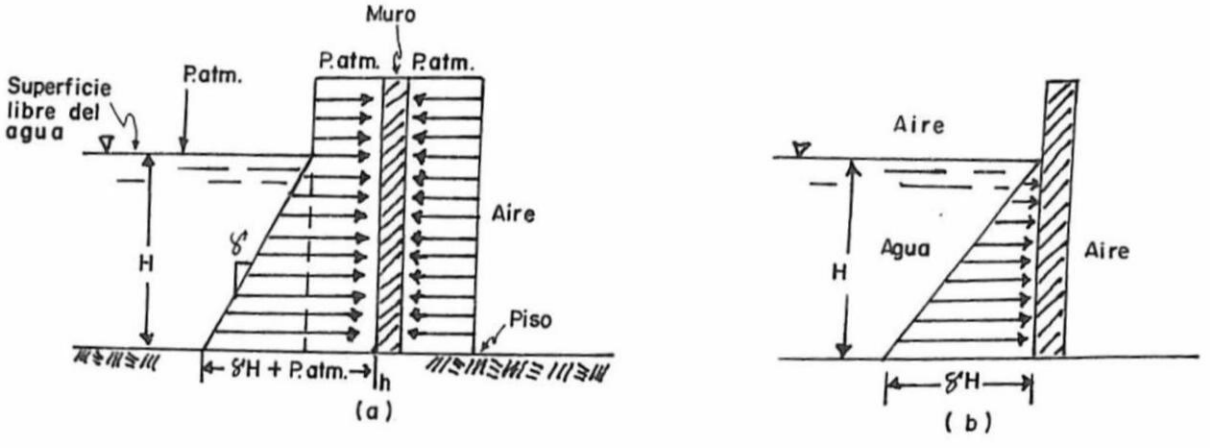


Fig. 3.15 Fuerzas de presión actuando sobre el muro. (a) Distribución de presiones tomando en cuenta la acción de la presión atmosférica sobre el muro. (b) Distribución de la presión resultante actuando sobre el muro.

La fuerza resultante (Figura 3.15) que actúa sobre un área plana sumergida, sería un sustituto de toda la distribución de fuerzas que origina la distribución de presiones y para poder obtenerla, es necesario conocer:

a) Magnitud de la fuerza resultante (F_R)

b) Dirección y sentido

c) Localización

La magnitud de la fuerza resultante F_R se obtiene cuando se - calcula el volumen que forma la distribución de presiones sobre to da el área sumergida.

La dirección y el sentido de la fuerza resultante se determina con una de las propiedades de los líquidos que nos expresa que la fuerza de presión de un líquido estará siempre actuando normal al área de acción y empujando a la superficie mojada, por lo que - sólo basta poner el ángulo del vector con respecto a una horizon - tal para determinar la dirección y con la punta triangular del vector se orienta el sentido gráficamente. Todo lo anterior parece - muy lógico, pero con respecto a la dirección, no se determina visualmente en áreas curvas sumergidas y lo mismo sucede con el sentido cuando existe un muro con dos líquidos diferentes en ambos lados.

La fuerza resultante se localizará en el centro del volumen que forma la distribución de presiones sobre toda el área sumergida, y si el volumen es un prisma poligonal, el centro del volumen se localiza en el centro del área del polígono.

Para poder localizar el centroide de cualquier área, habrá - que deducir la ecuación que lo determine y, para ello, habrá que considerar una lámina plana horizontal de espesor constante. (Figura 3.16).

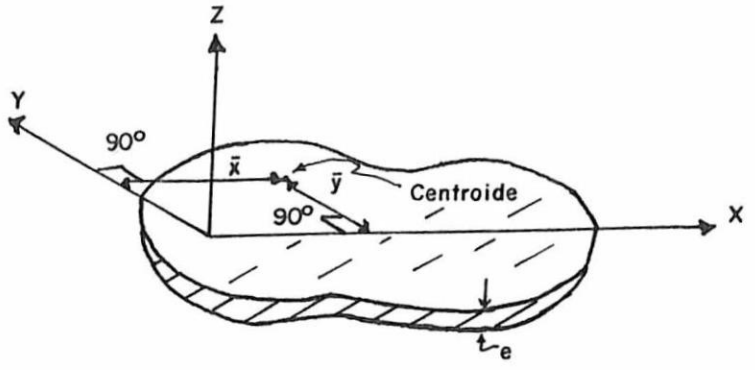


Fig. 3.16 Centroide de una lámina plana de espesor constante

Donde:

$\bar{x}$ = distancia paralela al eje y desde el centroide de la lámina hasta el eje x.

$\bar{y}$ = distancia paralela al eje x desde el centroide de la lámina hasta el eje y.

e = espesor constante de la lámina.

A = área de la lámina.

W = peso total de la lámina.

Podemos dividir la lámina en n pequeños elementos, todos ellos numerados para identificarlos y para poder localizarlos. Las coordenadas del primer elemento se designarán como x_1, y_1, las del segundo elemento como x_2, y_2 y así sucesivamente hasta llegar al n elemento que tendrá como coordenadas x_n, y_n (Figura 3. 17)

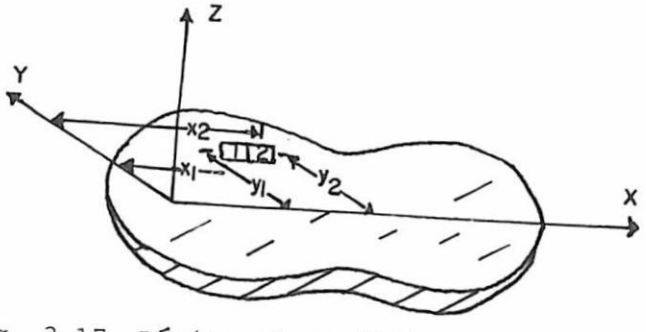


Fig. 3.17 Lámina plana dividida en n elementos

La fuerza ejercida por la tierra sobre cada uno de los ele - mentos con que se dividió la lámina, se designarán respectivamente como: $\Delta W_1, \Delta W_2, \Delta W_3, \ldots, \Delta W_i, \ldots, \Delta W_n$

Se hace suma de fuerzas en el eje z para obtener:

$$\sum_{i=1}^{n} Fz_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots + \Delta W_i + \ldots + \Delta W_n = W \qquad 3.56$$

Ahora, realicemos una suma de momentos con respecto al eje x para obtener:

$$\sum_{i=1}^{n} (Mx)_i = y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + \ldots + y_i\Delta W_i + \ldots + y_n\Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta W_i \qquad 3.57$$

Se hace una suma de momentos con respecto al eje y para obtener:

$$\sum_{i=1}^{n} (My)_i = x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + \ldots + x_i\Delta W_i + \ldots + x_n\Delta W_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta W_i \qquad 3.58$$

El momento que provoca W con respecto a los ejes x y y es - igual a la suma de los correspondientes momentos de los pesos de cada elemento que provocan con respecto a los ejes x y y (Ecuación 3.59 y 3.60).

$$\sum_{i=1}^{n} (Mx)_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta W_i = \bar{y}\, W \qquad 3.59$$

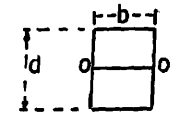
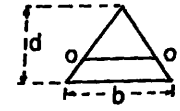
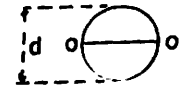
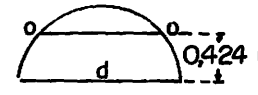
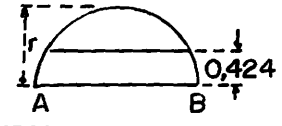
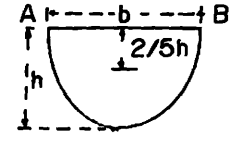
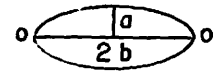
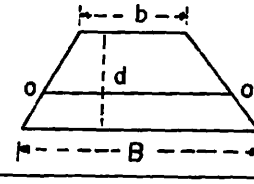
$$\sum_{i=1}^{n} (My)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\Delta W_i = \bar{x}\, W \qquad 3.60$$

Si el peso específico de la lámina es γ y el área de cada - elemento es ΔA, se tiene que:

$$W = \gamma\ e_A \qquad 3.61$$

$$\Delta W = \gamma\ e\Delta_A \qquad 3.62$$

TABLA 3.2 MOMENTO DE INERCIA DE AREAS CON RESPECTO A SU CENTROIDE.

Figura e		I_o	A
Rectángulo		$\frac{1}{12} bd^3$	bd
Triángulo		$\frac{1}{36} bd^3$	$\frac{1}{2} bd$
Círculo		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^2}{4}$
Semicírculo		0.00686 d^4	$\frac{\pi d^2}{8}$
Semicírculo		$\frac{\pi r^4}{8}$	$\frac{\pi d^2}{8}$
Parábola		$\frac{b}{2} h^3$	$\frac{2}{3} bh$
Elipse		$\frac{\pi a^3 b}{4}$	πab
Trapecio		$\frac{d^3}{36} \frac{B^2+4Bb+b^2}{B+b}$	$\frac{B+b}{2}$

* Relativos a los ejes O-O o A-B indicados

Se sustituyen las ecuaciones 3.61 y 3.62 en 3.59 y 3.60

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(\gamma \; e\Delta A)_i = \bar{y}\,\gamma \; eA \qquad 3.63$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\gamma \; e\Delta A)_i = \bar{x}\,\gamma \; eA \qquad 3.64$$

Se separan fuera de la sumatoria todas las constantes

$$\gamma\,\rho \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta A_i = \bar{y}\,\gamma \; e\,A \qquad 3.65$$

$$\gamma\,\rho \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta A_i = \bar{x}\gamma \; eA \qquad 3.66$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\,\Delta A_i = \bar{y}\,A \qquad 3.67$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta A_i = \bar{x}\,A \qquad 3.68$$

Si aumentamos el número de elementos disminuyéndolos de tamaño, de manera que n tienda a infinito, se tiene que:

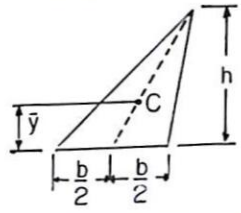
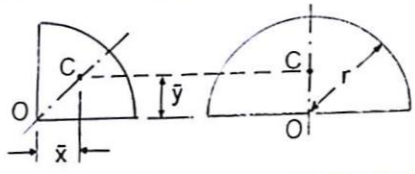
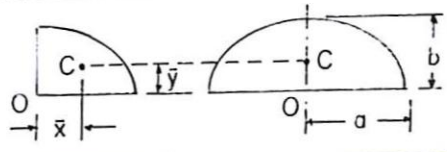
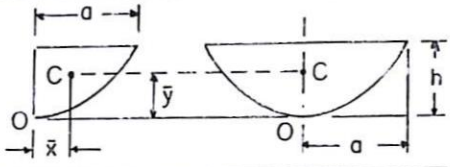
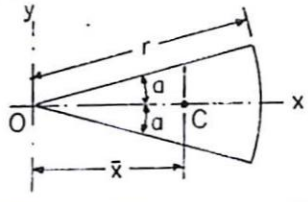
$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i\,\Delta A_i = \int_0^A y\,dA \qquad 3.69$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i\,\Delta A_i = \int_0^A x\,dA \qquad 3.70$$

$$\bar{y}\,A = \int_0^A y\,dA \qquad 3.71$$

$$\bar{x}\,A = \int_0^A x\,dA \qquad 3.72$$

TABLA 3.1 CENTROIDES DE AREAS.

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Area triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Cuadrante de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Area semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Cuadrante de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Area semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Area semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Area parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} a}{3a}$	0	ar^2

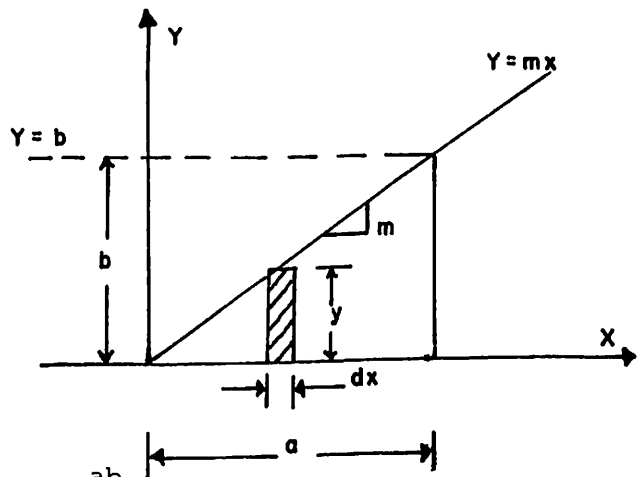
La ecuación 3.71 se conoce como el momento de primer orden - del área A con respecto al eje x ; de la misma manera, la ecuación 3.72 se conoce como el momento de primer orden del área A con respecto al eje y. Se despeja $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de las ecuaciones 3.71 y 3.72

$$\bar{y} = \frac{\int_0^A y\,dA}{A} \qquad 3.73$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^A x\,dA}{A} \qquad 3.74$$

Las ecuaciones 3.73 y 3.74 determinan las coordenadas medidas desde un punto de vista referencial (coordenadas cartesianas) que localizan el centroide de un área plana.

Ejemplo 3.8 Encuentre el centroide de un triángulo



Solución

$$A = \frac{ab}{2} \qquad y = mx$$

$$dA = y\,dx \qquad m = \frac{b}{a}$$

$$\int_0^A x\,dA = \int_0^a xy\,dx = m\int_0^a x^2 dx = m\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{ma^3}{3} = \frac{ba^3}{3a} = \frac{ba^2}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^A x\,dA}{A} = \frac{ba^2/3}{ab/2} = \frac{2}{3}a$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}a$$

$$dA = (a - x)dy$$

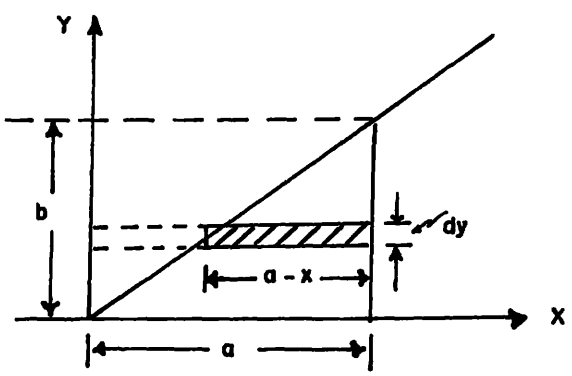
$$\int_0^b ydA = \int_0^b y(a-y)dy = \int_0^b y(a - \frac{y}{m}) = a\int_0^b ydy - \frac{1}{m}\int_0^b y^2dy$$

$$\int_0^A ydA = \frac{ay^2}{2}\Big|_0^b - \frac{y}{3m}\Big|_0^b = \frac{ab^2}{2} = \frac{b^3}{3m} = \frac{ab^2}{2} = \frac{ab^3}{3b}$$

$$\int_0^A ydA = \frac{ab^2}{2} = \frac{ab^2}{3} = \frac{ab^2}{6}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^A ydA}{A} = \frac{ab^2/6}{ab/2} = \frac{b}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}b$$



MURO VERTICAL CON AGUA POR UN SOLO LADO

Si se tiene un muro vertical de ancho w con agua por un solo lado que tiene una profundidad H (Figura 3.18), el volumen de distribución de presiones es un prisma triangular de anchura w por lo que la magnitud de la Fuerza Resultante se calculará multiplicando el área del triángulo por la anchura.

$$F_R = \frac{\gamma H^2 w}{2} \qquad 3.75$$

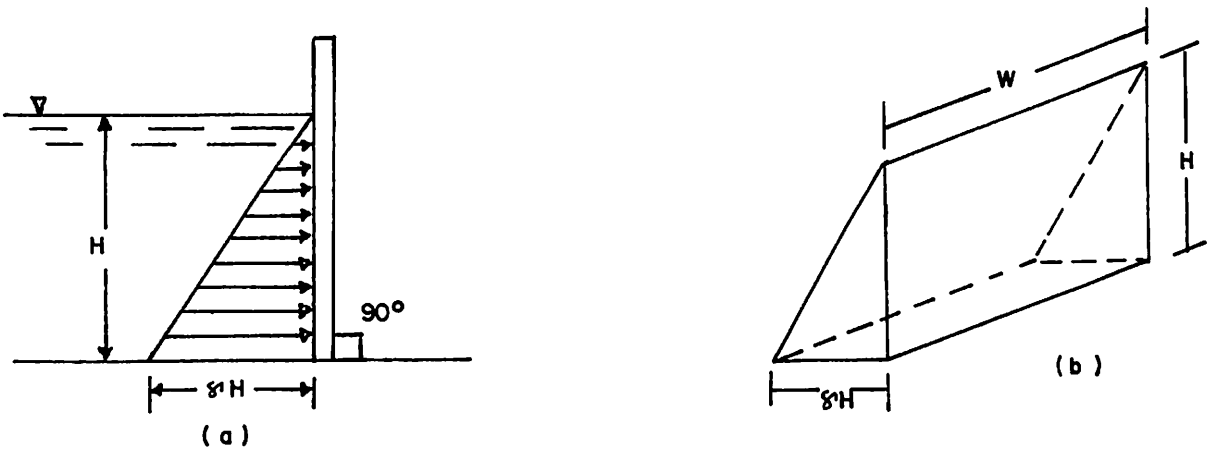


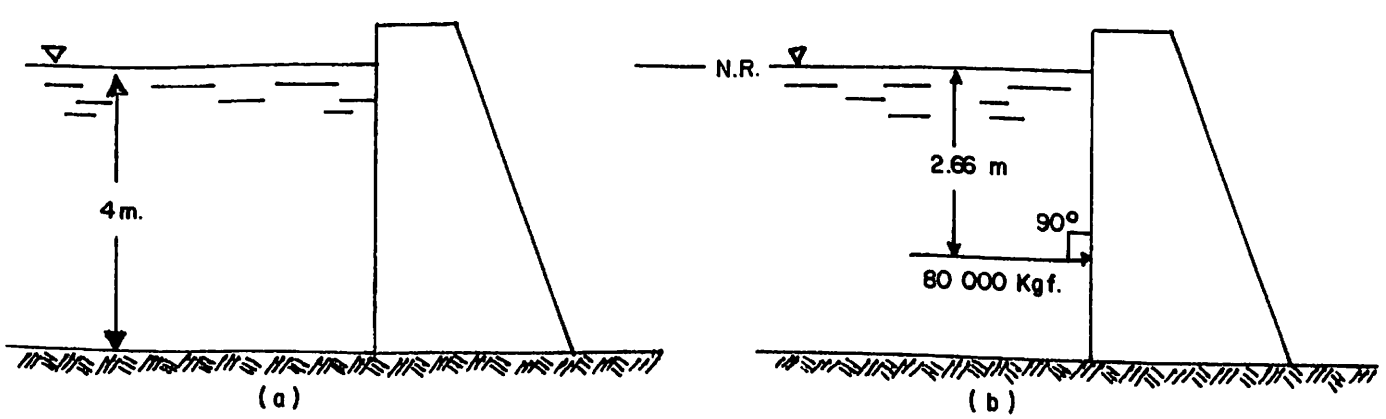
Fig. 3.18 Muro plano vertical con agua por un solo lado a) Distribución de presiones en el muro. b) Volumen de distribución de presiones.

La dirección será 0° con respecto a la horizontal o perpendicular al muro. El sentido será, para este caso, de izquierda a derecha.

La localización de la Fuerza Resultante se le llama también centro de presiones (hp), y se localiza en el centroide del triángulo, pero hay que tomar un eje referencial o nivel de referencia que puede estar en cualquier lugar pero para mejor comodidad, se establecerá en la superficie del agua.

$$hp = \frac{2}{3} H \qquad 3.76$$

Ejemplo 3.9 Encuentre la Fuerza Resultante y el centro de presiones del muro que se ve en la figura, si tiene un ancho de 10 m.



Solución

$$F_R = \frac{\gamma H^2 w}{2}$$

$$F_R = \frac{(1\,000\ Kgf/m^2)\,(4m)^2}{2}$$

$$F_R = 80\,000\ Kgf$$

La dirección y el sentido se especifica gráficamente en la figura (b).

$$hp = \frac{2}{3} H$$

$$hp = \frac{2}{3} (4m)$$

$$hp = 2.66\ m$$

MURO INCLINADO CON AGUA POR UN SOLO LADO

Si se tiene un muro con una inclinación θ del área sumergida, con ancho w y agua por un solo lado, que tiene una profundidad H (Figura 3.19), el volumen de distribución de presiones será como el ejemplo anterior, un prisma triangular, por lo que la magnitud de la Fuerza Resultante será la siguiente:

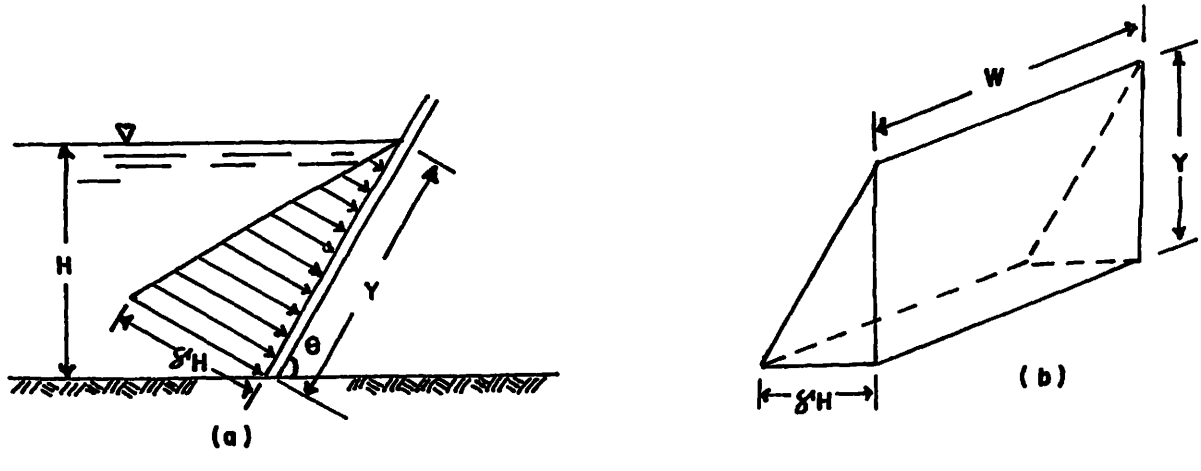


Fig. 3.19 Muro inclinado con agua por un solo lado. a) Distribución de presiones. b) Volumen de distribución de presiones.

$$F_R = \frac{\gamma H Y w}{2} \qquad 3.77$$

$$y = \frac{H}{\text{sen } \theta} \qquad 3.78$$

Se sustituye 3.78 en 3.77

$$F_R = \frac{H^2 w}{2 \text{ sen } \theta} \qquad 3.79$$

La dirección será 90° - θ con respecto a la horizontal o - normal al muro, y el sentido se puede expresar gráficamente o simplemente diciendo que la fuerza empuja la superficie izquierda - del muro estando de frente al plano.

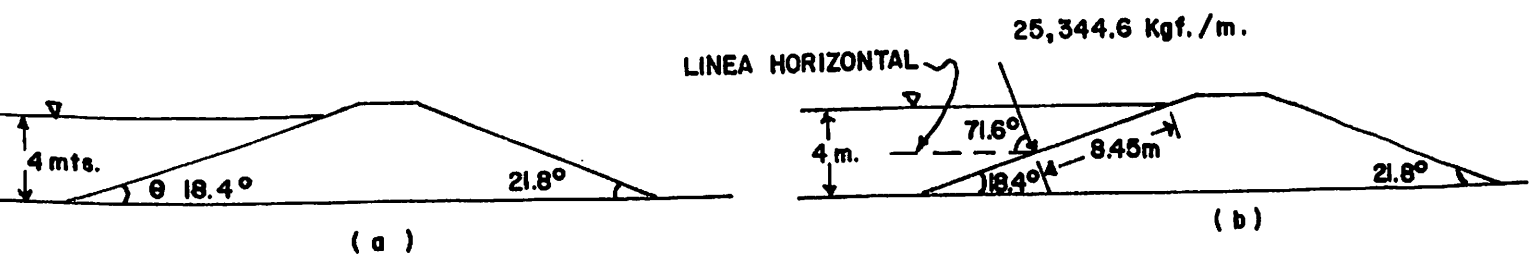
El centro de presiones se localiza siguiendo la dirección - de la superficie mojada del muro por lo que para muros inclinados se identificará como yp y se empezará a medir desde la superficie del líquido para mejor comodidad.

$$yp = \frac{2}{3} y \qquad 3.80$$

Si sustituímos 3.78 en 3.80, resulta:

$$yp = \frac{2H}{3 \text{ sen } \theta} \qquad 3.81$$

Ejemplo 3.10 Encuentre la Fuerza Resultante por metro de anchura y su localización, del muro de contención cuya superficie mojada tiene un ángulo de 18.4° tal como se aprecia en la figura



Solución. $$F_R = \frac{\gamma H^2 w}{2 \text{ sen}}$$

$$F_R = \frac{(1\,000\ Kgf/m^3)((4m)^2(1m)}{2 \text{ sen } 18.4°}$$

$$F_R = 25\,344.6\ Kgf$$

La dirección y el sentido se especifica gráficamente en la figura (b)

$$yp = \frac{2H}{3 \text{ sen } \theta}$$

$$yp = \frac{2\ (4m)}{3 \text{ sen } 18.4°}$$

$$yp = 8.45\ m$$

MURO VERTICAL CON AGUA POR LOS DOS LADOS

Si se tiene un muro vertical de ancho w con agua por ambos lados cuyas profundidades son H_1 y H_2 respectivamente (Figura 3.20), el volumen de distribución de presiones resultante es un prisma trapecial de altura w (Figura 3.21) por lo que la magnitud de la Fuerza Resultante se calculará multiplicando el área del trapecio por el ancho w.

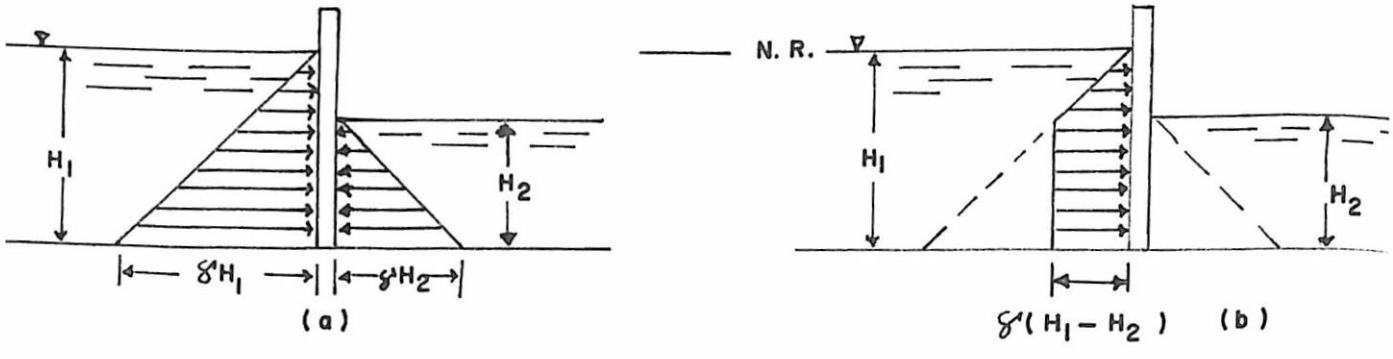


Fig. 3.20 Muro vertical con agua por los dos lados.
a) Distribución de presiones en ambos lados
b) Resultante de la distribución de presiones.

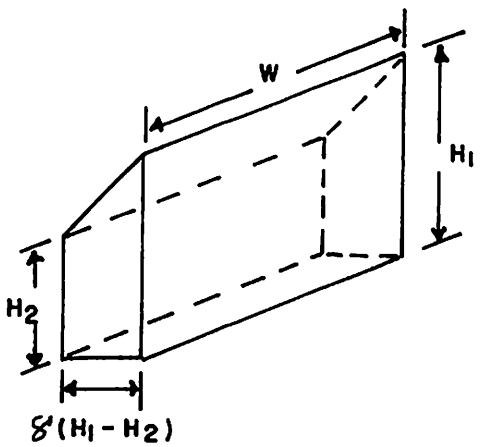


Fig. 3.21 Volumen resultante de la distribución de presiones

$$F_R = \frac{\gamma(H_1^2 - H_1^2)w}{2} \qquad 3.81$$

Para este caso, la dirección es 0° con respecto a la hori - zontal, y el sentido será un empuje del muro de izquierda a derecha.

El centro de presiones puede tener como nivel de referencia la superficie libre del agua más alta, y la fuerza estará localizada en el centro del trapecio. Si el centro del trapecio no se encuentra en la tabla 3.1, podemos encontrarlo utilizando la ecuación 3.67 con respecto a un eje vertical, dividiendo la figura en dos áreas simples: un triángulo y un rectángulo (Figura 3.22), e iden-

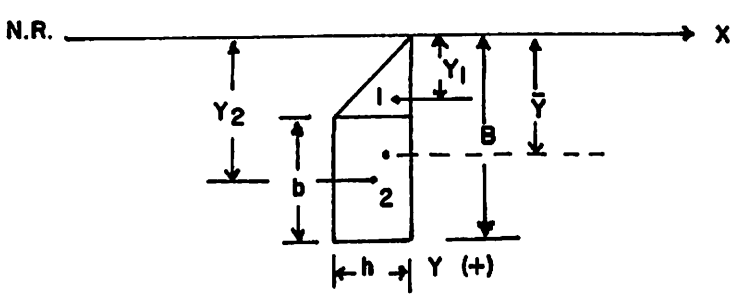


Fig. 3.22 Trapecio dividido en un triángulo y un rectángulo

tificando el triángulo como la figura uno y el rectángulo como la

figura dos, por lo tanto, y_1 es la distancia con respecto al eje y desde el nivel de referencia hasta el centroide de la figura uno, y y_2 es la distancia de nivel de referencia hasta el centroide de la figura dos.

$$\bar{y} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A} \qquad 3.82$$

$$y_1 = \frac{2}{3} (B - b) \qquad 3.83$$

$$y_2 = B - \frac{1}{2} b \qquad 3.84$$

$$A_1 = \frac{(B - b)h}{2} \qquad 3.85$$

$$A_2 = bh \qquad 3.86$$

$$A = \frac{(B + b)h}{2} \qquad 3.87$$

Al sustituír las ecuaciones 3.83 - 3.87 en 3.82, se tiene:

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3} (B - b) \quad \frac{(B - b)h}{2} + (B - \frac{1}{2} b)(bh)}{\frac{(B + b)h}{2}} \qquad 3.88$$

Simplificando la ecuación 3.88

$$\bar{y} = \frac{2B^2 + 2Bb - b^2}{3(B + b)} \qquad 3.89$$

Sustituyendo los datos de la Figura 3.21 en la ecuación 3.21 para obtener el centro de presiones de un área sumergida inclinada

$$yp = \frac{2H_1^2 + 2H_1H_2 - H_2^2}{3(H_1 + H_2)}$$

Ejemplo 3.11 Determinar la Fuerza Resultante y el centro de presiones de - la Figura 3.20 si $H_1 = 4m$, $H_2 = 2m$ y el ancho es de 5 m.

$$F_R = \frac{\gamma (H_1^2 - H_2^2) w}{2}$$

$$F_R = \frac{(1\,000\ Kg_f/m^3)(16m^2 - 4m^2)5m}{2}$$

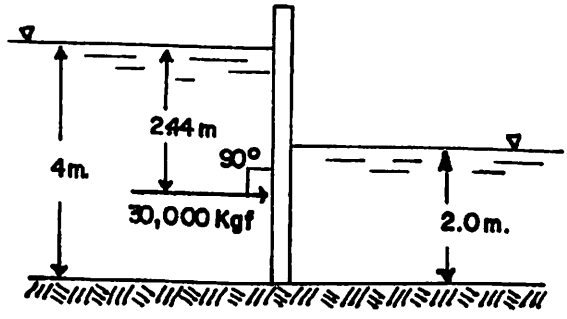
$$F_R = 30\,000\ Kg_f$$

La dirección y el sentido se detallarán gráficamente en la Figura

$$yp = \frac{2H_1^2 + 2H_1H_2 - H_2^2}{3(H + H)}$$

$$yp = \frac{2(4m)^2 + 2(4m)(2m) - (2m)^2}{3(4m + 2m)}$$

$$yp = 2.44\ m$$



COMPUERTAS PLANAS SUMERGIDAS

Si se tiene una compuerta sumergida a cierta profundidad c con respecto a su lado superior, y se quiere obtener la Fuerza Resultante de la presión hidrostática que actúa solamente sobre la compuerta, se observa que el volumen de distribución de presiones es un prisma trapezoidal, como se observa en la Figura 3.23. Por lo tanto, la magnitud será:

$$F_R = \frac{\gamma (b + 2c) Bb}{2} \qquad 3.91$$

La dirección y el sentido se especificarán como se ha hecho anteriormente.

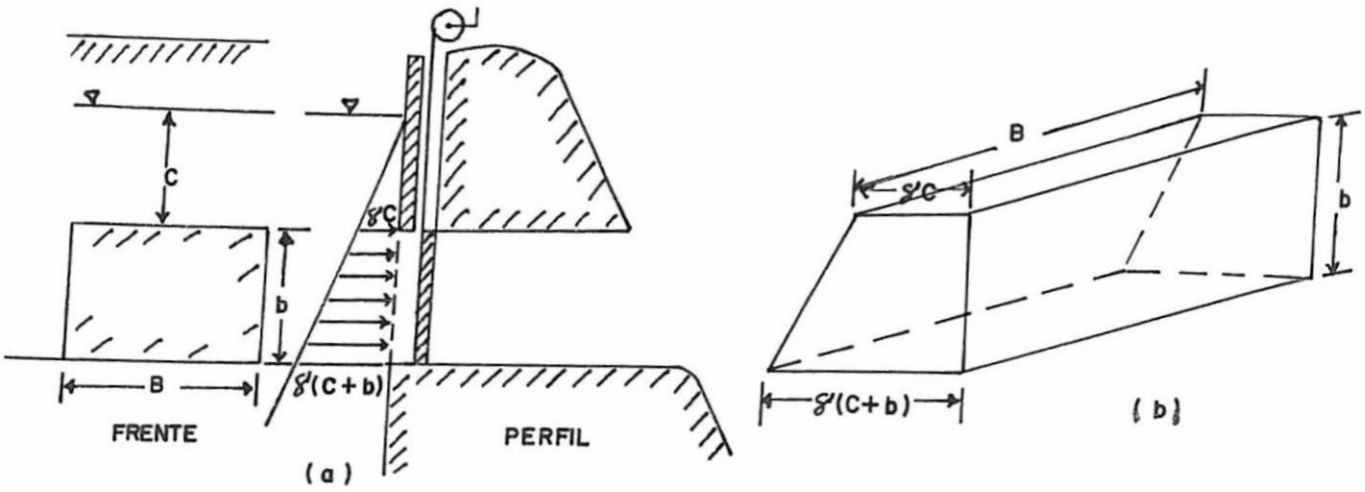


Fig. 323. Compuerta plana sumergida. (a) Distribución de presión. (b) Volumen de distribución de presiones.

El centro de presiones se medirá a partir de la superficie del agua; como en este caso no está especificado en la Tabla 3.1, se procederá a formularla como en el caso anterior, utilizando la ecuación 3.67 quedando de la siguiente forma:

$$hp = C + \frac{b(3C + 2b)}{6C + 3b} \qquad 3.92$$

Ejemplo 3.12 Determinar la Fuerza Resultante debido al empuje hidrostático y el centro de presiones de la compuerta rectangular de la Figura 3.23, si C = 4m, B = 3m y h = 1m.

$$F_R = \frac{\gamma\,(b + 2C)\,Bb}{2}$$

$$F_R = \frac{1\,000\ Kg_f/m^3\,(1m + 8M)\,(1m)\,(3m)}{2}$$

$$F_R = 13\,500\ Kg_f$$

La dirección es normal a la compuerta, y el sentido es de izquierda a derecha viendo el plano de la Figura 3.23.

$$hp = C + \frac{b(3C + 2b)}{6C + 3b}$$

$$hp = 4m + \frac{(1m)\,(12m + 2m)}{6(4m) + 3(2m)}$$

$$hp = 4.52\ m$$

OTRO METODO PARA CALCULAR LA FUERZA RESULTANTE Y EL CENTRO DE PRESION EN SUPERFICIES PLANAS

Cuando la superficie plana sumergida no es de forma rectangular, el método anterior se complica a la hora de encontrar el volumen y su centro, porque el volumen que forma la distribución de presiones ya no es un prisma, y este otro método facilita el cálculo.

Si se tiene una área plana sumergida M - N de cualquier forma, que tiene una inclinación θ con respecto a una horizontal (Figura 3.24) y analizamos un incremento dA del área A de manera que toda la superficie del dA esté situada a la misma profundidad

como se ve en la Figura 3.24

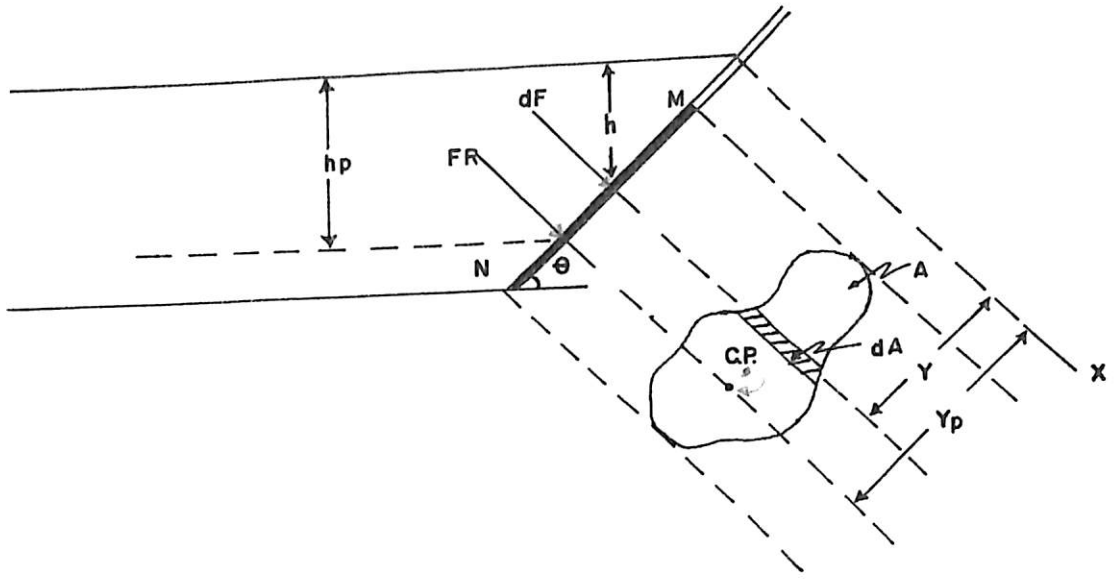


Fig. 3.24 Superficie plana sumergida M - N

$$Ph = \gamma\, h \qquad 3.93$$

$$Ph = \frac{dFh}{dA} \qquad 3.94$$

Si despejamos dFh de la ecuación 3.94

$$dFh = PhdA \qquad 3.95$$

$$h = y \operatorname{sen} \theta \qquad 3.96$$

Al sustituír la ecuación 3.93 en 3.95, se obtiene:

$$Ph = \gamma\, h\, dA \qquad 3.97$$

Ahora, sustituímos la ecuación 3.96 en 3.97

$$dF = \gamma\, y\, \operatorname{sen}\theta\, dA \qquad 3.98$$

Integrando la ecuación 3.98 con límites

$$\int_0^F dF = \gamma \operatorname{sen}\theta \int_0^A y dA \qquad 3.99$$

Sustituyamos ahora la ecuación 3.71 en 3.99

$$F_R = \gamma\ (\bar{y}\ \text{sen}\theta)A \qquad 3.100$$

La ecuación 3.100 determina la magnitud de la Fuerza Resultante en una superficie plana sumergida en un líquido.

De la ecuación 3.96 y observando la Figura 3.24, se puede deducir que:

$$\bar{h} = \bar{y}\ \text{sen}\ \theta \qquad 3.101$$

Al sustituír la ecuación 3.101 en 3.100, se obtiene:

$$F_R = \gamma\ \bar{h}A \qquad 3.102$$

La ecuación 3.102 es otra forma de la ecuación 3.100

Si se tiene una distribución de presiones cualquiera actuando sobre un área como la que se aprecia en la Figura 3.25, en la que se tiene una Fuerza Resultante localizada en el centro de presiones de un área cualquiera; se puede hacer la siguiente analogía con la ecuación 3.67 o 3.68.

$$F_R\ yp = \sum_{i=1}^{n} |F|_i\ y_i \qquad 3.103$$

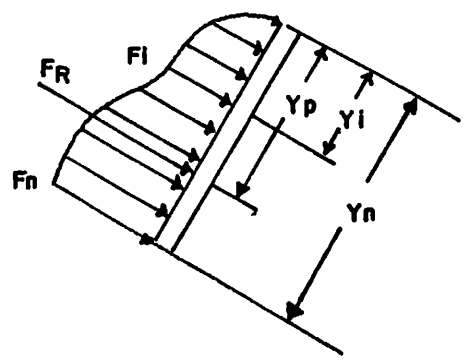


Fig. 3.25 Perfil de distribución de presiones

Donde n es el número de fuerzas que intervienen en el perfil siempre y cuando sean homogéneas en la misma profundidad en toda su anchura, y esto siempre ocurre con la presión hidrostática. Ahora si disminuímos las magnitudes de las fuerzas aumentando un número infinito de ellas, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i y_i = \int_0^F y \, dF \qquad 3.104$$

$$F_R \, yp = \int_0^F y \, dF \qquad 3.105$$

$$yp = \frac{\int_0^F y dF}{F_R} \qquad 3.106$$

$$yp = \frac{\int_0^F y^2 dA}{\bar{y}A} \qquad 3.107$$

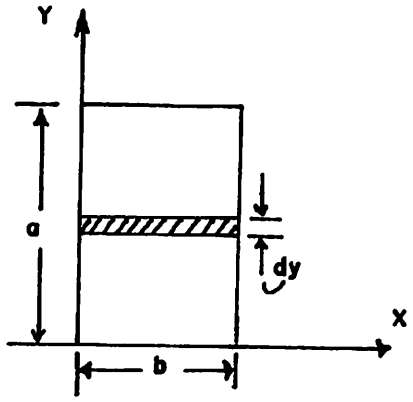
Donde el numerador de la ecuación 3.107 se conoce como el momento de segundo orden o momento de inercia del área A (de la Figura 3.24) con respecto al eje x

$$I = \int_0^A y^2 dA \qquad 3.108$$

Se sustituye la ecuación 3.108 en 3.107

$$yp = \frac{I}{\bar{y}A} \qquad 3.109$$

Ejemplo 3.13 Encontrar el momento de inercia (I) de un lado de un rectángulo con respecto al eje x.



$$Ix = \int^{A} y^2 dA$$

$$dA = b\, dy$$

$$Ix = b \int_0^A y^2\, dy = b \left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a \frac{ba}{3}$$

$$Ix = \frac{ba^3}{3}$$

Si se tiene un área A y se va a efectuar un momento de A con respecto al eje x (Figura 3.26); y va a ser la distancia del dA - con respecto al eje x, el momento de inercia será:

$$Ix = \int_0^A y^2 dA \qquad 3.110$$

Si en el área A tomamos en cuenta un eje x' que pasa por el centroide del área, donde la distancia que existe del eje x' al dA es y' y la que existe entre los dos ejes es $\bar{y}$.

$$y = y' + \bar{y} \qquad 3.111$$

Sustituyendo la ecuación 3.111 en 3.110

$$Ix = \int_0^A (y' + y)^2\, dA \qquad 3.112$$

$$Ix = \int_0^A (y')^2\, dA + 2\bar{y} \int_0^A y'\, dA + (\bar{y})^2 \int_0^A dA \qquad 3.113$$

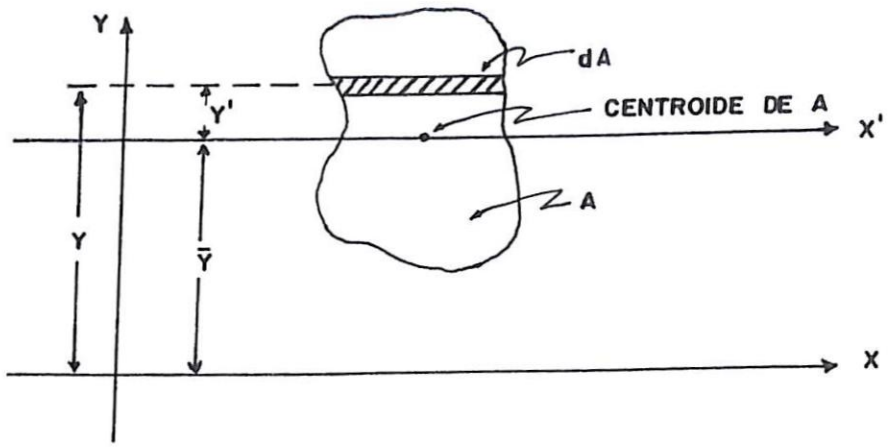


Fig. 3.26 Superficie plana A con su respectivo diferencial del área dA.

La integral central de la ecuación 3.113 es cero porque se encarga de encontrar la distancia desde el eje x' a donde se encuentra el centroide de A por lo que la ecuación 3.113 se reduce a:

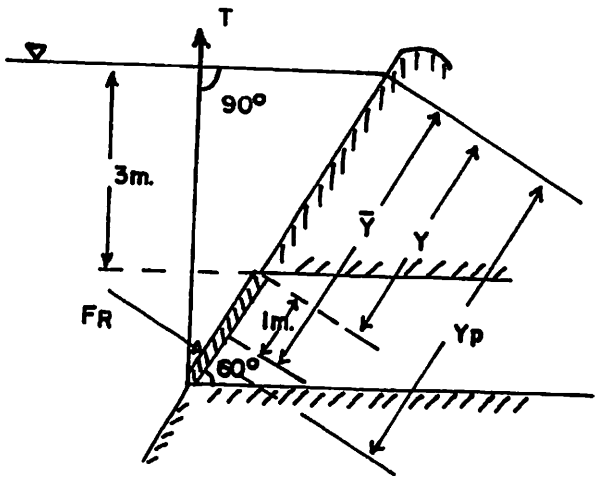
$$Ix = \int_0^A (y')^2 dA + (\bar{y})^2 \int_0^A dA \qquad 3.114$$

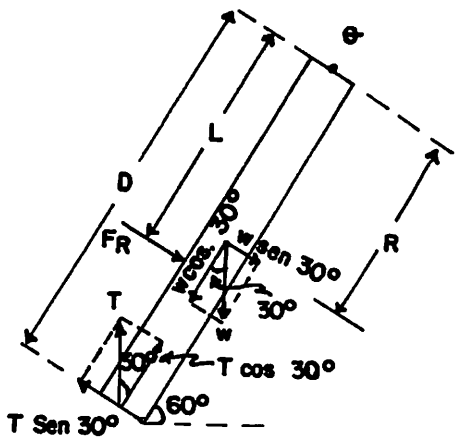
La primera integral de la ecuación 3.114 es el momento de inercia de A con respecto a un eje que pasa por su centroide (I_0) La segunda integral es igual a A, e Ix es el momento de inercia de cualquier eje que no pase por el centroide (I)

$$I = I_0 + (\bar{y})^2 A \qquad 3.115$$

Para obtener el centro de presiones de cualquier superficie sumergida, sólo basta conocer la distancia del nivel de referencia (podría ser la superficie del agua) al centroide de la superficie ($\bar{y}$) y el momento de inercia de la superficie con respecto al centroide (I_0)

Ejemplo 3.14 Encontrar la tensión mínima del cable que levanta una compuerta circular de 1 m de radio y peso w = 2 000 Kgf





Solución

$|F_R| = \gamma \bar{y} \operatorname{sen}\theta A$

$\bar{y} = 4.46$ m

y sen 60° = 3.866 m

$A = 3.14\ m^2$

L = yp - Y

y = 3.46 m

L = 1.056 m

$|F_R| = (1\,000\ Kg_f/m^3)(3.866\ m)(3.14\ m^2)$

$|F_R| = 12\,145.4\ Kg_f$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (2m)^4}{64} = 0.7854\ m^4$$

$$yp = \bar{y} + \frac{I_0}{\bar{y}A}$$

$$yp = 4.46\ m + \frac{0.7854\ m^4}{(4.46\ m)(3.14\ m^2)}$$

yp = 4.52 m

Haciendo suma de momentos en o poniendo arbitrariamente que - el giro en contra del giro de las manecillas de un reloj, el momento es positivo, y contrario a esto negativo.

$\Sigma M_O = 0$

$(F_R)(L) = (w \operatorname{sen} 30°)(R) - (T \operatorname{sen} 30°)(D) = 0$

$$T = \frac{(F_R)(L) + (w \operatorname{sen} 30°)(R)}{(D)(\operatorname{sen} 30°)}$$

$$T = \frac{(12\,145.4\ Kg_f)(1.056\ m) + (2\,000\ Kg_f)(0.5)(1\ m)}{(2m)(0.5)}$$

$$T_{min} = 13\,825.5\ Kg_f$$

FUERZA DE LA PRESION HIDROSTATICA SOBRE SUPERFICIES CURVAS

En la práctica, además de determinar la fuerza resultante de la presión hidrostática sobre superficies planas, también nos vemos obligados frecuentemente a hacerlo sobre superficies curvas, sobre todo superficies cilíndricas.

La Fuerza Resultante sobre superficies curvas no se resuelve exactamente como los métodos anteriores, sino que se obtienen los componentes vertical y horizontal y después se suman vectorialmente para obtener una resultante. Para ello, existen tres casos que se pueden presentar y cada caso tiene una situación particular que los hace diferentes.

Primer Caso

Se tiene una superficie curva AB como se muestra en la Figura 3.27 con un ancho w perpendicular al plano de la figura, y la proyección vertical del frente de la superficie curva, es el plano CB donde la única fuerza que actúa sobre este plano es la Fuerza Resultante de la presión hidrostática (Fh); y la única fuerza vertical que actúa en la proyección horizontal es el peso del volumen de líquido que se apoya en la superficie curva (Fv).

Para calcular la magnitud y el centro de presiones de la fuerza horizontal, se recurre a cualquiera de los dos métodos para superficies planas. No se muestra la ecuación para obtener la

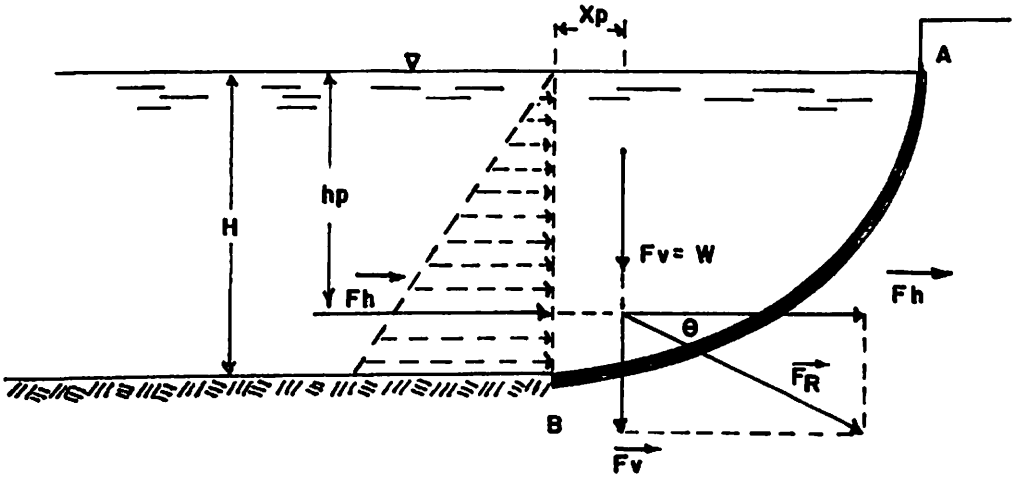


Fig. 3.27 Superficie curva sumergida AB ejemplificando el primer caso.

magnitud y el centro de presiones de la fuerza horizontal porque no siempre ocurre el perfil de distribución de presiones que se encuentra en la figura 3.27 actuando sobre el plano CB. En cuanto al sentido de la fuerza horizontal, se pondrá en forma arbitraria; si el empuje va de izquierda a derecha, viendo el plano dibujado, entonces será positiva la fuerza ($\overset{+}{\rightarrow}$), y si es contrario, será negativa (no existe fuerza alguna que su magnitud sea negativa, el signo sólo nos marca el sentido del vector).

Para calcular la magnitud de la fuerza vertical, sólo basta multiplicar el peso específico del líquido por el volumen que se apoya sobre la superficie sumergida (v)

$$Fv = \gamma V \qquad 3.117$$

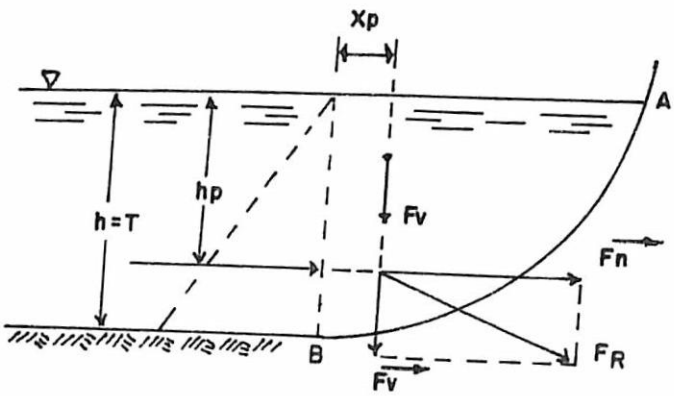
$$V = (\text{área ABC})w \qquad 3.118$$

Sustituyendo la ecuación 3.118 en 3.117

$$Fv = \gamma\ (\text{área ABC})w \qquad 3.119$$

El sentido de la fuerza vertical será positivo si empuja hacia abajo (para el primer caso siempre empujará hacia abajo). La fuerza vertical será localizada en el centroide del área ABC.

Ejemplo 3.15 (Primer caso) Determinar la Fuerza Resultante y su localización en una superficie cilíndrica AB de 10 m de *anchu* cuyo perímetro mojado es la cuarta parte de un círculo, con un radio de 1 m.



Solución Usando el primer método:

$$Fh = \frac{\gamma h^2 w}{2} = \frac{\gamma r^2 w}{2} = \frac{(1\,000\ Kg_f/m^3)(1m)^2(10m)}{2}$$

$$Fh = 5\,000\ Kg_f$$

$$hp = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} r = \frac{2}{3} (1\ m)$$

$$hp = 0.66\ m$$

área ABC (un cuarto de círculo) $= \frac{\pi r^2}{4}$

$$F_V = \gamma\ (\text{área ABC})\, w = (1\,000\ Kg_f/m^3)\left(\frac{\gamma (1m)^2}{4}\right) 10\ m$$

$$Fv = 7\,854\ Kg_f$$

Se busca en la Tabla 3.1 el centroide del área que es un cuarto de círculo.

$$X_p = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(1m)}{3\pi}$$

$$X_p = 0.424 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras para obtener la magnitud de la Fuerza Resultante:

$$F_R = \sqrt{(Fh)^2 + (Fv)^2} = \sqrt{(5\,000\ Kgf)^2 + (7\,854\ Kgf)^2}$$

$$F_R = 9\,310\ Kgf$$

La dirección de la Fuerza Resultante se calculará con el ángulo, con respecto a un eje horizontal (indicando si el ángulo - se mide del eje horizontal hacia arriba o hacia abajo).

$$\theta = \text{arc tan} \frac{|Fv|}{|Fh|} = \text{arc tan} \frac{7\,854}{5\,000}$$

$$\theta = 57.5°$$

El sentido de la Fuerza Resultante se indica en la figura.

Segundo Caso

El segundo caso, en lugar de que la superficie curva sostenga un peso de líquido, recibe un empuje ascentente. (Figura 3.28)

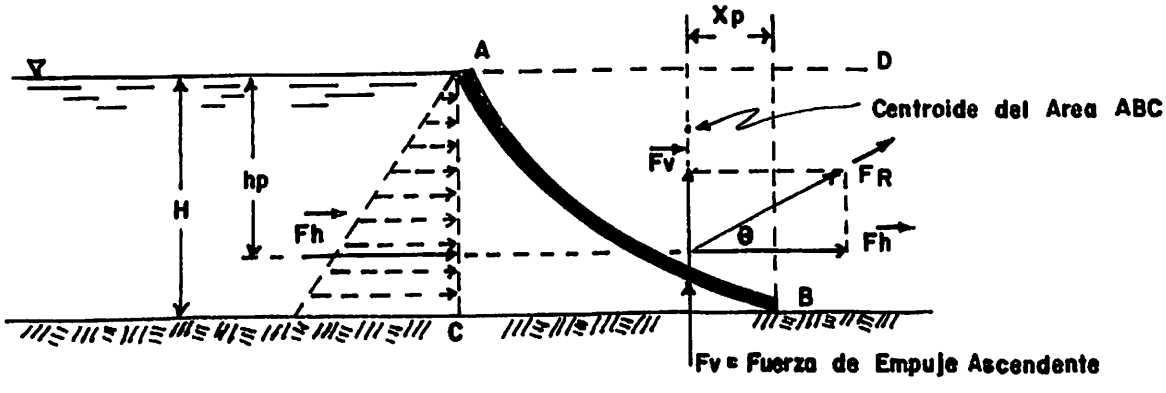


Fig. 3.28 Superficie curva sumergida ejemplificando el segundo caso

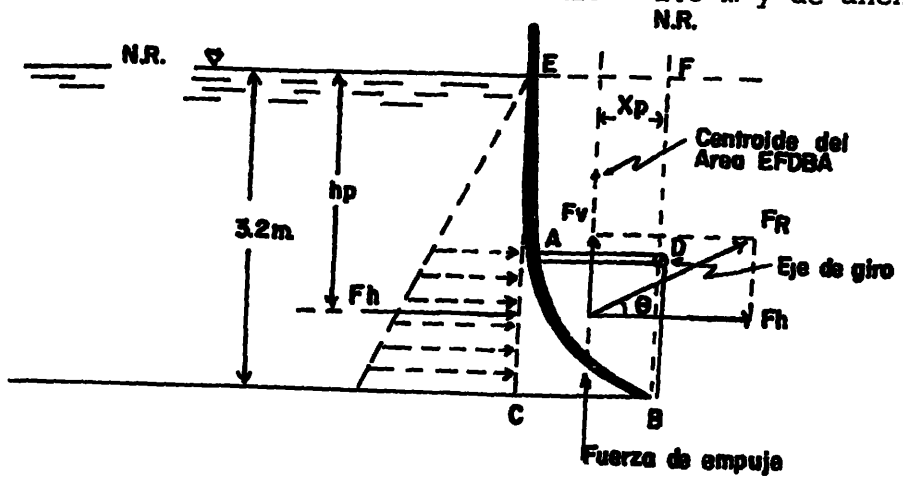
Para la determinación de la fuerza horizontal, se procede de la misma manera que el primer caso.

Con respecto a la fuerza vertical, para encontrar su magnitud habría que cuantificar el empuje ascendente que sufre la compuerta por el líquido, y para ello, tenemos que recurrir al principio de Arqúimides que, aplicándolo en nuestro caso, nos indica que "la fuerza vertical de empuje sobre la superficie curva AB es igual al peso del líquido despalzado". El volumen desplazado, es todo líquido imaginario que se apoya en la superficie curva de ancho w, desde el nivel de la superficie libre del líquido.

$$Fv = - \gamma \text{ (área ADB) } w \qquad 3.120$$

El signo negativo implica que el sentido de la fuerza vertical es hacia arriba y como equivale al peso de un líquido imaginario, también a la fuerza vertical se le nombra peso imaginario, por lo que todo peso imaginario es negativo porque su sentido es hacia arriba. La fuerza vertical de empuje, pasa por el centro del volumen imaginario y esto hay que tomarlo en cuenta para determinar el eje x_p.

Ejemplo 3.16 Calcular la Fuerza Resultante y su localización en la compuerta sumertida AB que se muestra en la figura, la cual es un cuadrante de círculo de radio = 1.5 m y de anchura unitaria.



Solución Utilizando el segundo método:

$$Fh = \gamma \bar{h} A$$

$$\bar{h} = 3.2\ m - \frac{1.5\ m}{2} = 2.45\ m$$

$$\bar{h} = 2.45\ m$$

$$A = (1.5\ m)(1\ m) = 1.5\ m^2$$

$$A = 1.5\ m^2$$

$$Fh = (1\,000\ Kg_f/m^3)(2.45\ m)(1.5\ m^2)$$

$$Fh = 3\,675\ Kg_f$$

$$hp = \bar{h} + \frac{I}{\bar{h}A}$$

Utilizando la Tabla 3.2 para obtener la fórmula del momento - de inercia de un rectángulo en su centro.

$$I_0 = \frac{bd^3}{12} = \frac{(1m)(1.5m)^3}{12} = 0.28125\ m^4$$

$$I_0 = 0.28125\ m^2$$

$$hp = 2.45\ m + \frac{0.28125\ m^4}{(2.45\ m)(1.5\ m^2)}$$

$$hp = 2.53\ m$$

$$Fv = -\ \gamma\ (\text{área EFDBA})\ w$$

$$\text{área EFDBA} = \text{área EFDA} + \text{área ADB}$$

El área EFDA es un rectángulo y el área ADB es un cuarto de = círculo.

$$\text{área EFDA} = (3.2\ m - 1.5m)(1.5m) = 2.55\ m$$

$$\text{área ADB} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi (1.5m)^2}{4} = 1.77\ m^2$$

$$\text{área EFDBA} = 2.55\ m^2 + 1.77\ m^2 = 4.32\ m^2$$

$$Fv = - (1\,000\ Kg_f/m^3)(4.32 m^2)(1m)$$

$$Fv = - 4\,320\ Kg_f$$

Para encontrar el Xp, habrá que encontrar el centroide del - área EFDBA

i	Figura	X_i (m)	A_i (m^2)	X_iA_i (m^3)
1	Rectángulo	0.75	2.55	1.91
2	Un cuarto de círculo	0.64	1.77	1.13
			$A = 4.32$	3.04 $= \sum_{i=1}^{2} X_iA_i$

$$X_1 = \frac{1}{2}(r) = \frac{1}{2}(1.5\ m) = 0.75\ m$$

$$X_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(1.5m)}{3\pi} = 0.64\ m$$

$$Xp = \frac{\sum_{i=}^{2} X_iA_i}{A} = \frac{3.04\ m^3}{4.32\ m^2}$$

$$Xp = 0.70\ m$$

La fuerza vertical estará localizada a 0.70 m a la izquierda del eje BDF. (Ver figura)

$$F_R = Fh^2 + Fv^2 = (3\,675\ Kg_f)^2 + (4\,320\ Kg_f)^2$$

$$F_R = 5\,671.7\ Kg_f$$

$$\theta = \arctan \frac{|Fv|}{|Fh|} = \arctan \frac{4\,320}{3\,675}$$

$$\theta = 49.61°$$

Tercer caso

El tercer caso viene a ser un híbrido del primer y segundo caso; si se observa la Figura 3.29, se ve muy claramente que en la superficie BC actúa un empuje vertical ascendente o peso imaginario, mientras que la superficie AB tiene un peso real de líquido apoyada en él.

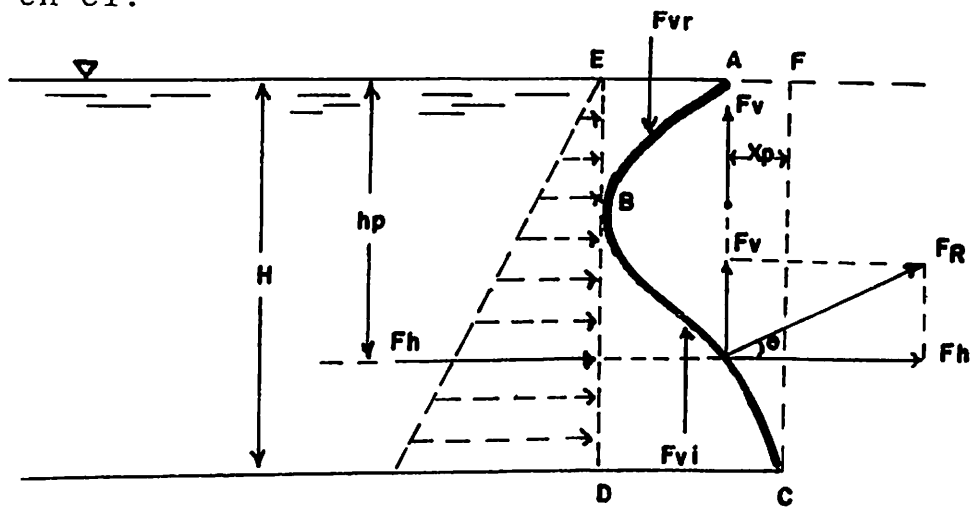


Fig. 3.29 Superficie curva sumergida ejemplificando el tercer caso

La fuerza horizontal se determina de la misma forma que en los dos casos anteriores.

Con respecto a la fuerza vertical, se determinará sumando vectorialmente la fuerza vertical real (Fv_r) y la fuerza vertical imaginaria (Fv_i), pero como tiene la misma dirección y sentido opuesto, se hará una suma algebraica de signos diferentes.

$$Fv = Fv_r + (-Fv_i) \qquad 3.121$$

$$Fv = Fv_r - Fv_i \qquad 3.122$$

$$Fv_r = \gamma\,(\text{área EAB})\ w \qquad 3.123$$

$$Fv_i = \gamma\,(\text{área EFCB})\ w \qquad 3.124$$

Siendo w el ancho de la superficie curva.

$$\text{área EAB} = A_r \qquad 3.125$$

$$\text{área EFCB} = A_i \qquad 3.126$$

Sustituyendo la ecuación 3.125 en 3.123 y 3.126 en 3.124, tenemos:

$$F_{vr} = \gamma A_r w \qquad 3.127$$

$$F_{vi} = \gamma A_i w \qquad 3.128$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.127 y 3.128 en 3.122

$$F_v = \gamma(A_r - A_i)w \qquad 3.129$$

Si la ecuación 3.129 es positiva, la fuerza vertical tiene el sentido hacia abajo, y si es negativa, hacia arriba estará el sentido. La localización de la fuerza vertical estará en el centroide del área que resulte de la resta de A_i al A_r

Ejemplo 3.17 Encontrar la Fuerza Resultante que actúa sobre la compuerta cilíndrica sumergida debido a la presión hidrostática, y su localización si el perímetro mojado es media circunferencia. El ancho de la compuerta es de 1.5 m y el radio es igual a 0.5 m.

Solución Usando el segundo método:

$$F_h = \gamma \bar{h} A$$

$$\bar{h} = c + r = 1m + 0.5m = 1.5\ m$$

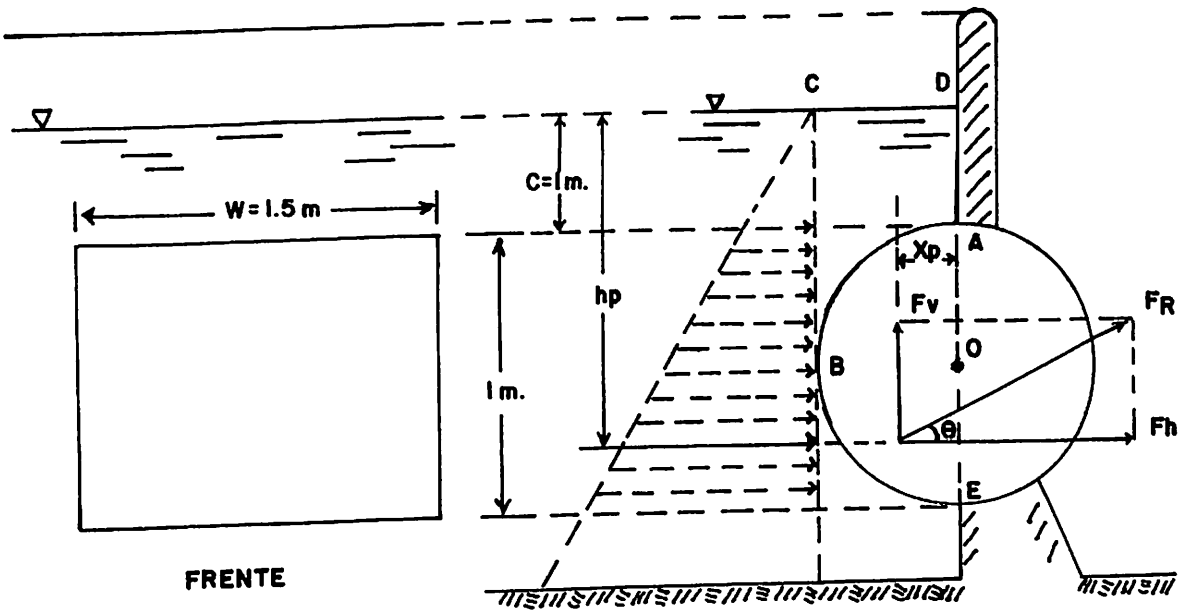
$$\bar{h} = 1.5\ m$$

$$A = (2r)(w) = (1m)(1.5m) = 1.5\ m^2$$

$$A = 1.5\ m^2$$

$$F_h = (1\,000\ Kg_f/m^3)(1.5m)(1.5m^2)$$

$$F_h = 2\,250\ Kg_f$$



$$hp = \bar{h} + \frac{I_0}{\bar{h}A} = 1.5m + \frac{\frac{(1.5m)(1m)^3}{12}}{(1.5m)(1.5m^2)} = 1.55\ m$$

$$hp = 1.55\ m$$

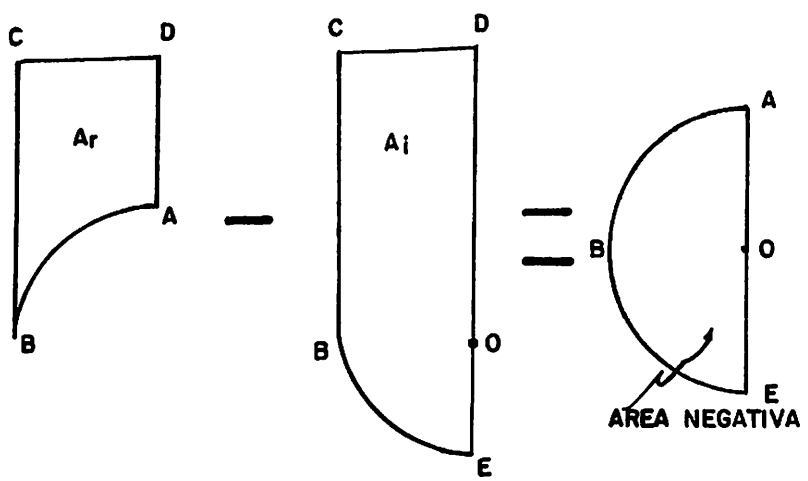
Se observa en la figura que la superficie BE sufre un empuje, mientras que la superficie AB tiene un peso real que se apoya en ella.

$$Fv = \gamma\ (A_r - A_i)\ w$$

A_r = área CDAB

A_i = área CDAOEB

$A_r - A_i$ = - área AOEB



$$Fv = -\gamma\,(\text{área AOEB})\,w = \gamma\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) w$$

$$Fv = (1\,000\ Kg_f/m^3)\left(\frac{\pi(0.5\ m)^2}{2}\right) 1.5m$$

$$Fv = -\ 589\ Kg_f$$

La fuerza vertical estará localizada en el centroide de la mitad del círculo.

$$Xp = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(0.5\ m)}{3\ \pi} = 0.212\ m$$

Xp = 0.212 m a la izauierda del ejer vertical DAOE

$$F_R = Fh^2 + Fv^2 = (2\,250\ Kg_f)^2 + (589\ Kg_f)^2$$

$$F_R = 2\,325.8\ Kg_f$$

$$\theta = \text{arc tan}\ \frac{|Fv|}{|Fh|} = \text{arc tan}\ \frac{589}{2\,250}$$

$$\theta = 14.67°$$

CAPITULO IV

HIDRODINAMICA

La Hidrodinámica es la parte de la hidráulica que se encarga del estudio de los líquidos en movimiento.

En el segundo capítulo se mencionó que los líquidos en reposo no tienen esfuerzos de corte o fuerzas tangenciales (τ), no así sobre los líquidos en movimiento, que al deslizarse sus capas unas sobre otras, surgen fuerzas tangenciales y esta propiedad que tienen los líquidos en movimiento se le llama viscosidad (μ). Cualquier líquido que se encuentre en la naturaleza tiene viscosidad y se le denomina líquido real.

Cuando a un líquido se le desprecia la viscosidad, se dice que se está hablando de un "líquido ideal". Un líquido ideal se describe como un líquido, que al momento de que se estén deslizando las capas que lo forman, no existen fuerzas tangenciales en la superficie de las capas en contacto, como sucede con un líquido en reposo.

El líquido ideal no existe en la naturaleza, fué creado como un modelo abstracto para simplificar el estudio de los líquidos -

en movimiento, y posteriormente corregirlo al comportamiento de un líquido real, ya que por omitir esta importante propiedad, los resultados que se tienen con el líquido ideal son muy distantes de la realidad.

INDICACIONES PRELIMINARES

Antes de formular las ecuaciones analíticas de la hidrodinámica, es necesario conocer y comprender algunos conceptos muy usuales en el movimiento de los líquidos.

Línea de corriente o de flujo

Es la trayectoria que sigue una partícula de fluido, donde la tangente de la línea (que define la trayectoria) es la dirección de la velocidad de la partícula en ese punto. La partícula se puede localizar en el espacio mediante un sistema de ejes de coordenadas rectangulares (x, y y z) como se muestra en la Figura 4.1

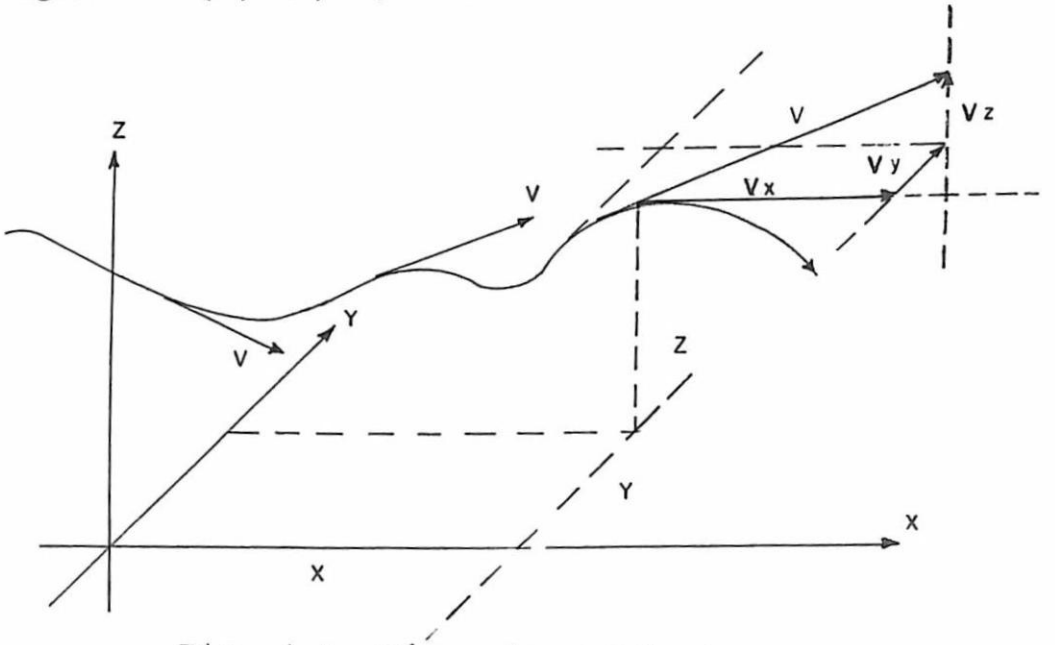


Fig. 4.1 Línea de corriente

Venas líquidas o tubos de flujo

Están formados por líneas de flujo (Figura 4.2)

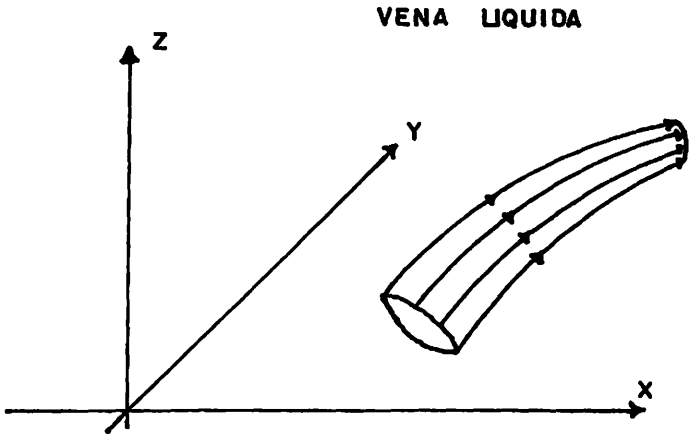


Fig. 4.2 Vena líquida

Gasto, caudal o descarga

Se llama gasto en una determinada sección de conducto, a la cantidad de líquido (o fluído cualquiera) que atraviesa dicha sección durante la unidad de tiempo. Si la cantidad de líquido se mide en volumen, el gasto será volumétrico (volumen por unidad de tiempo); si se mide en peso, el gasto será gravimétrico (peso por unidad de tiempo); si se mide en masa, será caudal másico (masa por unidad de tiempo); esta última medida es muy usada con fluídos compresibles (gases).

El flujo de un líquido puede ser permanente o no permanente, uniforme o variado, laminar o turbulento, subcrítico, crítico y supercrítico (estas tres últimas formas se derinirán en el capítulos 7), que comprende el estudio de los líquidos en conductos abiertos).

Flujo permanente

El flujo permanente ocurre cuando las características del mo-

vimiento (presión, velocidad) son función exclusiva de la localización del punto (X,Y,Z) y no dependen del tiempo. Si existe cambio de presión y velocidad en las partículas de líquido en un punto determiando, se debe a un cambio de las características del conducto en ese punto, y no porque haya transcurrido un tiempo determinado.

El movimiento permanente tiene origen en un estado estable de un sistema que tiene entradas y salidas de líquido, cuya característica es que el sistema no tenga incremento o decremento de volumen de líquido, ya que la cantidad de líquido que entra al sistema es igual a la cantidad que sale, en el mismo instante (Entradas = Salidas). Como se podría ver en un ejemplo muy particular en la Figura 4.3. El gasto en el flujo permanente es constante.

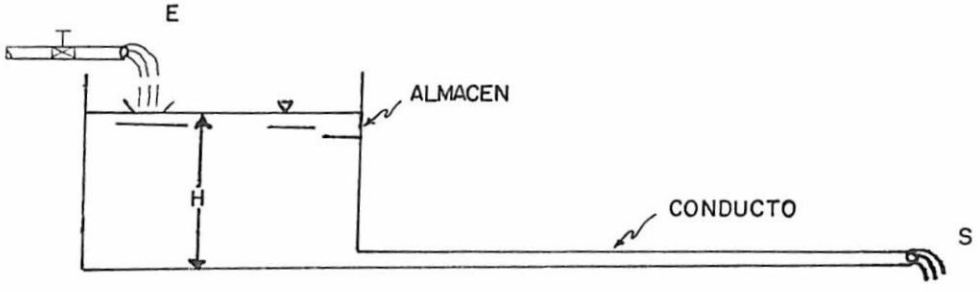


Fig. 4.3 Sistema en estado estable. (E = S).

Flujo no permanente

En el flujo no permanente además de la variación en las características del movimiento debido a la localización del punto, el flujo varía de instante a instante. El movimiento permanente tiene su origen en un estado inestable. Observando de nuevo la Figura 4.3, la entrada será diferente a la salida ($E \neq S$). Si -

E < S habrá decremento del volumen del líquido en el sistema ya - que H estará disminuyendo; si E > S habrá acumulación ya que H - irá aumentando.

El movimiento no permanente puede definirse como función del punto y del tiempo (X,Y,Z y T), con gasto variable.

El flujo permanente es uniforme mientras la velocidad permanezca constante en cualquier punto, a lo largo de la línea de corriente, y esto sucederá siempre y cuando no varíe el área de la sección transversal del conducto.

El flujo no permanente es uniforme cuando la velocidad permanece constante a lo largo de la línea de corriente en un instante dado del tiempo, y ocurrirá también cuando no varía el área de la sección transversal del conducto.

Tanto en el flujo permanente y no permanente el movimiento - puede ser variado, y se caracteriza porque la velocidad no permanece constante; puede ser acelerado o retardado.

Refiriéndose al gasto volumétrico (Q), para poder determinarse, habría que medir un volumen de líquido (V) en un determinado tiempo (t).

$$Q = \frac{V}{t} \qquad 4.1$$

Si se quiere medir el gasto en el conducto de la Figura 4.3 que descarga libremente, habría que utilizar un recipiente graduado y hacer varias mediciones del volumen con sus respectivos tiempos muy exactos, con la ayuda de uno o varios cronómetros. Si el flujo es permanente a la hora de graficar volumen contra tiempo,

se dibujará una línea recta que pasa por el origen donde la pendiente será el gasto (Figura 4.4.)

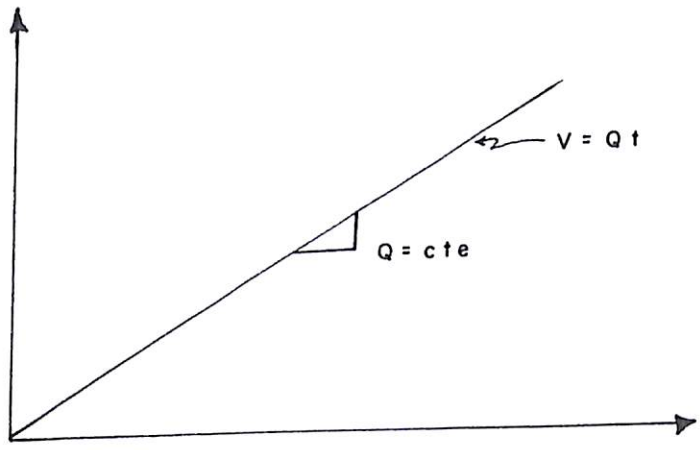


Fig. 4.4 Gráfica de volumen contra tiempo en flujo permanente

En cambio, si el flujo no es permanente, entonces lo que se dibujará es una función exponencial cuya ecuación general es:

$$V = At^B \qquad 4.2$$

donde: A y B = constantes que integran todas las variables que condicionan el flujo.

Si el sistema de la Figura 4.3 la E > S, entonces el exponente del tiempo es mayor que la unidad (B > 1) y al graficarse la ecuación 4.2 se verá como se muestra en la Figura 4.5a, mientras que si la E < S el exponente del tiempo es menor que la unidad (B < 1) y al graficarse se verá como se muestra en la Figura 4.5b. El gasto es la pendiente de la tangente en un punto de la curva y se observa muy claramente que en la Figura 4.5a a medida que aumenta el tiempo, aumenta la pendiente, o sea, que aumenta el gasto mientras que en la figura adyacente sucede todo lo contrario. Si se deriva la ecuación 4.2 obtenemos el gasto.

$$Q = \frac{dV}{dt} = BAt^{B-1} \qquad 4.3$$

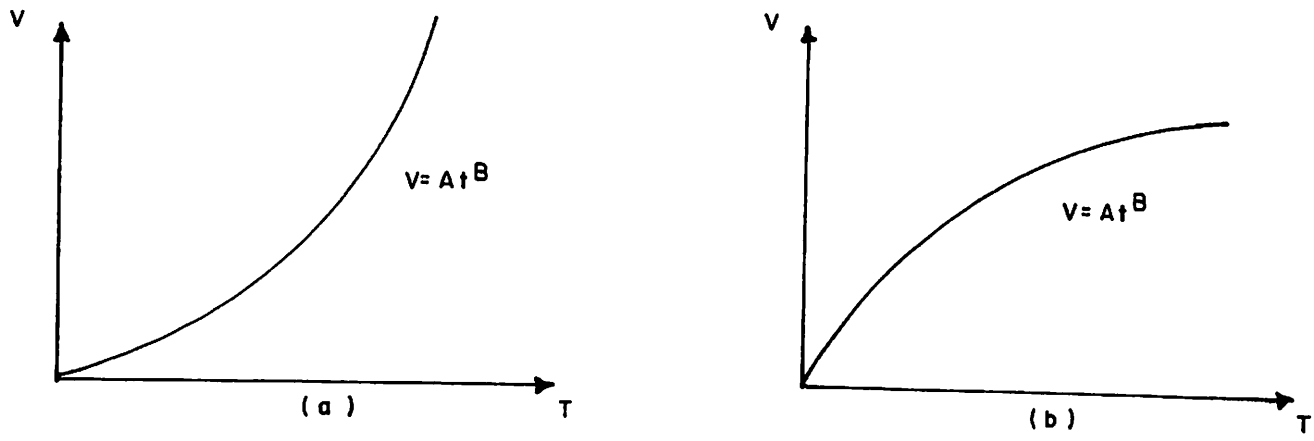


Fig. 4.5 Gráficas de volumen contra tiempo en flujo no permanente. (a) Cuando H aumenta, (b) Cuando H disminuye

El flujo no permanente es mucho más complejo que el permanente. Por eso, en la práctica se hacen diseños de conducción que tiendan a trabajar en flujo permanente porque aún cuando existan pequeñas variaciones de H el flujo puede considerarse permanente en un intervalo de tiempo razonable. En irrigación, es muy importante trabajar en estado permanente porque así se puede tener un buen control de volumen en la conducción de agua para riego.

Flujo laminar

Se caracteriza por tener un movimiento ordenado de partículas, o sea que las líneas de flujo no se cruzan.

Flujo turbulento

Se caracteriza por tener un movimiento desordenado de partículas, o sea que existe entre cruzamiento en las líneas de flujo.

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN LIQUIDO IDEAL

Si se tiene un líquido ideal en movimiento donde se localizará cualquier partícula del fluído mediante un sistema de ejes rectangulares (x,y,z), el movimiento del líquido queda definido si se obtiene un conjunto de ecuaciones que nos determinen en cualquier instante y en cualquier lugar, el valor de la cantidad vectorial de la velocidad y la cantidad escalar de la presión. Descomponiendo el vector velocidad en tres componentes, v_x, v_y y v_z; habrá que conocer tres incógnitas de la velocidad, una de la presión y otra del peso específico, donde esta última nos indica la naturaleza del líquido (agua, gasolina, etc.)

Como se puede observar, son cinco incógnitas por conocer que están en función de cuatro variables indpendientes que son x,y,z,t. Por tanto, para la solución del movimiento de un líquido ideal, se tienen que obtener cinco ecuaciones que son:

a) Una ecuación que tome en cuenta el principio de la conservación de la materia (Ecuación de continuidad).

b) Tres ecuaciones generales del movimiento, cada una con respecto a la dirección del eje rectangualr que le corresponde tomando en cuenta la segunda ley de Newton (impulso y cantidad de movimiento).

c) Una ecuación que tome en cuenta la incompresibilidad del fluído.

Existen dos métodos generales para la solución de este tipo de problemas:

Método de Euler. Estudia el paso de las partículas del fluído a través del tiempo en un punto fijo, sin importar que - destino tengan. Este método es el más simple de los dos y será tratado aquí.

Método de Lagrange. Estudia la trayectoria de la partícula - de fluído a través del tiempo

ECUACION DE CONTINUIDAD

Aplicando la Ley de la conservación de la masa a un fluído - cualquiera y haciendo el estudio en su interior en una porción fija de volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$ a través de la cual está transitando el fluído (Figura 4.7).

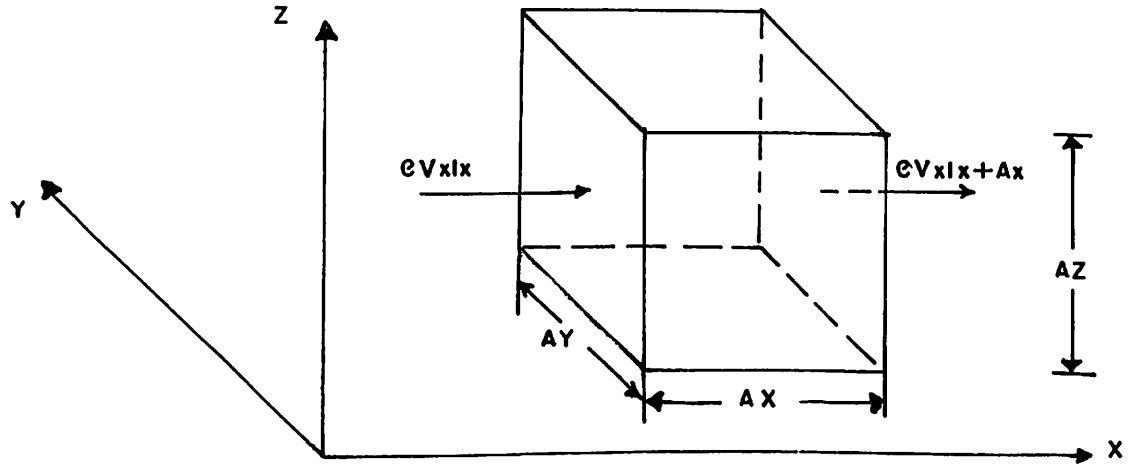


Fig. 4.7 Espacio de volumen $\Delta x\Delta y\Delta z$ a través de la cual atraviesa un fluído.

la cantidad de masa por unidad de tiempo que entra al volumen	-	la cantidad de masa por unidad de tiempo que sale del volumne	=	cantidad de masa por unidad de tiempo que se acumula en el volumen

4.4

$$(\text{densidad})(\text{velocidad})(\text{área}) = \frac{\text{masa}}{\text{tiempo}} \qquad 4.5$$

Si realizamos un análisis dimensional de la ecuación 4.5, tenemos:

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)\left(\frac{L}{T}\right)(L^3) = \frac{M}{T} \qquad 4.6$$

Basándose la ecuación 4.4 en 4.5 y con las dimensiones del cubo fijo

$$(\rho vx|^{1}x - \rho vx|x + \Delta x)\Delta y\Delta x + (\rho vy|y - \rho vy|y + \Delta y)\Delta x\Delta z$$
$$+ (\rho vz|z - \rho vz|z + \Delta z)\Delta x\Delta y = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad 4.7$$

Dividiendo la ecuación 4.7 entre $\Delta x\Delta y\Delta z$

$$\frac{\rho vx|x - \rho vx|x + \Delta x}{\partial x} + \frac{\rho vy|y - \rho vy|y + \Delta y}{\partial y} + \frac{\rho vz|z - \rho vz|z + \Delta z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad 4.8$$

Efectuando cambio de signos en las fracciones de la ecuación 4.8

$$-\frac{\rho vx|x + \Delta x - \rho vx|x}{\Delta x} - \frac{\rho vy|y + \Delta y - \rho vy|y}{\Delta y} - \frac{\rho vz|z + \Delta z - \rho vz|z}{\Delta z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad 4.9$$

Aplicando límites que tiendan a cero en la ecuación 4.9

$$-\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\rho vx|x + \Delta x - \rho vx|x}{\partial x}\right) - \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\rho vy|y + \Delta y - \rho vy|y}{\partial y}\right) -$$
$$-\lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\rho vz|z + \Delta z - \rho vz|z}{\partial z}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad 4.10$$

$$-\frac{\partial(\rho vx)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho vy)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho vz)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad 4.11$$

La ecuación 4.11 es la ecuación de continuidad para un fluído e indica que a medida que avanza el fluído por el volumen, la velocidad va disminuyendo (signo negativo), por lo que va haber salida de masa menores que las entradas y va a ocurrir una acumulación positiva de masa del fluído ($+ \partial\rho/\partial t$). Si la ecuación la multiplicamos por -1 en ambos lados de la igualdad, va a suceder to-

[1] |x significa estudiado en x o evaluado en x

lo contrario. Tomando en cuenta la naturaleza del fluído y condicionándolo solamente para un líquido (fluído incompresible); la densidad no varía con el tiempo ni con respecto a x, y, z, y la ecuación 4.11 se transforma en:

$$\frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial vy}{\partial y} + \frac{\partial vz}{\partial z} = 0 \qquad 4.12$$

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UNA VENA LIQUIDA

En la Figura 4.8 se tiene una vena líquida donde el área A de la sección transversal por donde pasa el flujo es variable.

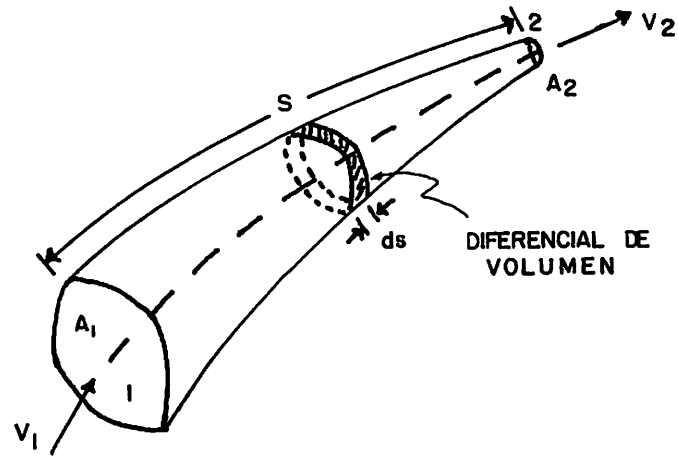


Fig. 4.8 Vena líquida

Aplicando la ecuación de continuidad, tenemos que:

$$\frac{\partial(\rho vA)}{\partial S} = \frac{\partial(\rho Ads)}{\partial T} \qquad 4.13$$

Si la densidad del líquido permanece constante tanto con respecto a la distancia como con respecto al tiempo, y el diferencial de volumen (Ads) es variable con respecto a la distancia (s) pero no con el tiempo porque la vena líquida no aumenta ni disminuye al pasar el tiempo, entonces el término de la derecha de la ecuación 4.13 desaparece por ser un estado permanente.

$$\frac{\partial(\rho vA)}{\partial S} = 0 \qquad 4.14$$

como el fluído es incomprensible:

$$\frac{\partial(vA)}{\partial S} = 0 \qquad 4.15$$

o bien:

$$vA = \text{constante} \qquad 4.16$$

Haciendo un análisis dimensional en la ecuación 4.16

$$(\frac{L}{T})(L^2) = \frac{L^3}{T} \qquad 4.17$$

La ecuación 4.16 nos expresa un volumen por unidad de tiempo y ésto es un gasto volumétrico (Q), y en flujo permanente se conserva constante.

$$Q = vA \qquad 4.18$$

Integrando parcialmente con respecto a s la ecuación 4.22 desde el punto uno al dos en la vena líquida de la Figura 4.7

$$\int_{S}^{2} \frac{\partial(vA)}{\partial S} = 0 \qquad 4.19$$

$$v_1A_1 = v_2A_2 \qquad 4.20$$

La ecuación 4.20 es la ecuación de continuidad para una vena líquida en donde la superficie externa perpendicular al flujo, generalmente está en contacto con una superficie sólida, y expresa que si el área aumenta, la velocidad disminuye; o a la inversa, si el área disminuye, la velocidad aumenta.

ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO DE EULER Y BERNOULLI

Al aplicarse los límites de manera que Δx, Δy y Δz tiendan a ser cero, en el cubo anterior el volumen tiene la magnitud de un punto de dimensiones dxdydz como se ve en la Figura 4.9

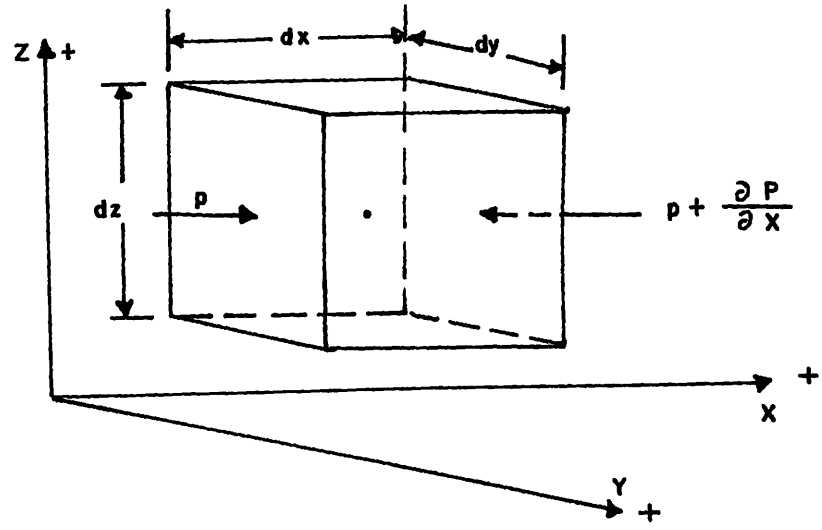


Fig. 4.9 Volumen de magnitud dxdydz

La masa del fluído contenida en el volumen de la Figura 4.9 es:

$$M = \rho dxdydz \qquad 4.21$$

Las fuerzas que intervienen en la masa del fluído son:

1) Fuerzas de masa. La única fuerza de masa es el peso que está en dirección del eje z y en sentido negativo.

$$-\rho\, dx\, dy\, dz\, g \qquad 4.22$$

2) Fuerzas relacionadas a la superficie de las seis caras del volumen (contorno) y que son debido a la presión ejercida por el fluído externo.

$$- \frac{\partial P}{\partial x} dx\ dy\ dz$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y} dx\ dy\ dz \qquad 4.23$$

$$- \frac{\partial P}{\partial z} dx\ dy\ dz$$

Sumando fuerzas en las tres direcciones relativas a los ejes de las coordenadas rectangulares:

$$\Sigma Fx = - \frac{\partial P}{\partial x} dx\ dy\ dz$$

$$\Sigma Fy = - \frac{\partial P}{\partial y} dx\ dy\ dz \qquad 4.24$$

$$\Sigma Fz = - \frac{\partial P}{\partial z} dx\ dy\ dz - dx\ dy\ dz\ g$$

La segunda ley de Newton ($F = Ma$) aplicada al fluído en movimiento

$$\Sigma Fx = M \frac{dvx}{dx}$$

$$\Sigma Fy = M \frac{dvy}{dy} \qquad 4.25$$

$$\Sigma Fz = M \frac{dvx}{dz}$$

Al sustituír la ecuación 4.21 y 4.24 en 4.25

$$- \frac{\partial P}{\partial x} dx\ dy\ dz = \rho dx\ dy\ dz \frac{dvx}{dt}$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y} dx\ dy\ dz = \rho dx\ dy\ dz \frac{dvy}{dt} \qquad 4.26$$

$$- \frac{\partial P}{\partial z} dx\ dy\ dz = \rho dx\ dy\ dz\ g = dx\ dy\ dz \frac{dvz}{dt}$$

Se divide la ecuación 4.26 entre $\rho dx\, dy\, dz$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dvx}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dvy}{dt} \qquad 4.27$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g = \frac{dvz}{dt}$$

Las ecuaciones 4.27 son de un flujo no-permanente o sea, que están en función de x, y, z y t. Por lo que las ecuaciones 4.27 se pueden escribir de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial vx}{\partial t} + \frac{\partial vx}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial vx}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial vx}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial vy}{\partial t} + \frac{\partial vy}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial vy}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial vy}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad 4.28$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{z} - g = \frac{\partial vz}{\partial t} + \frac{\partial vz}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial vz}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial vz}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

dx/dt, dy/dt, dz/dt son velocidades del fluído en dirección x,y,z.

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad 4.29$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

Al sustituír la ecuación 4.29 en 4.28

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_y \qquad 4.30$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z$$

Las ecuaciones 4.30 son ecuaciones de Euler de un líquido en movimiento en estado no permanente. Si el líquido está en reposo todo lo que está a la izquierda de la ecuación es igual a cero.

En estado permanente (estado estable) $\partial v_x/\partial t$, $\partial v_y/\partial t$ y $\partial v_z/\partial t$ son igual a cero por el movimiento como ya se había mencionado está en función exclusiva de la localización del punto (x,y,z) por lo que la ecuación 4.30 se convierte en:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \qquad 4.31 \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z
\end{aligned}
$$

Al transformar las derivadas parciales del lado izquierdo de las ecuaciones 4.31 a derivadas totales

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt} \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt} \qquad 4.32 \\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g &= \frac{dv_z}{dt}
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones 4.32 a simple vista, son idénticas a las de 4.27 pero si las ecuaciones 4.27 se establecen en función de derivadas - parciales, se transforman a las ecuaciones 4.30, mientras que las - ecuaciones 4.32 se transforman en las ecuaciones 4.31

De las ecuaciones 4.32, multiplicando la primera por dx, la - segunda por dy y la tercera por dz

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}dx = \frac{dv_x}{dt}dx$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}dy = \frac{dv_y}{dt}dy \qquad 4.33$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}dz - gdz = \frac{dv_z}{dt}dz$$

Al hacer un re-arreglo de las ecuaciones 4.33

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}dx = \frac{dx}{dt}dv_x$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}dy = \frac{dy}{dt}dv_y \qquad 4.34$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}dz - gdz = \frac{dz}{dt}dv_z$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}dx = v_x\,dv_x$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}dy = v_y\,dv_y \qquad 4.35$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}dz - gdz = v_z\,dv_z$$

Al sumar las tres ecuaciones de la 4.35

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) - gdz = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \qquad 4.36$$

La diferencial total de presión con respecto al punto (x,y,z) es:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \qquad 4.37$$

$$\begin{aligned} v_x dv_x &= d\left[\int v_x\,dv_x\right] = d[v^2x/2 + Cx] \\ v_y dv_y &= d\left[\int v_y\,dv_y\right] = d[v^2y/2 + Cy] \\ v_z dv_z &= d\left[\int v_z\,dv_z\right] = d[v^2z/2 + Cz] \end{aligned} \qquad 4.38$$

Al sustituir las ecuaciones 4.37 y 4.38 en 4.36

$$-\frac{1}{\rho} dP - gdz = d\left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}\right) + d\,(C_1 + C_2 + C_3) \qquad 4.39$$

$$-\frac{1}{\rho} dP - gdz = \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}\right) \qquad 4.40$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \qquad 4.41$$

Si sustituímos 4.41 en 4.40 tenemos:

$$-\frac{1}{\rho} dP - gdz = d\left(\frac{v^2}{2}\right) \qquad 4.42$$

$$-\frac{1}{\rho} dP + gdz + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0 \qquad 4.43$$

Al dividir entre g la ecuación 4.43

$$\frac{1}{\rho} dP + dz + \left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0 \qquad 4.44$$

$$d\left(\frac{1}{\rho} P + z + \frac{v^2}{2g}\right) = 0 \qquad 4.45$$

Al aplicar la regla de derivación que dice que la derivada de una constante es cero por lo que la suma se encuentra adentro del paréntesis de la ecuación 4.45 es una constante (H).

$$\frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = H \text{ (constante)} \qquad 4.46$$

Se integra con límites la ecuación 4.44

$$\frac{1}{\gamma}\int_{P_1}^{P_2} dP + \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{\bar{v}^2}{2g}\right) = 0 \qquad 4.47$$

$$\frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 0 \qquad 4.48$$

Reordenando términos:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{g} \qquad 4.49$$

La ecuación 4.49 es la ecuación de Bernoulli para un líquido - ideal, que a continuación se analiza dimensionalmente.

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{(L/T)^2}{L/T^2} = L$$

$$z = L$$

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{F/L^2}{F/L^3} = L$$

Los términos de la ecuación de Bernoulli cuantifican la energía específica del líquido.

$$\text{Energía específica} = \frac{\text{Energía del líquido}}{\text{Peso del líquido}} \qquad 4.50$$

Haciendo un análisis dimensional de la ecuación 4.50

$$\text{Energía específica} = \frac{F \cdot L}{F} = L$$

El término $v^2/2g$ es la energía específica cinética del líquido (carga por velocidad) y los términos $z+P/\gamma$ son la energía específica potencial (carga por posición + carga por velocidad).

El conducto de la Figura 4.10 es de sección transversal al - flujo, variable. Se observa muy claramente lo siguiente:

1) La energía específica total es constante a todo lo largo del flujo por lo que se concluye que la energía del agua ni se gana ni se pierde.

2) A medida que avanza el flujo pierde energía específica -

por presión y gana energía específica cinética, por lo que se concluye que al reducirse el área disminuye la presión y aumenta la velocidad del líquido.

3) Cuando el líquido pasa del punto uno al dos, P_2/γ pierde longitud pero la gana $v_2^2/2g$ y z_2, por lo que se concluye que cuando alguno o algunos de los términos pierde energía la gana el otro, de manera que se conserva siempre la energía en el líquido.

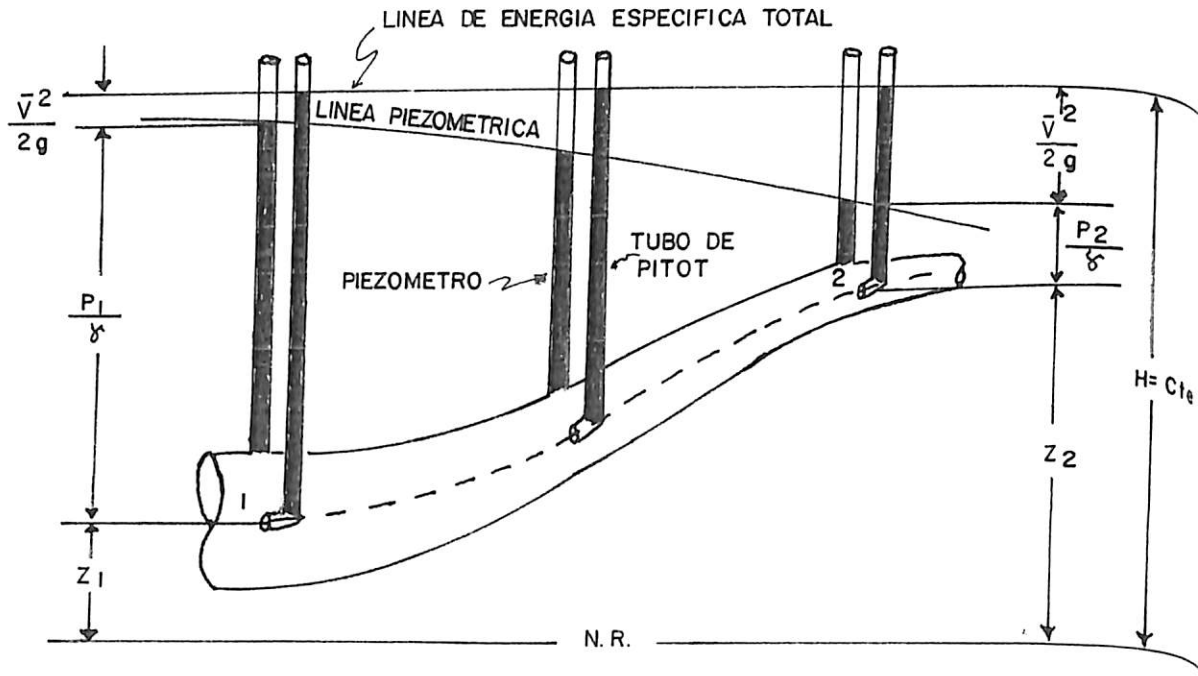


Fig. 4.10 Términos de la ecuación de Bernoulli vistos gráficamente

Ejemplo 4.1 Se encontró que la velocidad económica de un conducto muy largo es de 2.1 m/seg. Si el gasto disponible es de 90 litros por segundo y en el mercado se encuentran diámetros de 6, 8, 10 pulgadas, calcular el diámetro de la línea.

Solución Utilizando la ecuación de continuidad.

$$Q = VA$$

$$A = \frac{Q}{V} = \frac{0.090\ m^3/seg}{2.1\ m/seg} = 0.0428\ m^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(0.0428\ m^2)}{\pi}}$$

$$d = 0.23\ m$$

$$6" = 0.1524\ m$$

$$8" = 0.2032\ m$$

$$10" = 0.254\ m$$

El diámetro más próximo es el de 10 pulgadas

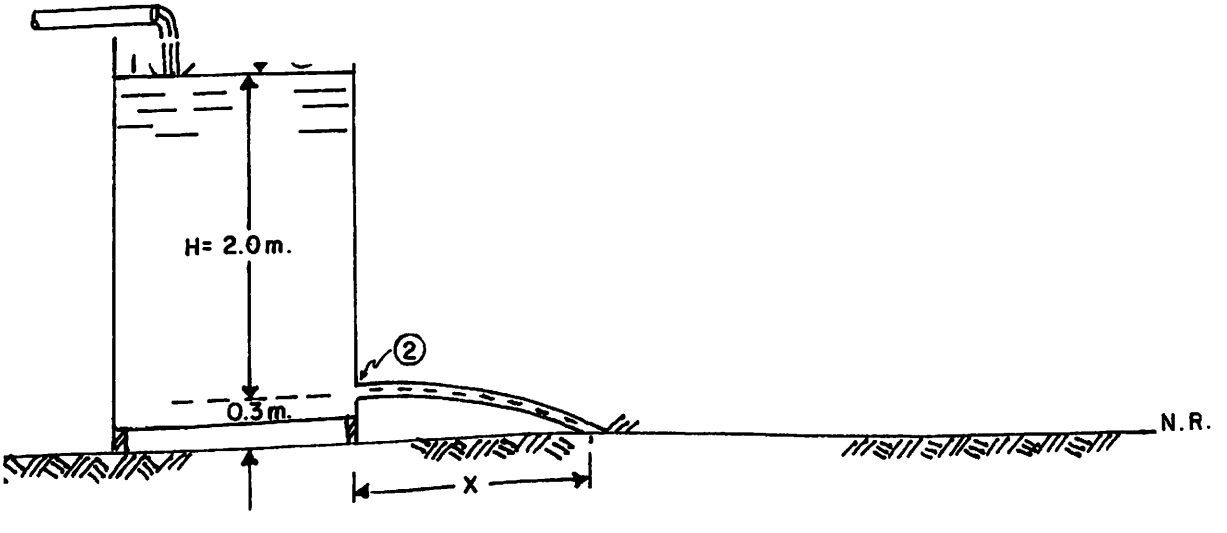
$$A = \frac{(0.254\ m)^2}{4} = 0.05067\ m^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.090\ m^3/seg}{0.05067\ m^2} = 1.77\ m/seg$$

$$V = 1.77\ m/seg$$

El dato anterior es la velocidad que tendrá el conducto de 10 pulgadas.

Ejemplo 4.2 El recipiente de la figura está siendo alimentado con el mismo gasto con que se está descargando por un orificio de 2 cm de - diámetro. Encontrar la velocidad a la salida del orificio, el gasto, el tiempo en que el chorro tarda en llegar a la superfi cie y la distancia horizontal x.



Solución

Los puntos de la Ecuación de Bernoulli, siempre se aplican donde se tenga un menor número de incógnitas, por lo que lo situaremos en la superficie del líquido y a la salida del orificio - ya que en esos sitios se conoce la presión, que es la atmosférica. Las presiones de la ecuación de Bernoulli las vamos a utilizar como presiones relativas, por lo que las presiones que sean iguales a la atmosférica son cero.

Si situamos el nivel de referencia en la superficie del líquido y aplicamos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\bar{v}_2^2}{2g}$$

La velocidad en el punto uno es cero debido a que la superfi - cie se mantiene siempre en el mismo lugar.

$$v_z = 2g(z_1, - z_2) = \sqrt{2g\ H} = \sqrt{2(9.81\ m/seg)(2m)}$$

$$v_2 = 6.26\ m/seg$$

$$A = \frac{\pi(0.02\ m)^2}{4} = 0.000314\ m^2$$

$$Q = V\ A = (6.16)(0.00314\ m^2) = 0.00196\ m^3/seg$$

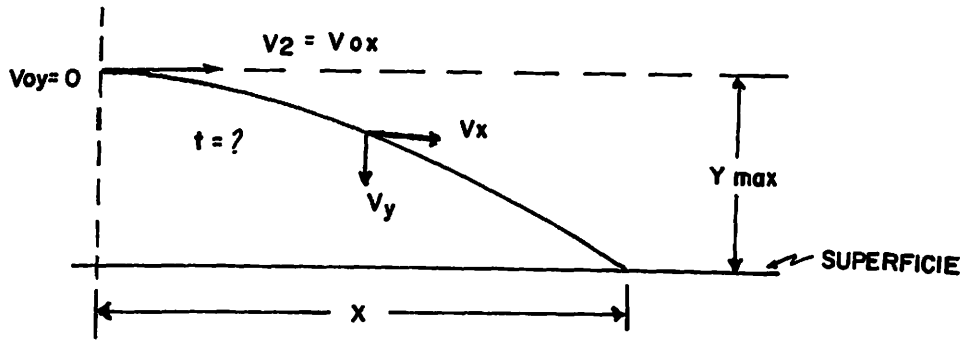
$$Q = 1.96\ L.P.S.\ (Litros\ por\ segundo)$$

Utilizando las ecuaciones del tiro parabólico para encontrar el tiempo (t) y la distancia (x), recordando que la V_{oy} es igual a cero en la cúspide de la parábola (Y_{max})

$$Y_{max} = V_{ot} + \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2\ Y_{max}}{g}} = \sqrt{\frac{2\ (0.3\ m)}{9.81}}$$

$$t = 0.247\ seg$$

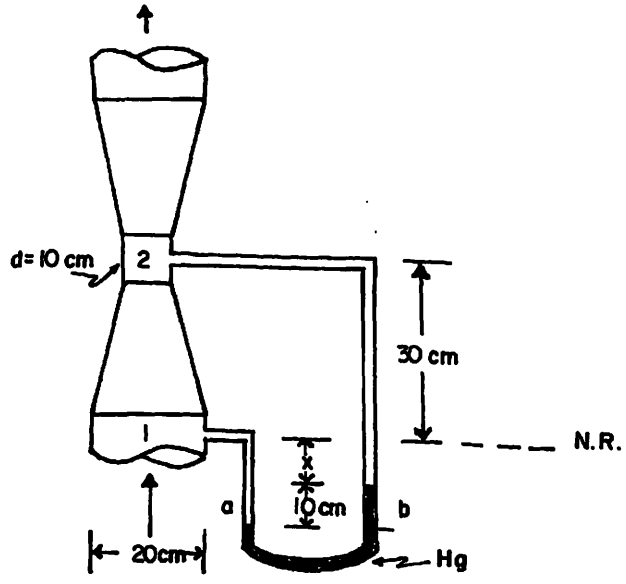


V_x es constante $\therefore$ $V_x = \frac{x}{t}$

$x = V_x\, t = (6.26 \text{ m/seg})(0.247 \text{ seg})$

$x = 1.54$ m

Ejemplo: Encuentre el caudal de agua en litros por segundo - (L.P.S.), por medio del medidor de Venturi mostrado - en la figura.



$Q = VA$

$V_1A_1 = V_2A_2$

$V_1 = \frac{V_1A_1}{A_1}$

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2 \right) 2g$$

$$\frac{V^2 A^2}{A_1^2} - V_2^2 = \left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2 \right) 2g$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2\right) 2g}{\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1}}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2\right) 2g}{\frac{d_2^4}{d_1^4} - 1}}$$

En seguida se efectuó un análisis de presiones en el manómetro diferencial

$$P_a = P_b$$

$$P_a = P_1 + \gamma_{agua} + \gamma_{agua}\ (0.1\ m)$$

$$P_b = P_2 + \gamma_{agua}\ (0.3m) + \gamma_{agua}\ X + \gamma_{Hg}\ (0.1m)$$

$$P_1 - P_2 = \gamma_{Hg}(0.1m) - \gamma_{agua}(0.1m) + \gamma_{agua}(0.3m)$$

$$P_1 - P_2 = (\gamma_{Hg} - \gamma_{agua})(0.1m) + \gamma_{agua}(0.3m)$$

$$P_1 - P_2 = (13570\ Kg_f/m^3 - 1000\ Kg_f/m^3)(0.1m) + (1000\ Kg_f/m^3)(0.3m)$$

$$P_1 - P_2 = 1557\ Kg_f/m^2$$

$$P_1 - P_2 = -1557\ Kg_f/m^2$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{-1557\ Kg_f/m^2}{1000\ Kf_f/m^3} + 0.3m\right)(19.62\ m/seg^2)}{\frac{(0.1m)^4}{(0.2m)^4} - 4}}$$

$$V_2 = 6.23\ m/seg$$

$$Q = V_2 A_2 = \frac{(6.23\ m/seg)(\pi)(0.1m)^2}{4} = 0.0489\ m^3/seg$$

$$Q = 48.9\ L.P.S.$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{\left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2\right) 2g}{\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1}}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + z_2\right) 2g}{\frac{d_2^4}{d_1^4} - 1}}$$

En seguida se efectuó un análisis de presiones en el manómetro diferencial

$$P_a = P_b$$

$$P_a = P_1 + \gamma_{agua} + \gamma_{agua}\ (0.1\ m)$$

$$P_b = P_2 + \gamma_{agua}\ (0.3m) + \gamma_{agua}\ X + \gamma_{Hg}\ (0.1m)$$

$$P_1 - P_2 = \gamma_{Hg}(0.1m) - \gamma_{agua}(0.1m) + \gamma_{agua}(0.3m)$$

$$P_1 - P_2 = (\gamma_{Hg} - \gamma_{agua})(0.1m) + \gamma_{agua}(0.3m)$$

$$P_1 - P_2 = (13570\ Kg_f/m^3 - 1000\ Kg_f/m^3)(0.1m) + (1000\ Kg_f/m^3)(0.3m)$$

$$P_1 - P_2 = 1557\ Kg_f/m^2$$

$$P_1 - P_2 = -1557\ Kg_f/m^2$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{-1557\ Kg_f/m^2}{1000\ Kf_f/m^3} + 0.3m\right)(19.62\ m/seg^2)}{\frac{(0.1m)^4}{(0.2m)^4} - 4}}$$

$$V_2 = 6.23\ m/seg$$

$$Q = V_2 A_2 = \frac{(6.23\ m/seg)(\pi)(0.1m)^2}{4} = 0.0489\ m^3/seg$$

$$Q = 48.9\ L.P.S.$$

CAPITULO V

FLUJO DE LIQUIDOS REALES EN CONDUCTOS A PRESION

El flujo de un líquido real es mucho más complejo que el de un líquido ideal, debido a que por su viscosidad aparecen esfuerzos cortantes entre las diferentes capas que forman las partículas del fluído, como además entre superficie interior del conducto y la capa líquida adyacente a ella; por esa complejidad, los problemas se resuelven empleando métodos semiempíricos, como el de corregir la ecuación de Bernoulli (al conducir el fenómeno idealizado a experimentación), o aprovechando métodos completamente empíricos para obtener fórmulas irracionales.

Un conducto cerrado es un medio de transporte de los fluídos; tratándose de líquidos, un conducto a presión será siempre un conducto cerrado que transporta un líquido forzaod dentro de él. Se entiende por líquido forzado dentro de un conducto, cuando la presión manométrica en la superficie interior del conducto puede ser positiva o negativa, pero nunca igual a cero en todo el tramo del conducto porque trabajaría como un canal.

Un ejemplo muy común, es la utilización de este tipo de conductos para la distribución de agua en las ciudades. En nuestra área los ejemplos son: conducción de agua desde la fuente de abastecimiento (pozos, presas, ríos, lagunas, ect), hasta un canal de riego (regadera) para de ahí pasarla al área de cultivo y regar por gravedad, o en lugar de utilizar regadera se efectúa un riego por

compuertas, o desde la fuente de abastecimiento llevarla directamente al área de cultivo, distribuyéndola por toda el área mediante algún sistema de riego a presión (goteo o aspersión).

EXPERIMENTO DE REYNOLDS

Osborne Reynolds (1842-1912) en 1883, trató de observar el comportamiento del flujo en los líquidos. Para eso, Reynolds empleó un dispositivo consistente en un tubo transparente conectado a un recipiente (Figura 5.1). El extremo abocinado del tubo, facilita la introducción de un tubo de mucho menor diámetro, que tiene una valvulita de paso para regular el flujo de un colorante. El tubo externo también tiene su válvula para controlar el gasto.

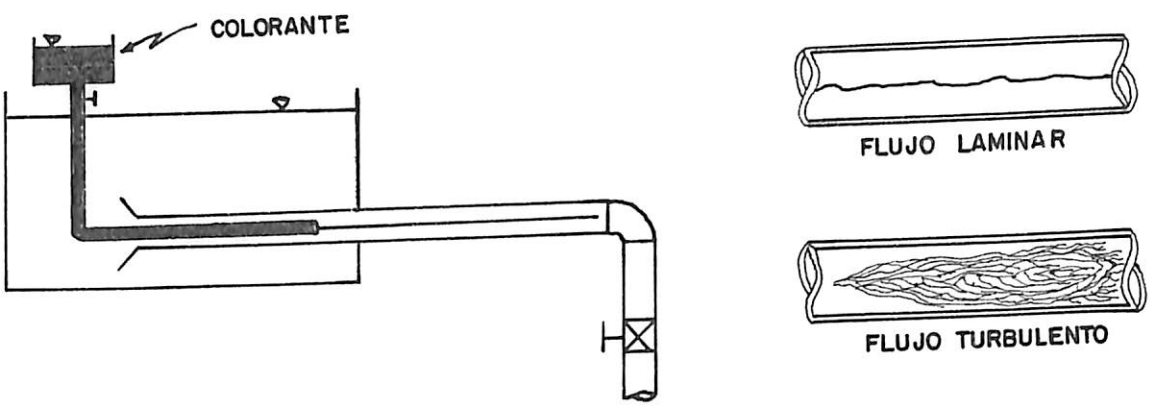


Fig. 5.1 Experimento de Reynolds

Abriéndose gradualmente la válvula y abriendo la valvulita para dar paso al colorante, se puede observar la formación de un filamento coloreado rectilíneo. Concluyéndose que con este tipo de movimiento, las líneas del flujo son paralelas, o sea que existe un flujo laminar en la corriente.

Abriéndose aún más la válvula se aumenta el gasto y por ende la velocidad del líquido. El filamento coloreado puede llegar a difundirse en la masa líquida a consecuencia del movimiento desordenado de las partículas, o sea que existe un flujo turbulento.

El valor que tiene que alcanzar la velocidad para pasar de régimen laminar a turbulento (a medida que vaya aumentando el gasto) se llama "velocidad crítica alta" o "superior". Invirtiendo el proceso, esto es, cerrando en forma gradual la válvula, el gasto y la velocidad van siendo reducidos gradualmente, hasta que se restablezca regularmente el filamento coloreado, o sea que ocurra el cambio del régimen turbulento a laminar. El valor de la velocidad para que ocurra el cambio mencionado se llama "velocidad crítica baja" o "inferior", y es menor que la velocidad crítica alta.

Después de muchos años de experimentación, Reynolds obtuvo una fórmula empírica que nos predice si el flujo de una corriente es laminar o turbulenta, y su ecuación está en función de las características del flujo (velocidad), del fluído (densidad y viscosidad) y del conducto (diámetro). Esta ecuación nos dá un número adimensional, llamado número de Reynolds (R_e).

$$R_e = \frac{\bar{V} d \rho}{\mu} \qquad 5.1$$

La viscosidad cinemática (ν) es la relación entre la viscosidad absoluta del fluído, y su densidad ($\nu = \mu / \rho$) la ecuación 5.1 si está en función de la viscosidad cinemática se transformará en:

$$R_e = \frac{Vd}{\nu} \qquad 5.2$$

Al hacer un análisis dimensional de la ecuación 5.2

$$R_e = \frac{(L/T)L}{L^2/T} = 1 \qquad 5.3$$

Por lo que se demuestra que la ecuación es adimensional. Por último, Reynolds concluyó lo siguiente:

R_e < 2 000 el régimen es laminar.

R_e > 4 000 el régimen es turbulento.

Donde 2000 es el valor del Reynolds para la velocidad crítica baja y 4000 es el valor del Reynolds para la velocidad crítica alta Si el valor del Reynolds se encuentra en el rango de 2000 a 4000, no se va a saber si el flujo es laminar o turbulento, por lo mismo, es difícil de determinar con seguridad el régimen en que se encuentra el flujo, y por esa indeterminación se le denomina zona crítica.

2 000 ≤ R_e de la zona crítica ≤ 4 000

CORRECCION DE LA ECUACION DE BERNOULLI

En la deducción de la ecuación de Bernoulli, fueron formuladas varias hipótesis que son:

1) El líquido es ideal (carente de viscosidad) y esto involucra que:

   a. La velocidad es constante en toda la sección transversal por donde pasa el flujo (Figura 5.2)

   b. La velocidad es constante en todo su recorrido (no hay entrada ni salida de energía en el líquido que fluye)

Sin embargo, en la práctica la ecuación de Bernoulli se aparta mucho de la realidad debido a que:

1) Los líquidos son reales (existe viscosidad) y esto involucra que:

a. La velocidad varía en la misma sección transversal del flujo (Figura 5.2)

b. La energía es variable en todo su recorrido (la energía se va perdiendo a medida que el líquido avanza por el - conducto.

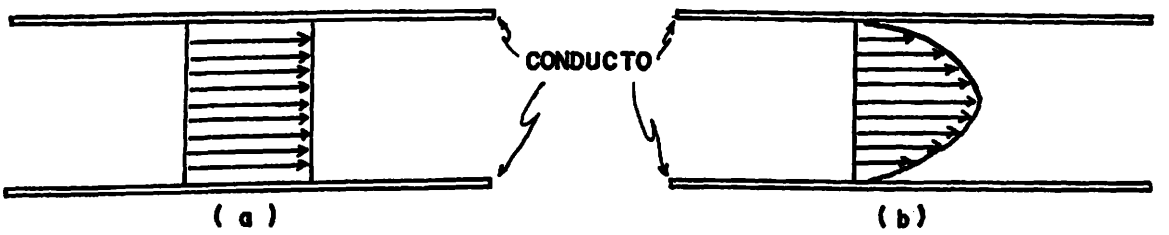


Fig. 5.2 Perfil de velocidades. a) Líquido ideal. b) Líquido real.

Por lo expuesto anteriormente, es necesario corregir la ecuación de Bernoulli para utilizarla en fluídos reales.

Observando la Figura 5.3, se puede ver claramente el declive de la línea de energía total y el de la línea piezométrica en un conducto de diámetro constante. La línea de energía total y piezométrica son paralelas cuando los tramos del conducto son de diámetro constante.

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_{TOT(1)-(2)} \qquad 5.4$$

La $\bar{v}$ significa la velocidad media del flujo y es la velocidad que representa a toda la distribución de velocidades en la - sección transversal del flujo.

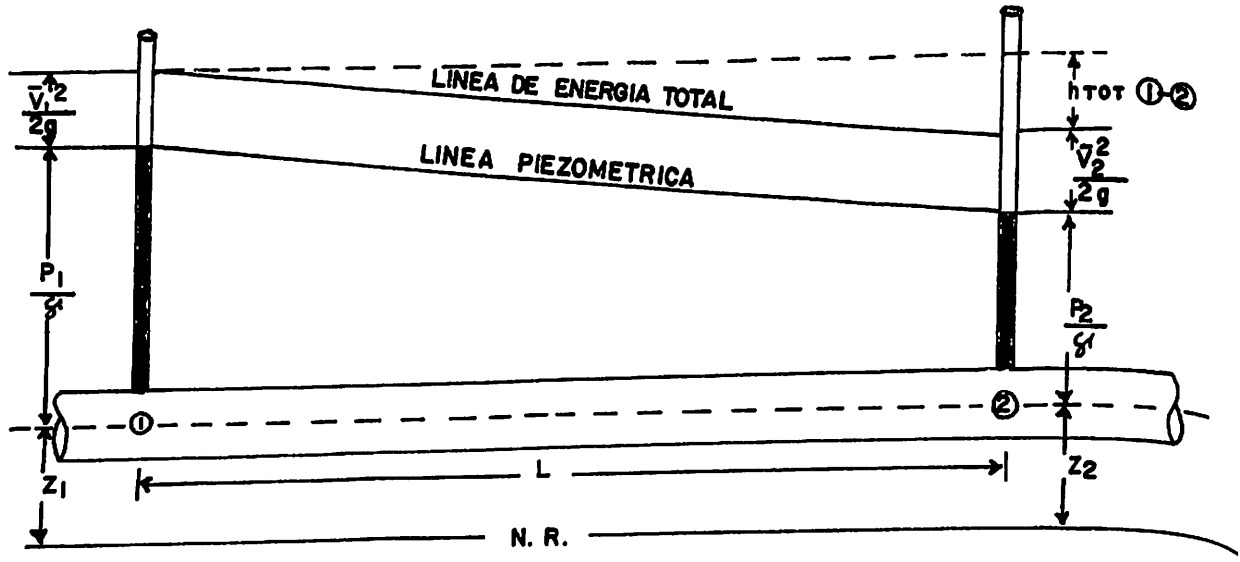


Fig. 5.3 Flujo de un líquido real en un conducto a presión

La h_{TOT} se divide en dos clases que son:

a. Pérdidas por longitud o fricción (h_f). Estas pérdidas son ocasionadas por el movimiento del agua a lo largo del conducto.

b. Pérdidas locales (h_{LOC}). Son las provocadas por piezas especiales que se le instalan al conducto, como: codos, coples, niples, tes, válvulas, medidores de gasto; por aumento y reducción del diámetro del conducto, etc.

En conductos largos, las pérdidas locales pueden llegar a ser despreciables, comparadas con las pérdidas por longitud.

La naturaleza de las pérdidas de energía (también llamada pérdida de carga) se puede explicar con la siguiente ilustración. Si se tienen dos recipientes conectados por un conducto de diámetro constante donde las válvulas están completamente cerradas, y las superficies libres del líquido en cada recipiente están al mismo nivel (Figura 5.4).

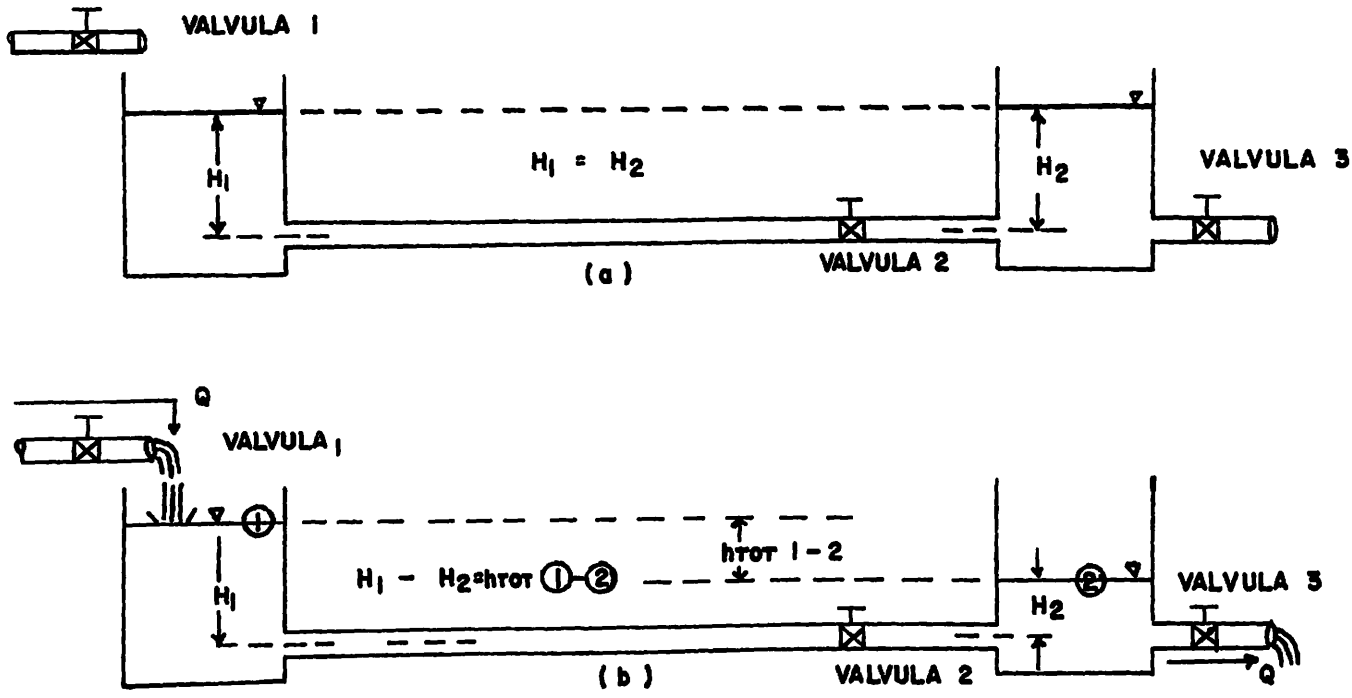


Fig. 5.4 Naturaleza de las pérdidas de carga. a) Sistema hidrostático. b) Sistema hidrodinámico de un fluído real.

Si se abren las tres válvulas de manera que den el mismo gasto (Q), mientras que se estabiliza el sistema, la altura H_2 se irá reduciendo hasta tener una altura constante la cual nos está indicando que el sistema se encuentra ya en estado estable. Si una partícula de líquido se encuentra en la superficie del primer depósito, al pasar por todo el conducto y llegar a la superficie del otro depósito efectuó un trabajo el cual le hizo perder energía y ya no podrá volver a recuperar la altura que tenía inicialmente en el primer depósito, por eso H_2 siempre será mayor que H_1 de manera que al obtener diferencia de alturas entre los niveles de los depósitos, se encontrará la pérdida de energía específica total en el sistema (h_{TOT}).

Si se analiza la velocidad en todo el tramo del conducto, se verá que no varía (a menos de que variara el diámetro del conduc-

to para que el gasto siempre sea el mismo) por lo que no existe pérdida de energía cinética. La velocidad en el tramo de diámetro constante varía si H_1 también variara (flujo no permanente). Mientras que la presión sí varía a todo lo largo del conducto (se pierde presión cuando el líquido avanza), y al salir el líquido del conducto pierde altura, lo cual significa que pierde energía por posición, por lo que se concluye que en flujo permanente, sólo se pierde energía potencial.

PERDIDA DE CARGA POR LONGITUD

Experimentalmente se ha demostrado que las pérdidas hidráulicas son directamente proporcionales al cuadrado de la velocidad media.

$$h_f \propto \bar{V}^2 \qquad 5.5$$

Quitanto la proporcionalidad

$$h_f = K'_f \bar{V}^2 \qquad 5.6$$

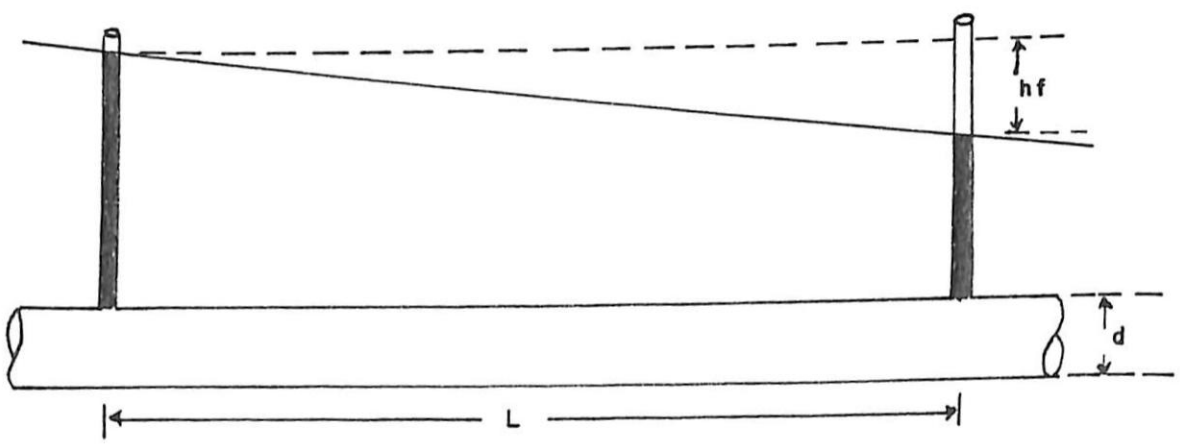


Fig. 5.5 Conducto por donde circula un gasto constante

El término K'_f se puede expresar en función de dos términos:

$$K'_f = \frac{Kf}{2g} \qquad 5.7$$

Sustituyendo la ecuación 5.7 en 5.6

$$h_f = K_f \frac{\bar{V}}{2g} \qquad 5.8$$

El coeficiente K_f depende de las características del flujo - (gasto) y de las características del conducto (material, diámetro, longitud) en un flujo de agua isotérmico. Al variar cualquiera de estas caracterísitcas, varía K_f, por lo que lo tendríamos que po - ner en función de ellas.

De la ecuación 5.8 se concluye que:

$$h_f \propto K_f \qquad 5.9$$

En la Figura 5.5 se observa que a gasto constante, al aumentar la longitud aumenta h_f y al aumentar el diámetro disminuye, o sea que:

$$h_f \propto \frac{L}{d} \qquad 5.10$$

Como h_f es proporcional a K_f y L/d entonces:

$$K_f \propto \frac{L}{d} \qquad 5.11$$

Quitando la proporcionalidad tenemos:

$$K_f = f \frac{L}{d} \qquad 5.12$$

Sustituyendo la ecuación 5.12 en 5.8

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 5.13$$

La ecuación 5.13 se conoce como la ecuación de Darcy-Weisbach donde f es el coeficiente de fricción hidráulico.

El coeficiente f tiene diferente comportamiento en el régimen laminar y en el régimen turbulento.

TEORIA DE LA CORRIENTE LAMINAR

En un flujo laminar, las capas del fluído se deslizan en forma ordenada, cada una con diferentes velocidades. En un conducto circular, las capas del fluído son de forma cilíndrica, tal como se observan en la Figura 5.6, donde la capa adyacente a la pared del condcucto no tiene velocidad, y la velocidad de las capas va aumentando a medida que se encuentren más alejadas de la pared del conducto.

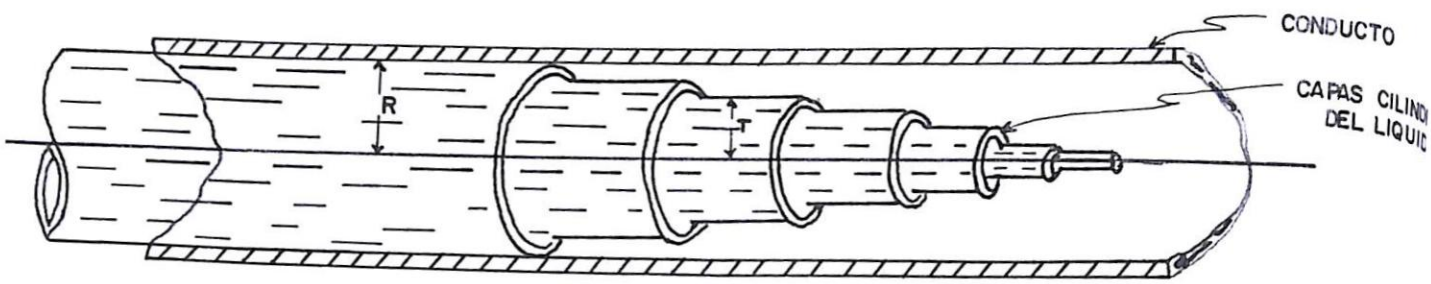


Fig. 5.6 Capas del líquido en régimen laminar

Si se tiene un sistema de conducción por el cual fluye un líquido y se analiza un tramo L del conducto (Figura 5.7) que tiene las siguientes condiciones:

a. Sea un flujo permanente (estado estable).

b. Tenga un régimen laminar.

c. El tramo analizado sea de diámetro constante

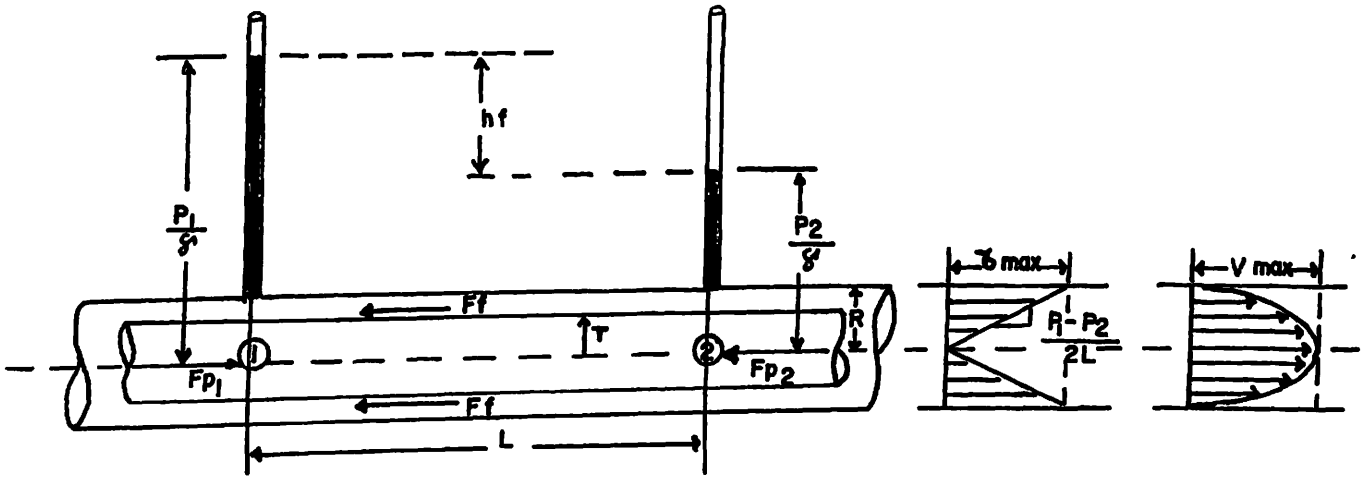


Fig. 5.7 Sistema de flujo de un líquido

Las condiciones a y c implican que la velocidad media del flujo en el tramo L es constante, y la condición b implica que el tipo de flujo se subordina a la ley de viscosidad de Newton ($\tau = \pm \mu dv/dy$) Si en el flujo solamente se analiza una capa del líquido, cualquiera, alejada del centro del conducto una distancia r, la velocidad de esa capa es constante en todo el tramo, por lo que se puede utilizar la primera ley de Newton, que define que todo cuerpo que se encuentra en reposo, o velocidad constante, la suma defuerzas que actúan en él, son igual a cero.

Las diferenciales de fuerzas que actúan sobre el diferencial de líquido (la capa del líquido) son:

1) diferencial de fuerzas de presión ($d F_p$)

2) diferencial de fuerzas de fricción ($d F_f$)

y anteponiendo signo positivo a las fuerzas que van en dirección del movimiento.

$$d F_p - d F_f = 0 \qquad 5.14$$

$$d\ F_p = (P_1 - P_2)(dA) \qquad 5.15$$

$$d\ A = 2\pi\ r\ dr \qquad 5.16$$

Sustituyendo la ecuación 5.16 en 5.15

$$d\ F_p = (P_1 - P_2)(2\pi r\ dr) \qquad 5.17$$

Las fuerzas de fricción tienen origen en los esfuerzos cortantes (τ), y como se mostró en el capítulo dos, la magnitud de τ es igual a la fuerza tangencial de las superficies de contacto entre dos capas, por unidad de área. En el caso de capas cilíndricas, el área de contacto será la superficie de un cilindro sin tomar en cuenta las dos áreas circulares o sea para nuestro caso, el área es igual a $2\ \pi rL$.

$$d\ F_f = d(\tau A) \qquad 5.18$$

$$A = 2\pi\ rL \qquad 5.19$$

Al sustituir la ecuación 5.19 en 5.18

$$d\ F_f = d[\tau(2\pi rL)] \qquad 5.20$$

Si sustituímos la ecuación 5.20 y 5.17 en 5.14, tenemos:

$$(P_1 - P_2)(2\pi r dr) - d(2\pi rL\tau) = 0 \qquad 5.21$$

$$d(r\tau) = \frac{P_1 - P_2}{L}\ r\ dr \qquad 5.22$$

Al integrar la ecuación 5.22 sin límites, resulta:

$$r\tau = \frac{P_1 - P_2}{2L}\ r^2 + C \qquad 5.23$$

Se despeja τ

$$\tau = \left(\frac{P_1 - P_2}{2L} \right) r + \frac{C}{r}$$

Utilizando condiciones frontera para valorar C y tomando en cuenta que el esfuerzo cortante máximo se encuentre en la pared del conducto (cuando r = R) y el esfuerzo cortante mínimo es cero y se encuentra en el centro del conducto (cuando r = 0). r = 0 si y sólo si τ = 0. Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación 5.24

$$0 = \left(\frac{P_1 - P_2}{2L} \right) 0 + \frac{C}{0} \qquad 5.25$$

El único valor de C que satisface la ecuación 5.25 es cero; si es otro número diferente de cero, el lado izquierdo de la ecuación da un número infinito, por lo tanto C = 0.

$$\tau = \left(\frac{P_1 - P_2}{2L} \right) r \qquad 5.26$$

La ecuación 5.26 describe el perfil de esfuerzos cortantes distribuidos en la sección transversal del flujo, tal y como se observan en la Figura 5.7 (La primera gráfica a la derecha del conducto).

La ley de viscosidad de Newton en coordenadas cilíndricas

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr} \qquad 5.27$$

El signo negativo de la ecuación indica que al aumentar el radio (r), la velocidad disminuye.

Se sustituye la ecuación 5.27 en 5.26

$$-\mu \frac{dv}{dr} = \left(\frac{P_1 - P_2}{2L}\right) r \qquad 5.28$$

Se despeja dv de la ecuación 5.28

$$dv = -\left(\frac{P_1 - P_2}{2\mu L}\right) r\, dr \qquad 5.29$$

Se integra sin límites la ecuación 5.29

$$v = -\left(\frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\right) r^2 + C \qquad 5.30$$

Utilizando las siguientes condiciones frontera para valorar - C, v = 0 si y solo si r = R

$$0 = -\left(\frac{P_1 - P_2}{4\mu L}\right) R^2 + C \qquad 5.31$$

Al despejar c de al ecuación 5.31

$$C = \left(\frac{P_1 - P_2}{4\pi L}\right) R^2 \qquad 5.32$$

Se sustituye la ecuación 5.32 en 5.30

$$v = \left(\frac{P_1 - P_2}{4\pi L}\right)(R^2 - r^2) \qquad 5.33$$

La ecuación 5.33 describe el perfil de distribución de velocidades en la sección transversal del flujo, en régimen laminar tal como se ven en la Figura 5.7 (La segunda gráfica a la derecha del conducto).

Si se quiere saber la ecuación particular del esfuerzo cortante máximo considerando que se encuentra en la pared del conducto.

$$\tau_{max} = \left(\frac{P_1 - P_2}{2L\mu} \right) R \qquad 5.34$$

Si se quiere saber la ecuación particular de la velocidad - máxima y considerando que se encuentra en el centro del conducto.

$$\tau_{max} = \left(\frac{P_1 - P_2}{4L\mu} \right) R^2 \qquad 5.35$$

Para obtener el gasto volumétrico Q habría primero que for - mar la ecuación que nos represente el gasto de una capa de fluído para posteriormente integrarla.

$$dQ = v\, dA \qquad 5.36$$

v es la velocidad a la que se mueve la capa de líquido analizado.

Al sustituír la ecuación 5.16 y 5.33 en 5.36

$$dQ = \left(\frac{P_1 - P_2}{4\mu L} \right) (R^2 - r^2)(2\pi r\, dr) \qquad 5.37$$

Al integrar con límites la ecuación 5.37

$$\int_0^R dQ = \frac{(P_1 - P_2)\pi}{2\mu L} \int_0^R (R^2 - r^2) r\, dr \qquad 5.38$$

$$Q = -\frac{(P_1 - P_2)\pi}{4\mu L} \left[\frac{(R^2 - r^2)^2}{2} \right] \Bigg|_0^R \qquad 5.39$$

$$Q = \frac{(P_1 - P_2)R^4\pi}{8\mu L} \qquad 5.40$$

La ecuación 5.40 es conocida como ley de Hagen-Poiseville. Para encontrar la velocidad media del flujo, habría que dividir el gasto volumétrico por el área de la sección transversal.

$$V = \frac{Q}{A} \qquad 5.41$$

$$A = \pi R^2 \qquad 5.42$$

Si se sustituye la ecuación 5.40 y 5.42 en la 5.41

$$\bar{V} = \frac{\frac{(P_1 - P_2)\ R^4 \pi}{8\mu L}}{\pi R^2} \qquad 5.43$$

$$\bar{V} = \frac{(P_1 - P_2)\ R^2}{8\,\mu\,L} \qquad 5.44$$

$$V_{max} = 2\bar{V} \qquad 5.45$$

La ecuación 5.45 sólo es válida en flujo laminar. La ecuación para obtener f en flujo laminar, se deduce a partir de la ecuación de Hagen-Poiseville (ecuación 5.40).

Para conocer h_f en la Figura 5.7 sólo basta restar las cargas por presión (siempre que el conducto sea de diámetro constante y se encuentre en posición horizontal).

$$h_f = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} \qquad 5.46$$

Al despejar $P_1 - P_2$ de la ecuación 5.40

$$P_1 - P_2 = \frac{8\mu LQ}{\pi R^2} \qquad 5.47$$

Al dividir la ecuación 5.47 por γ en ambos lados de la igualdad

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{8\mu LQ}{\pi R^4 \gamma} \qquad 5.48$$

Si se sustituye la ecuación 5.46 en 5.48

$$h_f = \frac{8\mu LQ}{\pi R^4 \gamma}$$

La ecuación de continuidad el gasto es igual a la velocidad media del flujo por el área de la sección transversal del conducto.

$$Q = \frac{\bar{V}\pi d^2}{4} \qquad 5.50$$

$$R^4 = \frac{d^4}{16} \qquad 5.51$$

$$\gamma = \rho g \qquad 5.52$$

Al sustituir la ecuación 5.50, 5.51 y 5.52 en la ecuación 5.49

$$h_f = \frac{64\ \mu L\bar{V}}{d^2\ \rho 2g} \qquad 5.53$$

si se multiplica y a la vez se divide la ecuación 5.53 por $\bar{v}$,

$$h_f = \frac{64\ \mu L\bar{V}}{d^2\rho\bar{V}2g} \qquad 5.54$$

se igualan las ecuaciones 5.13 y 5.54

$$f\ \frac{L}{d}\ \ \frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{64\ \mu L\bar{V}^2}{d^2\rho\bar{V}2g} \qquad 5.55$$

$$f = \frac{64\mu}{d\rho\bar{V}} \qquad 5.56$$

$$f = \frac{64\nu}{d\bar{V}} \qquad 5.57$$

$$f = \frac{64}{R_e} \qquad 5.58$$

En régimen laminar f depende en forma exclusiva del número de Reynolds y no tiene nada que ver con la naturaleza de la pared

interna del conducto (si es liso o rugoso).

TEORIA DE LA CORRIENTE TURBULENTA

La corriente turbulenta tiene las siguientes características:

1. Pulsación de la velocidad y presión (Figura 5.8 a y b)
2. El esfuerzo cortante no sigue la ley de viscosidad de Newton ($\tau \neq -\mu dv/dr$).
3. El perfil de distribución de velocidades no es parabólico. (Figura 5.8 c)
4. Existe mezcla de líquido; el movimiento de las partículas que forman el líquido es desordenado (Figura 5.8d)

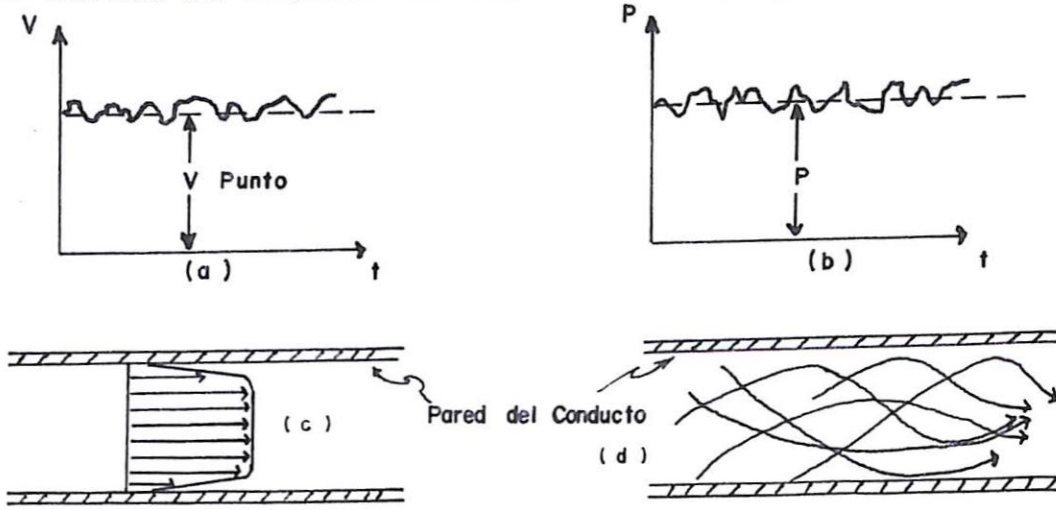


Fig. 5.8 Características del flujo turbulento. a) Pulsación de la velocidad. b) Pulsación de la presión. c) Perfil de distribución de velocidades. d) Carácter de las líneas de - corriente.

CONDUCTOS LISOS Y RUGOSOS

En la corriente turbulenta de un líquido, en la parte inmediata a las paredes del conducto, existe una capa muy fina de líquido,

en el cual el movimiento es más retardado y sin mezcla (régimen - laminar) llamada capa límite que tiene un espesor δ. Fue predicha por Prandtl (Figura 5.9).

El espesor de la capa laminar está en función del número de Reynolds, siendo más pequeño el espesor, para valores más elevados del número de Reynolds. La capa límite es un factor muy determi - nante en el momento de definir si un tubo es liso o rugoso, y a la vez la condición de la pared del conducto va a ser decisiva en la manera de calcular δ.

En realidad no existe una superficie absolutamente lisa; toda superficie al verse a través de un microscopio, muestra siem - pre cierta rugosidad, aún cuando nuestro tacto la palpa lisa. Pero se dice que un tubo es **hidráulicamente liso** cuando sus asperezas que caracterizan su rugosidad se encuentran dentro de la capa límite, siendo ε la altura de la protuberancia (Figura 5.10a).

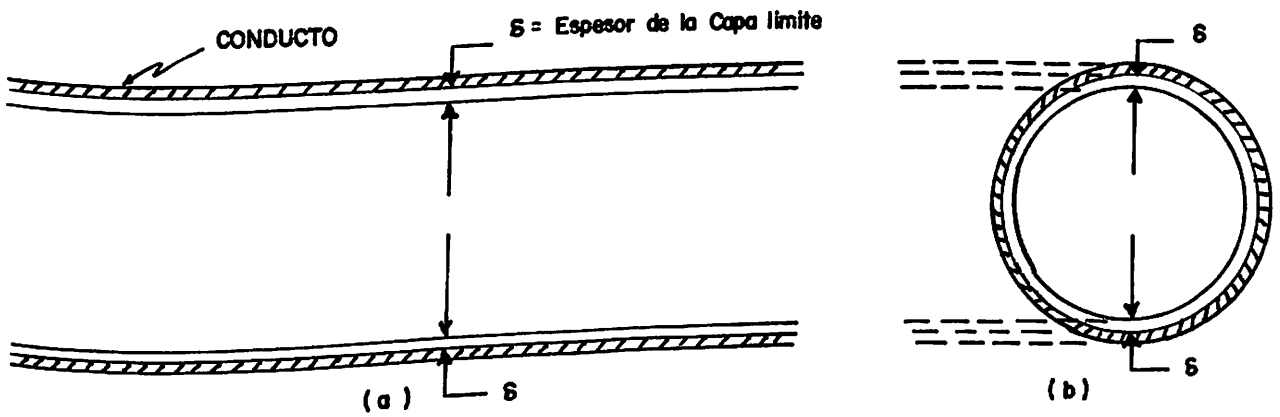


Fig. 5.9 Capa límite. a) Vista a lo largo del flujo. b) Vista de frente al flujo.



Fig. 5.10 Naturaleza de la pared del conducto. a) Superficie hidráuli camente lisa ($\delta > \varepsilon$). b) Superficie hidráulicamente rugosa ($\varepsilon > \delta$)

Cuando la superficie es **hidráulicamente rugosa**, las protube - rancias se proyectan en la zona turbulenta, provocando más mezcla - de líquido, dando como resultado una pérdida más elevada de ener - gía (Figura 5.10b).

Para tubos hidráulicamente lisos, en flujo turbulento se formuló una ecuación que es válida en un rango de 4 000 a 100 000 en número de Reynolds.

$$f = \frac{0.3164}{(R_e)^{\frac{1}{4}}} \qquad 5.59$$

Existe otra fórmula de Konakov de rango más amplio con respecto al número de Reynolds.

$$f = \frac{1}{(1.8 \log R_e - 1.5)^2} \qquad 5.60$$

Donde el rango es de 4 000 a varios millones.

Con respecto a tubos hidráulicamente rugosos, el coeficiente no depende de la dimensión absoluta de la protuberancia ε, sino de la rugosidad relativa (la dimensión ε relacionada con el diámetro de la tubería).

$$\text{Rugosidad relativa} = \frac{\varepsilon}{d} \qquad 5.61$$

En un conducto que tiene homogeneidad en las asperezas y se - comporta como un tubo hidráulicamente rugoso, la f está en función del número de Reynolds y la rugosidad relativa o solamente de la - rugosidad relativa.

EXPERIMENTO DE NIKURADSE

Nikuradse hizo experimentos sobre la resistencia de varios tubos con rugosidad artificial uniformemente distribuída. La rugosidad la obtuvo pegando granos de arena que fue pasada por tamices para lograr una rugosidad homogénea. En el experimento, la rugosidad relativa la varió de la siguiente forma: ε/d igual a 1/30, 1/61.2, 1/120, 1/151, 1/504, 1/1014; y el R_e lo varió de 500 a 1'000 000 (Figura 5.11).

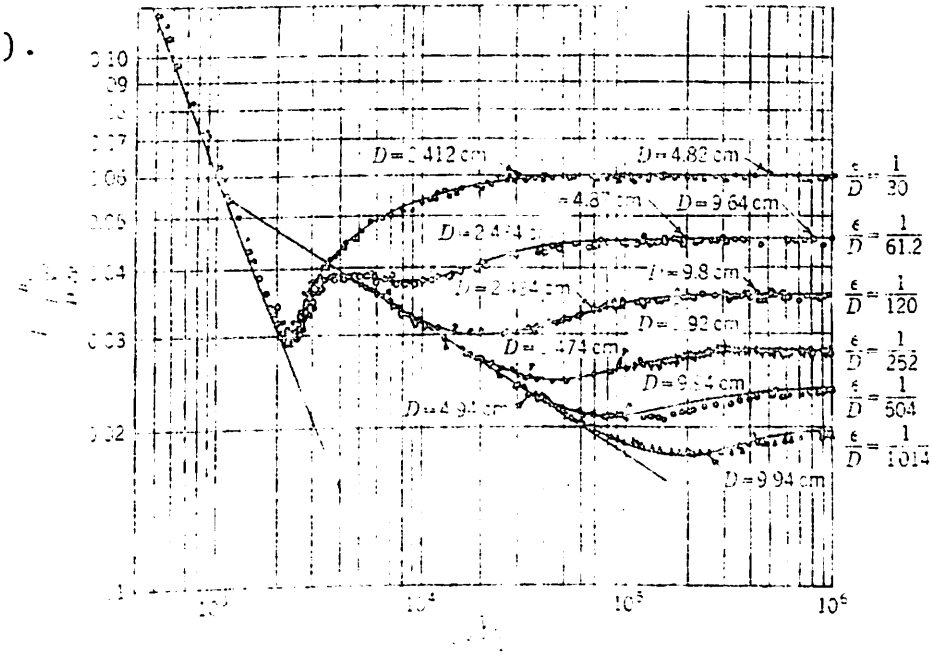


Fig. 5.11 Resultados del experimento de Nikuradse

La línea A corresponde a la fórmula de f en el régimen laminar ($f = 64/R_e$); la línea B corresponde a la ecuación de Blasius para tubos hidráulicamente lisos ($f = 0.3164/R_e^{\frac{1}{4}}$). Las líneas son rectas porque se han graficado en papel logarítmico.

OBSERVACIONES DE LA GRAFICA DE NIKURADSE

1° Todas las diferentes rugosidades coinciden con la línea recta en el régimen laminar, o sea f depende sólo del número de Reynolds

2° En el régimen turbulento para rugosidades relativas muy pequeñas y no muy grande el número de Reynolds, los puntos experimentales coinciden con la línea recta B, o sea, f depende también únicamente del número de Reynolds.

3° En el régimen turbulento para altas rugosidades relativas y no muy grande de número de Reynolds, los puntos experimentales se alejan de la línea recta B formando cada rugosidad relativa una curva, o sea que f depende en forma simultánea del número de Reynolds y la rugosidad relativa.

4° Para altos valores del Reynolds, las curvas que forman cada rugosidad relativa, se vuelven líneas rectas horizontales, o sea que f deja de estar en función del número de Reynolds y se vuelve constante a una rugosidad relativa.

CONCLUSIONES DE LA GRAFICA DE NIKURADSE

Aparte de la zona crítica obtenida por Reynolds; de todo lo observado en la gráfica de Nikuradse se puede concluir que existen cuatro zonas donde una de ellas pertenece al régimen laminar y las otras tres pertenecen al régimen turbulento y difiere una zona de la otra por el modo de obtener el coeficiente f.

CLASIFICACION DE LAS ZONAS

Zona del régimen laminar: la ecuación 5.58 se utiliza para calcular f, siempre que el R_e sea menor de 2 000

Zona crítica: la f queda indeterminada.

Zona de los tubos lisos: para obtener f se utilizan las ecuaciones 5.59 y 5.60 con sus rangos correspondientes, pero aparte se debe considerar que el $R_e < (1.56)(d/\varepsilon)^{8/7}$ para no caer arriba de esta zona.

Zona de transición: la ecuación para obtener f es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7\, d} + \left(\frac{6.81}{R_e} \right)^{0.9} \right] \qquad 5.62$$

La ecuación 5.62 es la ecuación de Frenkly y su rango de aplicación es de $1.56(d/\varepsilon)^{8/7} < R_e < (191/\sqrt{f})(d/\varepsilon)$.

Zona de completa turbulencia: cuando el $R_e \geq (191/\sqrt{f})(d/\varepsilon)$ se encuentra en la zona de completa turbulencia, y a la ecuación para obtener f es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 + 2 \log \frac{d}{2\varepsilon} \qquad 5.63$$

La ecuación 5.63 la obtuvo Nikuradse y lleva su nombre.

Colebrook presentó la siguiente fórmula empírica que se utiliza en cualquier zona del flujo turbulento.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.71\, d} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right) \qquad 5.64$$

Colebrook hizo algo similar al experimento de Nikuradse pero él trabajó con tubos comerciales. Moody preparó un diagrama que lleva su nombre, donde relaciona f, R_e y la ε/d.

A continuación, en la Tabla 5.1 se presentan rugosidades abso

lutas ε más conocidas en el comercio como además en la Figura 5.12 se ilustra el Diagrama de Moody.

Ejemplo 5.1 Determinar la pérdida de carga total (despreciando pérdidas locales) en una tubería de acero rolado nuevo, por la que fluyen 60 L.P.S. de agua a una temperatura de 20°C, siendo el diámetro de 8 pulgadas y la longitud de 1 000 m.

h_{TOT} = pérdidas por longitud + pérdidas locales

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

Datos que hay que obtener:

$$\nu_{20°C} = 1.007 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$$

$$\varepsilon = 0.05 \text{ mm}$$

$$d = 8" = 0.2032 \text{ m}$$

Utilizando la ecuación de continuidad:

$$Q = \bar{V}A$$

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(0.6 \text{ m}^3/\text{seg})}{(0.2032 \text{ m})^2} = 1.85 \text{ m/seg}$$

$$R_e = \frac{\bar{V}d}{\nu} = \frac{(1.85 \text{ m/seg})(0.02032 \text{ m})}{1.007 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{seg}} = 3.73 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.05 \text{ mm}}{203.2 \text{ mm}} = 0.000246$$

Utilizando el Diagrama de Moody:

$$f = 0.0165$$

$$h_f = (0.0165)\left(\frac{1\,000 \text{ m}}{0.2032 \text{ m}}\right) \frac{(1.85 \text{ m/seg})^2}{(19.62 \text{ m/seg}^2)} = 14.16 \text{ m}$$

TABLA 5.1 RUGOSIDADES ABSOLUTAS DE CONDUCTOS COMERCIALES.

Material	ε, en mm
Tubos lisos	
De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura; rubos de acero de precisión sin costura, serpentines industriales, plástico, hule	0.0015
Tubos industriales de latón.	0.025
Tubos de madera	0.2 a 1
Hierro forjado	0.05
Fierro fundido nuevo	0.25
Fierro fundido, con protección interior de asfalto	0.12
Fierro fundido oxidado	1 a 1.5
Fierro fundido, con incrustaciones	1.5 a 3
Fierro fundido, centrifugado	0.05
Fierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y - campana	0.15 a 0.
Fierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y - campana	2 a 3.
Fierro fundido para agua potable, con bastantes incrustaciones y diámetro de 50 a 125 mm.	1 a 4
Fierro galvanizado	0.15
Acero rolado, nuevo	0.05
Acero laminado, nuevo	0.04 a '
Acero laminado con protección interior de asfalto	0.05
Tubos de acero soldado de calidad normal	
Nuevo	0.05
Limpiado después de mucho uso	0.15
Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones	0.4
Con muchas incrustaciones	3
Con remaches transversales, en buen estado	0.1
Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente	0.3
Con líneas transversales de remaches, sencilla o doble; o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla, sin incrustaciones.	0.6
Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior sin oxidaciones, con criculación de agua turbia	1
Acero soldado, con doble hilera transversal de pernos, agua turbia, tuberías remachadas con doble costura - longitudinal de remaches y transversal sencilla, interior asfaltado o laqueado	1

Continuación de la TABLA 5.1

Material	ε, en mm
Acero soldado, con costura doble de remaches transversales, muy oxidado. Acero remachado, de cuatro a seis filas longitudinales de remaches, con mucho tiempo de servicio	2
Tubos remachados, con filas longitudinales y transversales	
a) Espesor de lámina < 5 mm.	0.65
b) Espesor de lámina de 5 a 12 mm	1.95
c) Espesor de lámina > 12 mm, o entre 6 y 12 mm, si las hileras de pernos tienen cubrejuntas	3
d) Espesor de lámina > 12 mm con cobrejuntas	5.5
Tubos remachados, con cuatro filas transversales y seis longitudinales con cubrejuntas interiores	4
Asbesto-cemento nuevo	0.025
Asbesto-cemento, con protección interior de asfalto	0.0015
Concreto centrifugado, nuevo	0.16
Concreto centrifugado, con protección bituminosa	0.0015 a 0.125
Concreto en galerías, colado con cimbra normal de madera	1 a 2
Concreto en galerías, colado con cimbra rugosa de madera	10
Concreto armado en tubos y galerías, con acabado interior cuidadosamente terminado a mano.	0.01
Concreto de acabado liso	0.025
Conductos de concreto armado, con acabado liso y varios años de servicio	0.2 a 0.3
Concreto alisado interiormente con cemento	0.25
Galerías con acabado interior de cemento	1.5 a 1.6
Concreto con acabado normal.	1 a 3
Concreto con acabado rugoso	10
Cemento liso	0.3 a 0.8
Cemento no pulido	1 a 2
Concreto presforzado Freyssinet	0.04
Concreto presforzado Bona y Socoman	0.25
Mampostería de piedra, bien junteada	1.2 a 2.5
Mampostería de piedra ruegosa, sin juntear	8, a 15
Mampostería de piedra, mal acabada	1.5 a 3

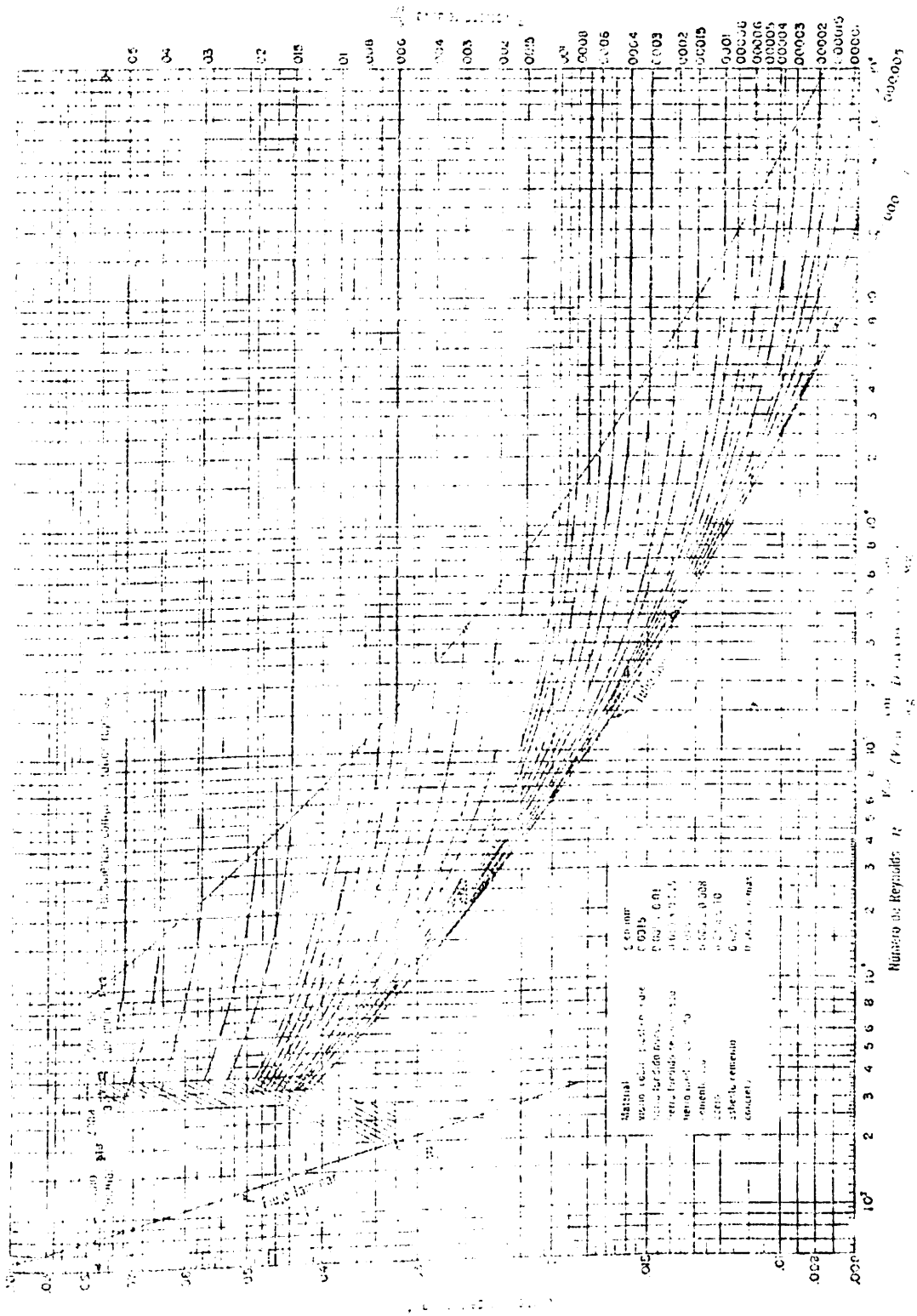
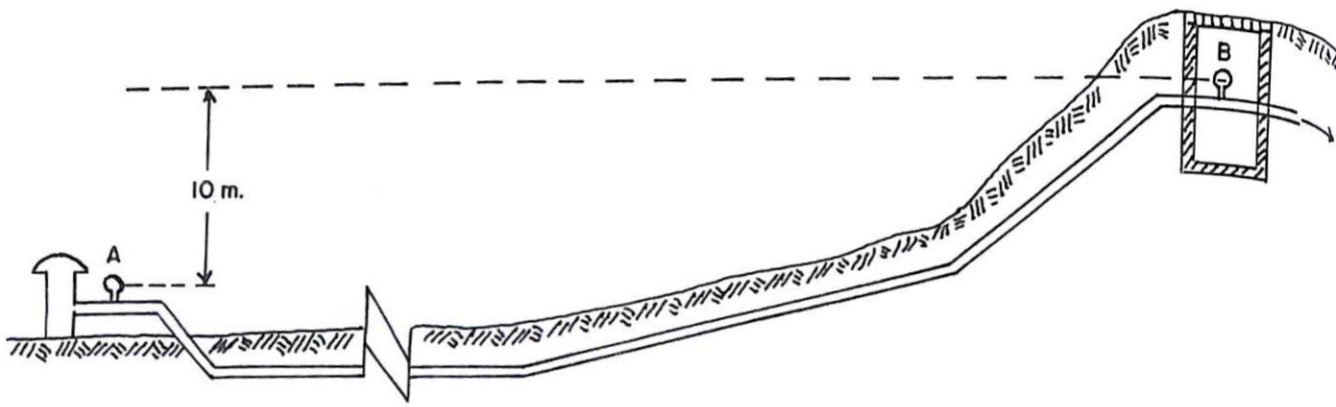


Fig. 5.12 Diagrama de Moody.

Ejemplo 5.2 A la salida de una bomba se encuentra un manómetro que marca una presión de 8.70 Kgf/cm^2, si la tubería es de asbesto-cemento nuevo y tiene un diámetro interior de 6 pulgadas: ¿Qué caudal de agua a 15°C llega a la unidad de riego por aspersión?. Si la presión poco antes de entrar a la unidad es de 4.5 Kgf/cm^2 y la longitud del conducto que se encuentra entre los dos manómetros es de 1 300 m. El segundo manómetro está situado 10 m por encima del primero.



Solución Datos que hay que obtener:

$$\nu_{15°C} = 1.142 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon = 0.025 \text{ mm}$$

$$d = 6" = 0.1524 \text{ m}$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli en el punto A y B

$$\frac{P_A}{\gamma} + Z_A + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + h_{TOT\ A-B}$$

Como la longitud del conducto es muy grande, se desprecian pérdidas locales.

$$\frac{P_A}{\gamma} + Z_A + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} + h_{f_{A-B}}$$

Situando el nivel de referencia de manera que pase por el punto A (donde se encuentra el primer manómetro), y sustituyendo todos los datos en la ecuación anterior:

$$\frac{87000\ Kgf/m^2}{1000\ Kgf/m^3} + 0 + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = \frac{45000\ Kgf/m^2}{2000\ Kgf/m^3} + 8.8\,m + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + h_{fA-B}$$

La $\bar{V}_A = \bar{V}_B$ porque el diámetro es constante, por lo que la ecuación anterior se convierte en:

$$h_{fA-B} = 87\ m - 45\ m - 8.8\ m = 33.2\ m$$

Utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach

$$h_{fA-B} = f\ \frac{L}{d}\ \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{f}}\ \sqrt{\frac{2gd\ h_{fA-B}}{L}}$$

Se puede observar en la ecuación anterior que existen dos incógnitas, que son $\bar{V}$ y f; y para poder obtener f se necesita el R_e y la $\frac{\varepsilon}{d}$, y para obtener el R_e se necesita la $\bar{V}$ por lo que el problema para poder solucionarlo, se tendrá que hacer a prueba y error.

Lo primero que se tiene que hacer es asumir una f.

Primera asunción: $f_1 = 0.015$

$$\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{0.015}}\ \sqrt{\frac{2(9.81\ m/seg^2)(0.1524\ m)(33.2\ m)}{1\ 300\ m}}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{0.015}\ (0.2763\ m/seg)$$

$$\bar{V} = 2.25\ m/seg$$

$$R_e = \frac{\bar{V}d}{} = \frac{(2.25\ m)(0.1524\ m)}{1.142 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 3.01 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.025\ mm}{152.4\ mm} = 0.000164$$

$f_{Moody} = 0.016$

La segunda asunción será la f que se obtenga en el Diagrama de Moody y así se hará sucesivamente hasta que la $f_n = f_{Moody}$ siendo n la última asunción.

Segunda asunción: $f = 0.016$

$$\bar{V} = \frac{1}{0.016} \quad (0.2763 \text{ m/seg})$$

$$\bar{V} = 2.18 \text{ m/seg}$$

$$R_e = \frac{\bar{V}d}{\nu} = \frac{(2.18 \text{ m/seg})(0.1524 \text{ m})}{1.142 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}} = 2.9 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = 0.000164$$

$f_{Moody} = 0.016$

La velocidad buscada será la de la última asunción

$$\bar{V} = 2.18 \text{ m/seg}$$

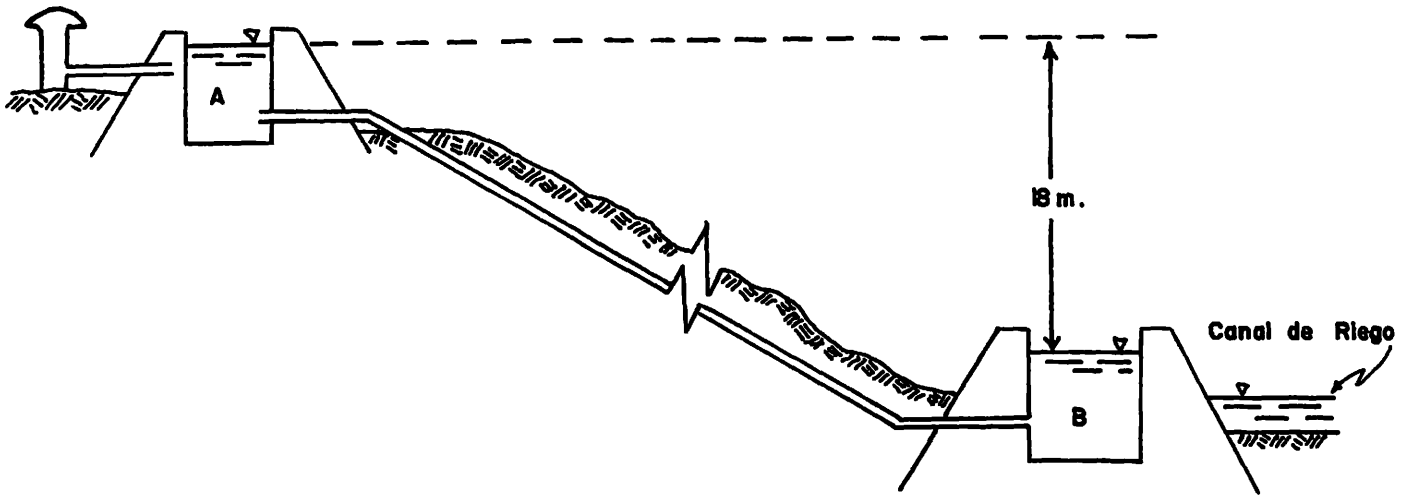
$$\bar{V} = \frac{\bar{V}\, d}{4} = \frac{(2.18 \text{ m/seg})\ (0.1524 \text{ m})}{4} = 0.0397 \text{ m /seg}$$

$Q = 39.7$ L.P.S.

Aproximadamente 39.7 L.P.S. entran a la unidad de riego por aspersión.

Ejemplo 5.3 El sistema mostrado en la figura, ilustra dos pilas que deben ser unidas por una tubería de P.V.C. hidráulica (tubo liso). El depósito A es alimentado por una bomba que da un gasto de 36 - L.P.S. El depósito B será destinado para el riego con el mismo gasto. La diferencia de nivel entre las superficies del agua - de los depósitos es de 19 m, la temperatura del líquido es de 20°C. Calcular el díametro del conducto que va a unir a las -

pilas, si la longitud es de 90 m.



Solución Datos que hay que obtener:

$$\nu_{20°C} = 1.007 \times 10^{-6} \ m^2/seg$$

$$\varepsilon = 0.0015 \ mm$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies de los depósitos A y B.

$$\frac{P_A}{\gamma} + Z_A + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + hTOT\ A\text{-}B$$

Como la longitud del conducto es larga, se desprecian pérdidas locales

$$\frac{P_A}{\gamma} + Z_A + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + h_{f_{A-B}}$$

Situando el nivel de referencia de manera que pase por la superficie del depósito B y sustituyendo todos los datos.

$$0 + 18\ m + 0 = 0 + 0 + 0 + h_{f_{A-B}}$$

$$h_{f_{A-B}} = 18\ m$$

Utilizando la ecuación de Darcy-Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\bar{V} = \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4}$$

$$h_{fA-B} = f \frac{L}{d^5} \frac{8Q^2}{\pi^2 g}$$

Despejando el diámetro de la ecuación anterior:

$$d = \sqrt[5]{f} \quad \sqrt[5]{\frac{8Q^2L}{\pi^2 g h_f}}$$

$$d = \sqrt[5]{f} \sqrt[5]{\frac{8(0.036\ m^3/seg)^2(900\ m)}{\pi^2 (9.81\ m/seg)(18\ m)}}$$

$$d = \sqrt[5]{f} \quad (0.3513\ m)$$

La ecuación anterior tiene dos incógnitas (d y f), por lo que se resolverá a prueba y error.

Asumiendo un valor cualquiera de f.

Primera asunción: $f_1 = 0.03$

$$d = \sqrt[5]{0.03} \quad (0.3513\ m)$$

$$d = 0.1742\ m$$

$$R_e = \frac{\bar{V}d}{\nu}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

$$R_e = \frac{1}{d} \left(\frac{4Q}{\pi \nu} \right)$$

$$R_e = \frac{1}{d} \frac{4(0.036\ m^3/seg)}{(1.007 \times 10^{-6}\ m^2/seg)}$$

$$R_e = \frac{4.55 \times 10^4 m}{d} = 2.61 \times 10^5$$

$$R_e = \frac{4.55 \times 10^4 mm}{0.1742\ mm} = 0.0000086$$

$$f_{Moody} = 0.0147 \neq f_1 = 0.03$$

Segunda asunción: $f_2 = 0.0147$

$d = 0.1511$ m

$R_e = 3.01 \times 10^5$

$\frac{\varepsilon}{d} = 0.00001$

$f_{Moody} = 0.0143 \neq f_2 = 0.0147$

Tercera asunción: $f_3 = 0.0143$

$d = 0.1502$ m

$R_e = 3.03 \times 10^5$

$\frac{\varepsilon}{d} = 0.00001$

$f_{Moody} = 0.0143 = f_3$

Por lo tanto, el diámetro es de 0.1502 m, siendo un diámetro teórico, pero ajustándonos a un diámetro comercial más próximo, sería uno de 6 pulgadas (0.1524 m). Como se puede observar, desde la segunda asunción pudo haberse tomado ese valor del diámetro (0.1511 m) por que también ajusta el cálculo el diámetro comercial.

PERDIDAS DE CARGA LOCALES

Al pasar el líquido por los accesorios de la tubería, su velocidad varía y las líneas de corriente se devuelven en contra del sentido general del flujo, surgiendo torbellinos que a su vez provocan una pérdida de energía brusca (Figura 5.13), a la que se le nombra pérdida local; recibe este nombre por estar localizada en un lugar específico del conducto.

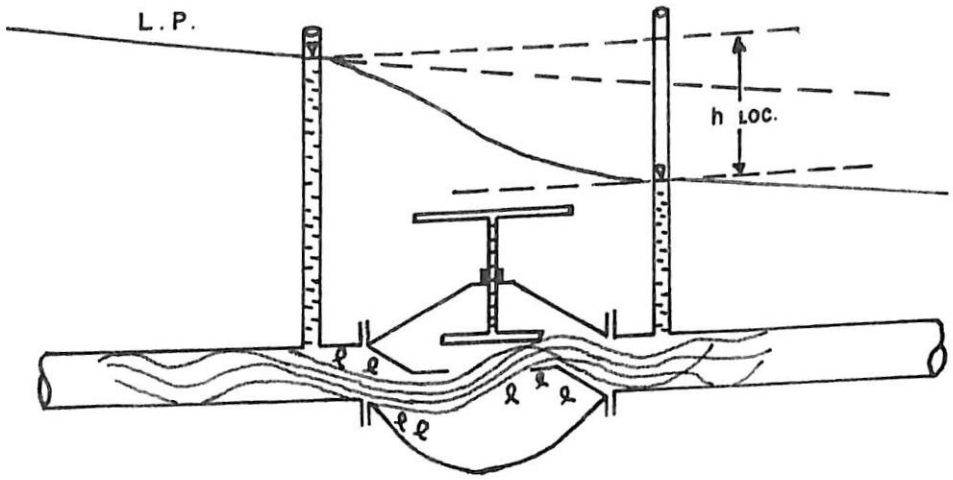


Fig. 5.13 Pérdida de carga local debido a una válvula

La pérdida local es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad.

$$h_{Loc} = K_{Loc} \frac{\bar{V}}{2g} \qquad 5.65$$

El coeficiente de pérdidad locales (K_{Loc}) en el flujo turbulento está en función casi de la geometría del accesorio que provoca la pérdida local, y varía muy poco al cambiar el número de *El coeficiente* K_{Loc} se determina experimentalmente y otras veces - se obtienen gráficas o fórmulas empíricas para determinarla

Las pérdidas locales más comunes se pueden agrupar como si - gue:

a. Ensanchamiento del conducto: brusco y gradual.

b. Contracción del conducto: brusco y gradual

c. Cambio de dirección del conducto: brusco y gradual

Los ejemplos más ordinarios del inciso a, serían accesorios que unen conductos de menor a mayor diámetro; los del inciso b se

rían accesorios que unen conductos de mayor a menor diámetro, medidores de gasto, válvulas, etc., y por último, entre los ejemplos del inciso c tendríamos codos, tes, etc.

En el caso del ensachamiento brusco del conducto, el coefi - ciente de pérdidas locales (K_{Loc}) se puede obtener en forma teórica con mucha exactitud para aplicarlo a hechos reales (Figura 5.14)

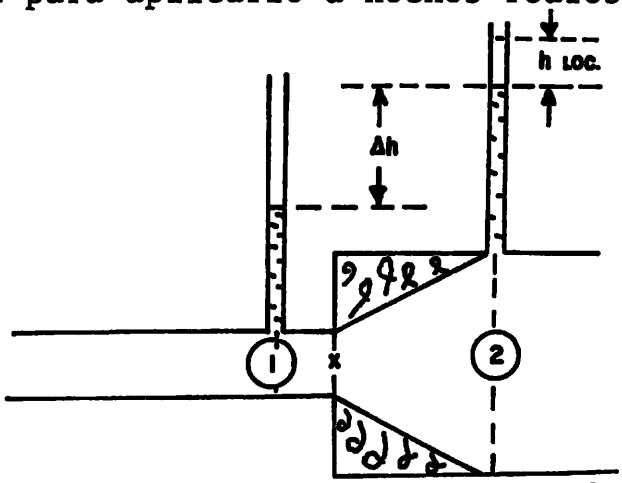


Fig. 5.14 Ensanchamiento brusco del conducto

Aún cuando el conducto se ensancha bruscamente, el flujo lo - hace gradualmente; y el espacio entre la pared del conducto y el - flujo se encuentra lleno de torbellino. Entre las secciones uno y dos del conducto, al irse ensanchando el flujo, la velocidad va - perdiéndose y la presión va aumentando, por eso el segundo piezómetro indica una altura Δh mayor que el primero, pero hubiese indicado una altura mas grande h_{Loc} en caso de que no existieran las pérdidas locales.

Aplicando la ecuación de Bernoulli en las secciones uno y dos de la Figura 5.14 y despreciando pérdidas por longitud:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h \text{ ens. brusco} \qquad 5.66$$

Se puede considerar que la presión en la sección uno es -

aproximadamente igual a la de la sección x

$$P_1 = P_x \qquad 5.67$$

Considerando que la presión en x actúa en toda la sección transversal del conducto en la sección dos, podemos obtener el impulso de las fuerzas de presión que origina el ensanchamiento brusco.

$$F = (P_x - P_2)A_2 \qquad 5.68$$

La variación de cantidad de este movimiento correspondiente a este impulso

$$F = \frac{Q\gamma}{g} (\bar{V}_1 - \bar{V}_2) \qquad 5.69$$

Al igualar las ecuaciones 5.68 y 5.69

$$(P_x - P_2)A_2 = \frac{Q\gamma}{g} (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \qquad 5.70$$

Si dividimos la ecuación 5.70 por γA_2, y tomamos en cuenta que $Q = A_2\bar{V}_2$

$$\frac{P_x - P_2}{\gamma} = \frac{\bar{V}_2}{g} (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \qquad 5.71$$

Se sustituye la ecuación 5.67 en 5.71

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{\bar{V}_2(\bar{V}_2 - \bar{V}_1)}{g} \qquad 5.72$$

Al despejar la diferencia de cargas de presión de la ecuación 5.67

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{\bar{V}_2^2 - \bar{V}_1^2}{2g} + h \text{ ens. brusco.} \qquad 5.73$$

Se igualan las ecuaciones 5.72 y 5.73

$$\frac{\bar{V}_2(\bar{V}_2 - \bar{V}_1)}{g} + \frac{\bar{V}_2^2 - \bar{V}_1^2}{2g} + h_{ens.\ brusco} \qquad 5.74$$

Despejando $h_{ens.\ brusco}$ en la ecuación 5.74

$$h_{ens.\ brusco} = \frac{\bar{V}_2\ (\bar{V}_2 - \bar{V}_1)}{g} + \frac{\bar{V}_1^2 - \bar{V}_2^2}{2g} \qquad 5.75$$

Reagrupando términos en la ecuación 5.75

$$h_{ens.\ brusco} = \frac{\bar{V}_1^2 - 2\bar{V}_1\bar{V}_2 + 2\bar{V}_2^2 - \bar{V}_2^2}{2g}$$

$$h_{ens.\ brusco} = \frac{\bar{V}_1^2 - 2\bar{V}_1^2\bar{V}_2^2 + \bar{V}_2^2}{2g} \qquad 5.76$$

La ecuación 5.76 se puede presentar de la siguiente manera:

$$h_{ens.\ brusco} = \frac{(\bar{V}_1 - \bar{V}_2)^2}{2g} \qquad 5.77$$

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad

$$A_1V_1 = A_2\bar{V}_2$$

$$V_2 = \frac{V_1\ A_1}{A_2} \qquad 5.79$$

Sustituyendo la ecuación 5.79 en 5.77 y reagrupando los términos

$$h_{ens.\ brusco} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) \frac{\bar{V}_2^1}{2g} \qquad 5.80$$

Donde

$$k_{ens.\ brusco} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \qquad 5.81$$

En el caso particular de la unión entre el conducto y depósito, tomando como sección 1 poco antes de que el flujo salga del conducto y como sección 2 cuando el flujo entra al depósito, el A_2 es mucho mayor que el A_1 por lo tanto, la pérdida por ensanchamien

to brusco se transforma en pérdida por salida.

$$h_{sal} = (1 - \frac{A_1}{A_2})^2 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} \qquad 5.82$$

En la ecuación 5.82 la k_{sal} se transforma en uno

$$h_{sal} = \frac{\bar{V}_1^2}{2g} \qquad 5.83$$

En la contracción brusca, la pérdida de energía siempre es menor que en el ensanchamiento brusco, debido a que aumenta la velocidad, y esto reduce el número de líneas de corriente que se devuelvan en contra del sentido del flujo, o sea que existe un menor torbellinaje.

Por lo tanto, la pérdida local por contracción brusca será:

$$h_{cont.\ brusca} = K_{cont.\ brusca} \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \qquad 5.84$$

La $K_{cont.\ brusca}$ depende del grado de contracción del cauce, o sea, que está en función de d_1/d_2 (Tabla 5.3).

Cuando el conducto se ensancha gradualmente, a medida que aumenta el diámetro, el flujo va perdiendo velocidad y ganando presión. Las capas del líquido que están próximas a la pared tienen una velocidad tan pequeña que el continuo aumento del diámetro y de la presión las van frenando paulatinamente hasta que el flujo de esas capas se invierte, provocando torbellinos (Figura 5.15).

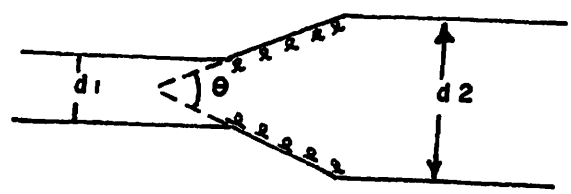


Fig. 5.15 Ensanchamiento gradual del conducto

$$h_{\text{ens. brusco}} = K_{\text{ens. gradual}} \frac{(\bar{V}_1 - \bar{V}_2)^2}{2g} \qquad 5.85$$

La $K_{\text{ens. brusco}}$ está en función del ángulo θ y de d_1 / d_2.

En el paso del líquido en un cauce que se contrae gradualmente, la velocidad va en aumento mientras que la presión va disminuyendo, y debido a esta condición, no surgen torbellinos durante la contracción del cauce, sino un poco después. Esta pérdida local es menor comparada con la pérdida local por ensanchamiento gradual.

La pérdida local en codos tiene origen en la variación de la distribución de velocidades en la cual surge un aumento de esfuerzos cortantes, como además en la variación continua de la dirección del flujo. En un codo, la pérdida local está en función del ángulo de desviación del flujo θ y del radio relativo de la curvatura $\frac{R}{d}$ como se ilustra en la Figura 5.16

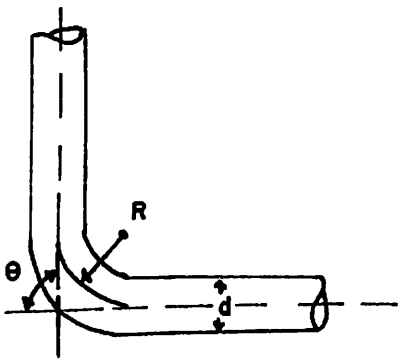


Fig. 5.16 Codo

La pérdida local por codos es:

$$h_{\text{codo}} = K_{\text{codo}} \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 5.86$$

Donde la K_{codo} se puede evaluar con la fórmula empírica del científico soviético G. Ambramóvich, el cual propuso la siguiente expresión para codos de sección circular con un ángulo $\theta = 90°$ y $R/d \geq 1$:

$$K_{codo} = 0.051 + 0.19 \left(\frac{d}{R}\right) \qquad 5.87$$

Para ángulos de $\theta \leq 70°$:

$$K_{codo} = \left[0.051 + 0.19 \left(\frac{d}{R}\right)\right] 0.9 \, Sen\theta \qquad 5.88$$

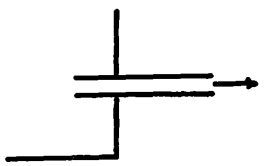
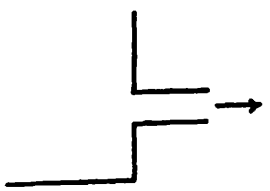
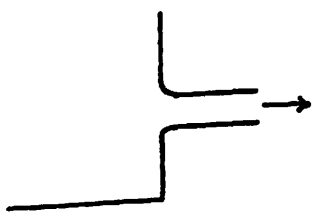
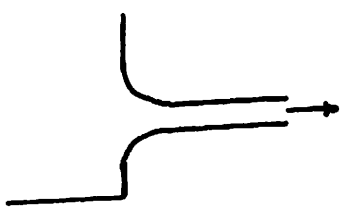
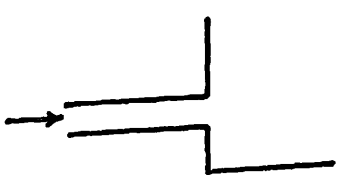
y para ángulos de $\theta \geq 100°$

$$K_{codo} = \left[0.051 + 0.19 \left(\frac{d}{R}\right)\right]\left(0.7 + \frac{0.35\,\theta}{95°}\right) \qquad 5.89$$

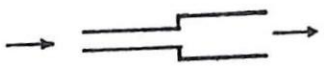
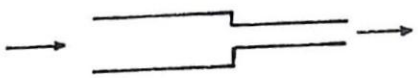
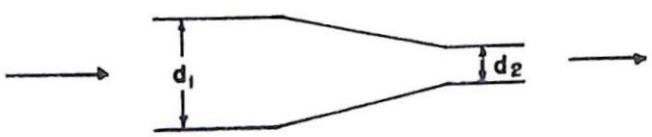
Hay que tomar en cuenta que las fórmulas anteriores solamente cuantifican la pérdida local en uno de los codos y en el caso de que sean codos de radio grande, habrá que incluir la pérdida por longitud del codo.

En la Tabla 5.2 se presenta un resumen general de pérdidas locales más comunes que se pueden presentar en sistemas de conducción.

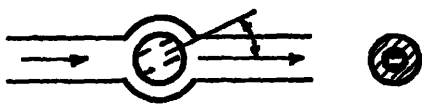
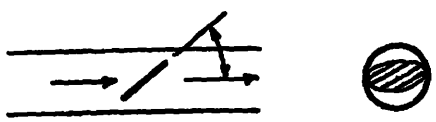
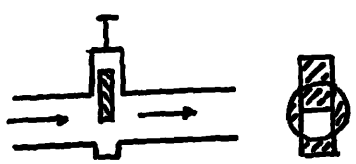
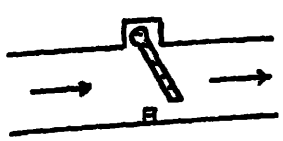
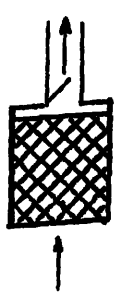
TABLA 5.2 COEFICIENTE DE PERDIDA LOCAL APROXIMADO (Kloc). (EL SUBINDICE 1 INDICA LA VELOCIDAD ANTES DE LLEGAR AL ACCESORIO Y EL SUBINDICE 2 INDICA CUANDO ES DESPUES).

TIPO DE ACCESORIO	PERDIDA LOCAL PROMEDIO
A.- De depósito a conducto 	$1.0 \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$
Tubo re-entrante 	$0.5 \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$
Arista en ángulo recto. 	$0.23 \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$
Arista ligeramente abocinada 	$0.05 \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$
Arista abocinada	
B.- De conducto a depósito 	$1.0 \frac{\bar{V}_1^2}{2g}$

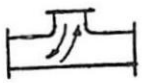
Continuación de la TABLA 5.2

TIPO DE ACCESORIO	PERDIDA LOCAL PROMEDIO
C.- Ensanchamiento brusco 	$1.0 \frac{(\bar{V}1 - \bar{V}2)^2}{2g}$
D.- Contracción brusca (ver TABLA 5.3) 	$K_{C.B.} \frac{\bar{V}2^2}{2g}$
E.- Ensanchamiento gradual (ver TABLA 5.4) 	$K_{E.G.} \frac{(\bar{V}1 - \bar{V}2)^2}{2g}$
F.- Contracción gradual $\Theta \geq 30°$, se le considera reducción brusca. $\Theta \leq 30°$, no existe pérdida por reducción. 	
G.- Válvulas 1.- Válvula esférica (totalmente abierta)	

Continuación de la TABLA 5.2

TIPO DE ACCESORIO	PERDIDA LOCAL PROMEDIO
	$0.02 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
2.- Válvula mariposa (totalmente abierta) 	$0.12 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
3.- Válvula de compuerta (totalmente abierta) 	$0.19 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
4.- Válvula de retención (check) 	$2.0 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
5.- Válvula de pie con pichancha 	$1.6 \frac{\bar{V}^2}{2g}$

Continuación de la TABLA 5.2

TIPO DE ACCESORIO	PERDIDA LOCAL PROMEDIO
H.- Codos	
1.- Codos de 90° normal 	$0.9 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
2.- Codo de 90° de radio medio 	$0.75 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
3.- Codo de 90° de radio grande 	$0.6 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
4.- Codo de 45° 	$0.4 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
I.- Tes.	
1.- Te normal 	$1.8 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
	$0.1 \frac{\bar{V}^2}{2g}$

Continuación de la TABLA 5.2

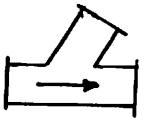
TIPO DE ACCESORIO	PERDIDA LOCAL PROMEDIO
2.- Te en 45° 	$1.0 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
	$0.5 \frac{\bar{V}^2}{2g}$
	$0.15 \frac{\bar{V}^2}{2g}$

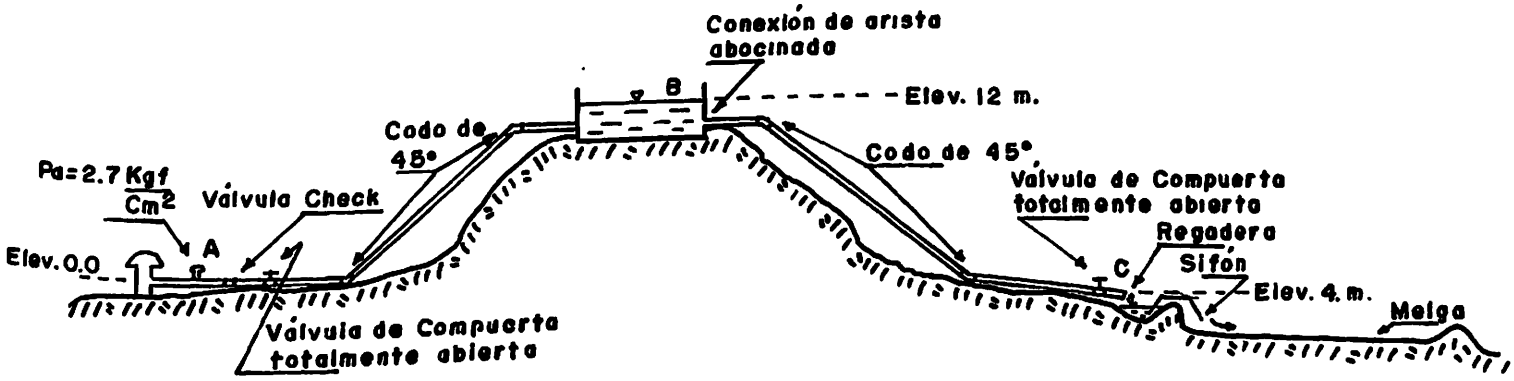
TABLA 5.3 CONTRACCION BRUSCA

d1/d2	K C.B.
1.2	0.08
1.4	0.17
1.6	0.26
1.8	0.34
2.0	0.37
2.5	0.41
3.0	0.43
4.0	0.45
5.0	0.46

TABLA 5.4 ENSANCHAMIENTO GRADUAL PARA DIFERENTES ANGULOS DE Θ

d1/d2	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
0.83	0.02	0.04	0.09	0.16	0.25	0.35	0.37
0.71	0.03	0.06	0.12	0.23	0.36	0.50	0.53
0.62	0.03	0.07	0.14	0.26	0.42	0.57	0.61
0.55	0.04	0.07	0.15	0.28	0.44	0.61	0.65
0.50	0.04	0.07	0.16	0.29	0.46	0.63	0.68
0.45	0.04	0.08	0.16	0.30	0.48	0.65	0.70
0.33	0.04	0.08	0.16	0.31	0.48	0.66	0.71
0.25	0.04	0.08	0.16	0.31	0.49	0.67	0.72
0.20	0.04	0.08	0.16	0.31	0.50	0.67	0.72

Ejemplo 5.4 Una bomba alimenta a un depósito mediante una tubería de 6 pulgadas de diámetro y 40 metros de longitud (del manómetro al depósito), y a la vez el depósito suministra agua a una regadera (para posteriormente efectuar un riego a unas melgas) mediante otro conducto que tiene una longitud de 80 metros. ¿Qué diámetro debe tener el conducto para que permanezca en estado estable todo el sistema de conducción, se se consideran pérdidas locales?. Los dos conductos son de fierro fundido nuevo y el agua tiene una temperatura de 20°C.



Solución Datos que hay que obtener:

ν 20°C = 1.007×10^{-6} m^2/seg

ε = 0.25 mm

K val.check = 2.0

K val. comp. = 0.19

K codo = 45° = 0.4

K abocinada = 0.05

K salida = 1.0

6" = 0.1524 m

Para que el sistema se encuentre en estado estable, el nivel -

del depósito debe permanecer constante, o sea que el gasto del primer conducto sea igual al del segundo. Por lo tanto, lo primero que se tiene que hacer es encontrar el gasto del primer conducto, para ello hay que aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B, poniendo el nivel de referencia en la elevación cero.

$$\frac{P_A}{\gamma} + Z_A + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} + h_{TOTA-B}$$

$$\frac{27\,000\ Kg_f/m^2}{1\,000\ Kg_f/m^3} + 0 + \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = 0 + 12m + 0 + h_{TOTA-B}$$

$$h_{TOTA-B} - \frac{\bar{V}_A^2}{2g} = 15m$$

$$h_{TOTA-B} = f_1\frac{L_1}{2g}\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + K_{check}\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + K_{comp}\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + K_{codo\ 45°}\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + K_{sal}\frac{\bar{V}_1^2}{2g}$$

$$h_{TOTA-B} = \left(f_1\frac{L_1}{d_1} + K_{check} + K_{comp.} + K_{codo\ 45°} + K_{sal}\right)\frac{\bar{V}_1^2}{2g}$$

Como la $\bar{V}_1$ es la velocidad media del primer conducto, por lo tanto es igual a la $\bar{V}_A$ por ser el diámetro constante. Sustituyendo la última ecuación en la antepenúltima y factorizando.

$$\left(f_1\frac{L_1}{d_1} + K_{check} + K_{comp} + 2K_{codo\ 45°} + K_{sal} - 1\right)\frac{\bar{V}_1^2}{2g} = 15\ m$$

Sustituyendo los datos conocidos en la ecuación anterior

$$\left(f_1\frac{40\ m}{0.1524\ m} + 2 + 0.19 + 2(0.4) + 1 - 1\right)\frac{\bar{V}_1^2}{2g} = 15\ m$$

$$(262.47\ f_1 + 2.99)\frac{\bar{V}_1^2}{2g} = 51\ m$$

$$\bar{V}_1 = \sqrt{\frac{2g\ (15\ m)}{262.47\ f_1 + 2.99}} = \sqrt{\frac{294.3\ m^2/seg^2}{262.47\ f_1 + 2.99}}$$

Como se tienen dos incógnitas en la ecuación anterior ($\bar{V}_1$ y f_1) que están relacionadas, hay que solucionarlo a prueba y error.

Primera asunción: $f_{1_{1ª}} = 0.04$

$$\bar{V}_1 = \sqrt{\frac{294.3\ m^2/seg^2}{262.47(0.04) + 2.99}}$$

$$\bar{V}_1 = 4.67\ m/seg$$

$$R_{e_1} = \frac{\bar{V}_1\ d_1}{} = \frac{(4.67\ m/seg)(0.01524\ m)}{1.007 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 7.1 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d_1} = \frac{0.25\ mm}{152.4\ m} = 0.00164$$

$$f_{Moody} = 0.022 \neq f_{1a}$$

Segunda asunción $f_{1_2a} = 0.022$

$$\bar{V}_1 = 5.79\ m/seg$$

$$R_{e_1} = 8.7 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = 0.00164$$

$$f_{Moody} = 0.022 = f_{1_2a}$$

La $\bar{V}_1 = 10.68$ m/seg es la velocidad real del primer tramo, por lo tanto, el gasto será:

$$Q = \frac{V_1 \pi d_1}{4} = \frac{(5.79\ m/seg)\pi(0.1524\ m)^2}{4} = 0.0156\ m^3/seg$$

$$Q = 105.6\ L.P.S.$$

Para conocer el diámetro del segundo conducto hay que aplicar - la ecuación de Bernoulli entre los puntos B y C; siendo el gasto del segundo conducto igual a 105.6 L.P.S.

$$\frac{P_B}{\gamma} + Z_B + \frac{\bar{V}_B^2}{2g} = \frac{P_C}{\gamma} + Z_C + \frac{\bar{V}_C^2}{2g} + h_{TOTA-B}$$

$$0 + 12\ m + 0 = 0 + 4m + \frac{\bar{V}_C^2}{2g} + h_{TOTA-B}$$

$$\frac{\bar{V}_C^2}{2g} + h_{TOTA-B} = 8\ m$$

Tomando en cuenta de que en descarga libre no existen pérdidas

por salida

$$h_{TOTA-B} = \left(f_2\frac{L_2}{d_2} + K_{ent} + 2K_{codo\ 45°} + K_{comp}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

Como la V es la velocidad media del segundo conducto, entonces será igual a la V_c. Sustituyendo la última ecuación en la pe - núltima y factorizando.

$$\left(1 + f\frac{L}{d} + K_{ent} + 2K_{codo\ 45°} + K_{comp}\right)\frac{V}{2g} = 8m$$

Sustituyendo los datos conocidos en la ecuación anterior:

$$\left(1 + f_2\frac{80m}{d_2} + 0.05 + 0.8 + 0.19\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2g} = 8\ m$$

$$\left(f_2\frac{80m}{d_2} + 2.04\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2g} = 8\ m$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{\frac{2g\ (8m)}{f_2\frac{80m}{d_2} + 2.04}} = \sqrt{\frac{156.96\ m^2/seg^2}{f_2\frac{80m}{d_2} + 2.04}}$$

El diámetro de la última ecuación no se puede despejar, por lo que se auxiliará con la ecuación de continuidad para poder so - lucionar el problema a prueba y error.

$$\bar{V}_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(0.1056\ m^3/seg)}{\pi d_2^2} = \frac{0.1344\ m^3/seg}{d_2^2}$$

Lo primero que se tiene que hacer, es asumir un diámetro

Primera asunción: $d_{2_{1a}} = 0.1524$ m

$$\bar{V}_2 = \frac{0.1344\ m^3/seg}{(0.1524\ m)^2} = 5.79\ m/seg$$

$$R_{e_2} = \frac{(5.79\ m/seg)(0.1524\ m)}{1.007 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 8.7 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\varepsilon}{d_2} = \frac{0.25\ mm}{152.4\ mm} = 0.00164$$

$$f_2 = 0.022$$

$$V = \sqrt{\frac{156.96\ m^2/seg^2}{0.022\ (\frac{80\ m}{0.1524}) + 2.04}}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi \bar{V}_2}} = \frac{0.366\ m^{\frac{3}{2}} / seg^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\bar{V}_2}} = \frac{0.366\ m^{\frac{3}{2}} / seg^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3.4\ m/seg}}$$

$$d_2 = 0.1988\ m \neq 0.1524\ m$$

Como no coincidieron los diámetros, se tomará este último diámetro como segunda asunción.

Segunda asunción: $d_{2_{2a}} = 0.1988\ m$

$$\bar{V}_2 = \frac{0.1344\ m^3/seg}{(0.1988\ m)^2} = 3.4\ m/seg$$

$$R_{e_2} = \frac{(3.4\ m/seg)(0.1988\ m)}{10.007 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 6.7 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d_2} = \frac{0.25\ mm}{198.8\ mm} = 0.00126$$

$$f_2 = 0.021$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{\frac{156.96\ m^2/seg^2}{(0.021)(\frac{80\ m}{0.1988\ m}) + 2.04}}$$

$$\bar{V}_2 = 3.87\ m/seg$$

$$d_2 = \frac{0.366\ m^{\frac{3}{2}} / seg^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3.87\ m/seg}} = 0.1864$$

$$d_2 = 0.1864 \neq 0.1988\ m$$

Tercera asunción: $d_3 = 0.1864\ m$

$$\bar{V}_2 = \frac{0.1344\ m^3/seg}{(0.1864\ m)^2} = 3.87\ m/seg$$

$$R_{e_2} = \frac{(3.87)(0.1864\ m)}{1.007 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 7.2 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d_2} = \frac{0.25\ mm}{186.4\ mm} = 0.00134$$

$$f_2 = 0.021$$

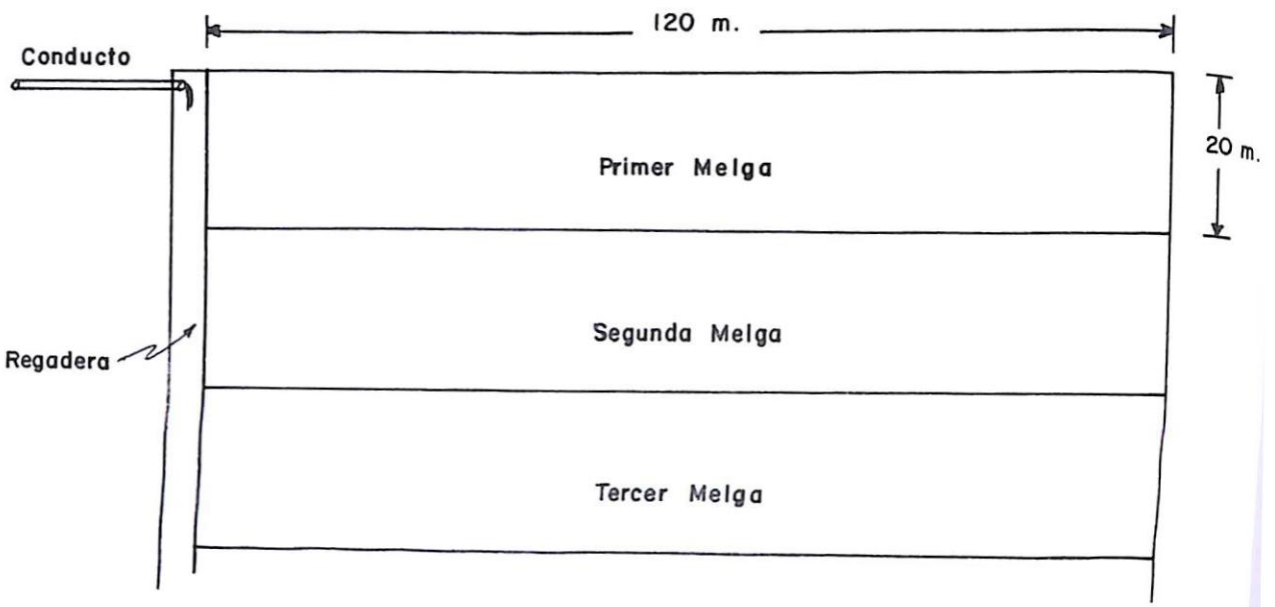
$$\bar{V}_2 = \sqrt{\frac{156.96\ m^2/seg}{(0.021)\left(\frac{80\ m}{0.1864\ m}\right) + 2.04}}$$

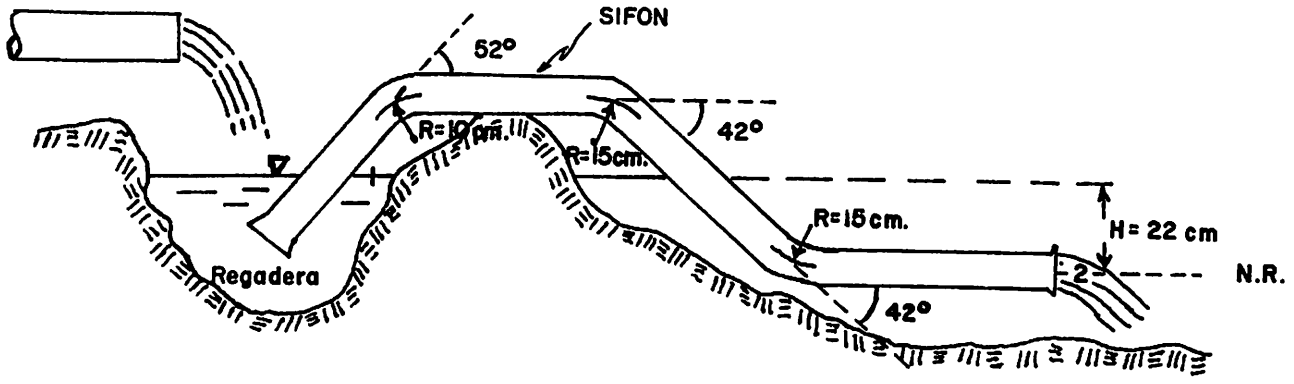
$$d_2 = \frac{0.366\ m^{\frac{3}{2}}/seg^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3.77\ m/seg}} = 0.1888\ m$$

$$d_2 = 0.1888\ m \cong 0.186$$

Por lo tanto, el diámetro teórico será 18.88 cm; si los diámetros comerciales son de r", 6", 8", etc., el que más se ajusta es el de 8" (20.32 cm), por lo que se tendrá que cerrar un poco la válvula de compuerta del segundo conducto, al estar instalado el diámetro comercial para que nos de el gasto de 105.6 L.P.S. y operar en estado estable todo el sistema.

Ejemplo 5.3 Si en el problema del ejemplo 5.4, se va a aplicar una lámina de 15 cm a cada melga y se van a regar 3 melgas a la vez, ¿Cuántos sifones hay que utilizar en cada melga y cuál será el tiempo de riego? (asumiendo que todos los sifones funcionen al mismo tiempo), de manera que los sifones tiendan a trabajar en estado estable. Los sifones son de aluminio ($\varepsilon = 0.0015$) y tienen una longitud total de 3.7 m; en la figura se ilustran las demás especificaciones.





Solución Lo primero que se debe obtener es el gasto del sifón (Q_S) y para ello hay que aplicar la ecuación de Bernoulli en la superficie libre del agua en la regadera y en la salida del sifón. El nivel de referencia estará en la boca del sifón por donde sale el agua.

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{TOT_{1-2}}$$

$$0 + H + 0 = 0 + 0 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{TOT_{1-2}}$$

$$h_{TOT_{1-2}} = \left(f\frac{L}{d} + K_{ent} + K_{codo\ 52°} + 2K_{codo\ 42°}\right)\frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

Siendo $\bar{V}$ la velocidad media del sifón que es igual a $\bar{V}_2$ por tener diámetro constante

Sustituyendo la última ecuación en la penúltima y factorizando la velocidad.

$$H = \left(1 + f\frac{L}{d} + K_{ent} + K_{codo\ 52°} + 2K_{codo\ 42°}\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{2gH}{1 + f\frac{L}{d} + K_{ent} + K_{codo\ 52°} + 2K_{codo\ 42°}}}$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{1}{1 + f\frac{L}{d} + K_{ent} + K_{codo\ 52°} + 2K_{codo\ 42°}}}\ \sqrt{2gH}$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{1 + f\frac{L}{d} + K_{ent} + K_{codo\ 52°} + 2K_{codo\ 42°}}}$$

$$\bar{V} = C\ \sqrt{2gH}$$

$$Q_s = CA\ \sqrt{2gH}$$

A = Area de la sección transversal del sifón

Se va a utilizar la fórmula de Ambramovich para calcular las K por curvatura o codo.

Para $\theta = 52°$

$$\frac{R}{d} = \frac{0.01\ m}{0.0508\ m} = 1.968$$

1.968 > 1 y 52° < 70°, por lo que se utilizará la siguiente fórmula:

$$K_{codo\ 52°} = [0.051 + 0.19(1.968)](0.9)(Sen\ 52°)$$

$$K_{codo\ 52°} = 0.301$$

Para $\theta = 42°$

$$\frac{R}{d} = \frac{0.15\ m}{0.0508\ m} = 2.953$$

2.953 > 1 y 42° < 70°

$$K_{codo\ 42°} = [0.051 + 0.19(2.953)](0.9)(Sen\ 42°)$$

$$K_{codo\ 42°} = 0.369$$

$$K_{ent} = K_{arista\ ligeramente\ abocinada} = 0.23$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{1}{1 + f\frac{3.7\ m}{0.0508\ m} + 0.23 + 0.301 + 0.369}}\ \sqrt{2\left(9.81\frac{m}{seg^2}\right)(0.22m)}$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{1}{72.935\,f + 2.269}} \quad \sqrt{2.077\ m/seg}$$

Primera asunción: $f_1a = 0.02$

$\bar{V} = 1.076$

$$R_e = \frac{\bar{V}\,d}{\nu_{20°C}} = \frac{(1.076\ m/seg)(0.0508\ m)}{1.007 \times 10^{-6}} = 5.4 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.0015\ mm}{50.8\ mm} = 0.00004$$

$f_{Moody} = 0.021 = f_2a$

Por lo tanto, la velocidad media real del sifón a esa carga es:

$\bar{V} = 1.07\ m/seg$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{(0.0508\ m)^2}{4} = 0.002\ m^2$$

$$Q_s = VA = (1.07\ m/seg)(0.002\ m^2) = 0.00214\ m^3/seg$$

$Q_s = 2.15$ L.P.S.

Para conocer el número de sifones que se utilizarán en las tres melgas N, hay que dividir el gasto que entra en la regadera Q_r por el gasto del sifón Q_s

$$N = \frac{Q_r}{Q_s} = \frac{105.6\ L.P.S.}{2.14\ L.P.S.} = 49.34 \text{ sifones} \cong 49 \text{ sifones}$$

Si la regadera está revestida para evitar la infiltración del - agua, los sifones se reparten en las tres melgas de la siguiente manera: en la primera 17 sifones, en la segunda y tercera 16.

El volumen que hay que suministrar en cada melga V_m es el siguiente:

V_m = (Largo) (Ancho) (Lámina) = (120 m) (20 m) (0.15 m)

El tiempo de riego T_r de la melga se obtiene dividiendo el volumen total de la melga por el gasto total que entra a la melga Q_m

$$T_r = \frac{V_m}{Q_m}$$

El tiempo de riego de la primera melga será:

$$Q_m = 17(Q_s) = 17(2.14 \text{ LPS}) = 36.38 \text{ LPS} = 0.03638 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$T_r = \frac{360 \text{ m}^3}{0.03638 \text{ m}^3/\text{seg}} = 9895 \text{ segundos}$$

T_r = 2 horas 45 minutos

El tiempo de riego de la segunda y tercera melga será:

$$Q_m = 16(Q_s) = 16(2.14 \text{ LPS}) = 34.24 \text{ LPS} = 0.03424 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$T_r = \frac{360 \text{ m}^3}{0.03424 \text{ m}^3/\text{seg}} = 10\,514 \text{ segundos}$$

T_r = 2 horas 55 minutos

La segunda y tercera melga tardarán 10 minutos más que la primera en realizar el riego.

FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS

En 1903, el ingeniero civil y sanitario Allen Hazen y el profesor de Hidr=aulica Gardner W. Williams (ambos de nacionalidad - norteamericana), propusieron una fórmula irracional después de haberse basado en muchos datos obtenidos por ellos y otros investigadores. La fórmula puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\bar{V} = 0.8494 \, C \, R_h^{0.63} \, S^{0.54} \qquad 5.90$$

Donde:

$\bar{V}$ = velocidad media del conducto (m/seg)

C = coeficiente de Hazen-Williams (depende casi exclusivamente de la naturaleza de las paredes del conducto)

R_h = radio hidráulico (m)

S = pendiente hidráulica o pendiente de la línea piezométrica

$$R_h = \frac{A}{P_m} \qquad 5.91$$

Donde:

A = área de la sección transversal por donde pasa el flujo

P_m = perímetro mojado del área

$$S = \frac{h_f}{L} \qquad 5.92$$

Donde:

h_f = pérdida por longitud

L = longitud del conducto que corresponde a esa pérdida.

Para conductos cilíndricos se tiene que:

$$R_h = \frac{d}{4} \qquad 5.93$$

Si sustituimos la ecuación 5.93 en 5.90, obtenemos:

$$\bar{V} = 0.3547\ C\ d^{0.63}\ S^{0.54} \qquad 5.94$$

Otra manera de expresar la ecuación 5.94 es:

$$Q = 0.2788\ C\ d^{2.63}\ S^{0.54} \qquad 5.95$$

Donde el gasto tiene como unidades m^3/seg

TABLA 5.5 COEFICIENTE DE HAZEN-WILLIAMS

MATERIAL DEL CONDUCTO	C
Acero corrugado	60
Acero con uniones Lock-bar (nuevo)	130
Acero galvanizado (nuevo y usado)	125
Acero remachado (nuevo)	110
Acero remachado (usado)	85
Acero soldado con revestido especial (nuevo o usado)	130
Acero soldado (nuevo)	120
Acero soldado (usado)	90
Asbesto-cemento (nuevo)	130
Barro vitrificado (drenes)	110
Cemento pulido	100
Cobre y latón	130
Concreto, acabado liso	130
Concreto, acabado común	120
Fierro fundido (nuevo)	130
Fierro fundido (usado)	90
Madera cepillado o en duelas	120
Plástico	140
Vidrio	140

ANALOGIA DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS Y DARCY-WEISBACH

Al despejar s en la ecuación 5.94 , resulta:

$$S = \left(\frac{1}{0.3547\ C} \right)^{1.852} \frac{\bar{V}^{1.852}}{d^{1.167}} \qquad 5.96$$

$$K_{H-W} = \left(\frac{1}{0.3457\ C} \right)^{1.852} \qquad 5.97$$

Se sustituye la ecuación 5.97 en 5.96

$$S = K_{H-W} \frac{\bar{V}^{1.852}}{d^{1.167}} \qquad 5.98$$

Si despejamos el término h_f/L de la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$\frac{h_f}{L} = \frac{f}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 5.99$$

Al sustituir la ecuación 5.92 en 5.99

$$S = \frac{f}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 5.100$$

$$K_{D-W} = \frac{f}{2g} \qquad 5.101$$

Ahora, sustituyamos la ecuación 5.101 en 5.100

$$S = K_{D-W} \frac{\bar{V}^2}{d} \qquad 5.102$$

En la fórmula semiracional de la ecuación 5.102 si f fuese - constante, los exponentes de la velocidad y el diámetro variarán - al variar el Re, como lo muestra la siguiente fórmula:

$$S = K \frac{\bar{V}^{2+x}}{d^{2-x}} \qquad 5.103$$

de manera que los valores experimentales de x serían:

Para el flujo completamente turbulento: $x = 1.0$

Para el flujo en todo rango del régimen turbulento $0.7 \leq x \leq 1.00$

El valor promedio: $\bar{x} = 0.85$

De manera que si la ecuación 5.103 toma el valor medio de x

$$S = K \frac{\bar{V}^{1.85}}{d^{1.15}} \qquad 5.104$$

De todo lo anterior, se puede observar que la ecuación 5.98 - (Ecuación de Hazen-Williams), se asemeja mucho a la ecuación 5.104 (ecuación de Darcy-Weisbahc), en el caso de que f fuese constante al variar el R_e en todo el rango del flujo turbulento, de la misma manera que Hazen-Williams lo hace con su coeficiente C. Otra observación muy importante es que la ecuación 5.103 coincide con la ecuación 5.102 en flujo completamente turbulento y hay que recordar que f es constante para una misma rugosidad relativa.

Ejemplo 5.6 Determinar la pérdida de carba en un conducto de 20.32 cm de - diámetro y 2 300 m de longitud, si fluyen por él 80 LPS de agua y el material de la tubería es de asbesto-cemento nuevo.

Solución

$$Q = 0.2785\ C\ d^{2.63}\ S^{0.54}$$

$$S = \left(\frac{Q}{0.2785\ C\ d} \right)^{1.85.2}$$

$$S = 0.02835$$

$$h_f = (0.02835)L$$

$$h_f = (0.2835)(2\,300\ m)$$

$$h_f = 65.2\ m$$

BOMBAS

Bomba se define como aquel dispositivo que suministra energía necesaria a un fluído para moverlo de un punto a otro, en el cual el agua va a ser el único fluído de interés para este estudio. Las bombas a su vez, necesitan ser accionadas por motores que pueden - ser de combustión interna o de energía eléctrica.

En un sistema de conducción de agua por bombeo, para un mismo gasto, a menor diámetro de conducto, se requiere de mayor energía que adicionarle al agua y para un mismo diámetro, a mayor caudal - se requiere también de una mayor energía.

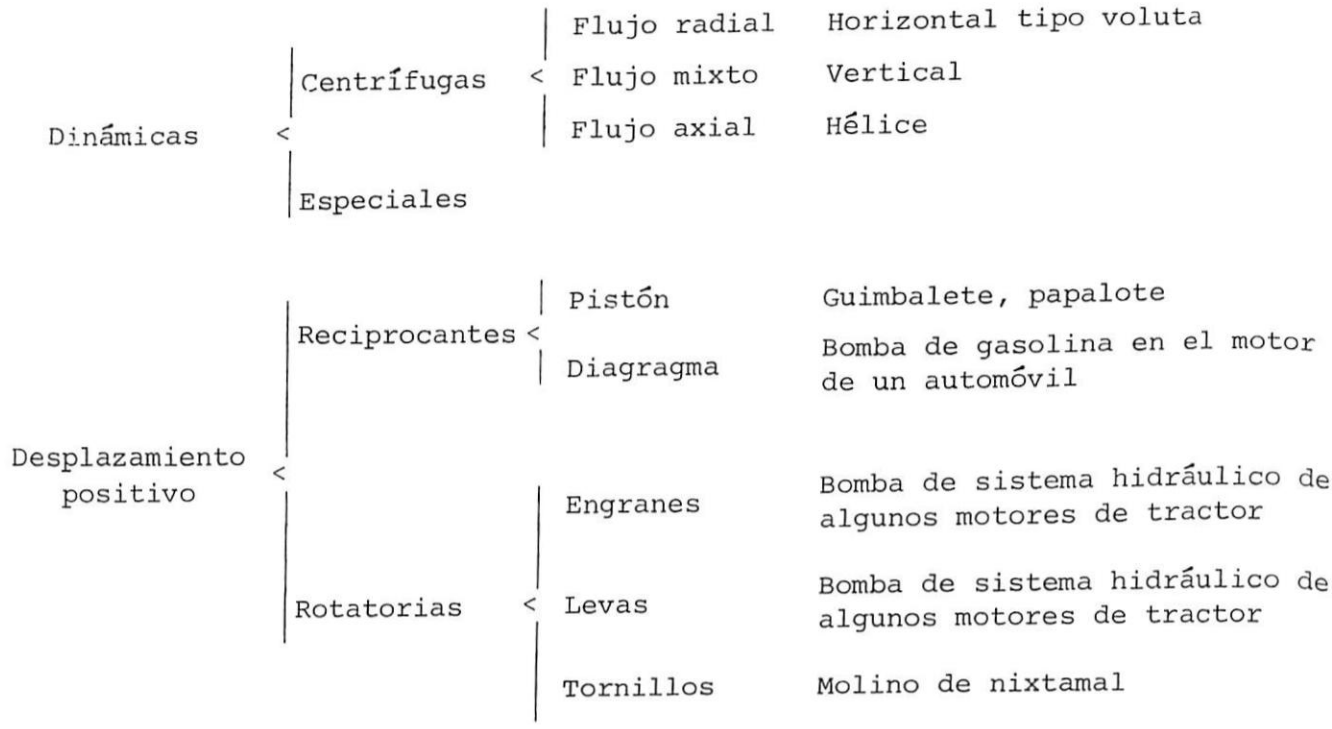
La forma más clara de clasificación de bombas, es aquella en que se agrupan de acuerdo al principio de la forma en que la energía es agregada al fluído, además de identificar el medio por el - cual la energía es implantada, describiendo la geometría comunmente empleada.

Bombeo dinámico

En esta categoría la bomba suministra energía al fluído en - forma continua.

Bombeo de desplazamiento

Una subdivisión más detallada se presenta en el siguiente cuadro.



En irrigación de campos agrícolas, la clase de bomba más co - munmente empleada es la centrífuga y se divide en:

1. Bombas centrífugas horizontales
   a) Tipo voluta
   b) Tipo difusor
2. Bombas centrífugas verticales
   a) Turbina
   b) Inmersión o sumergibles

En la figura 5.17 se ilustran ejemplos de bombas centrífugas

Cuando en un sistema de conducción existe una bomba, a la - ecuación de Bernoulli habrá que sumarle otro término que corresponde a la energía específica que la bomba le adhiere al líquido:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + H = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{TOT_{1-2}} \qquad 5.105$$

Al término H se le da el nombre de carga total de la bomba y se le define como la suma de energías contra las que debe operar una bomba para mover determinada cantidad de agua de un punto a otro.

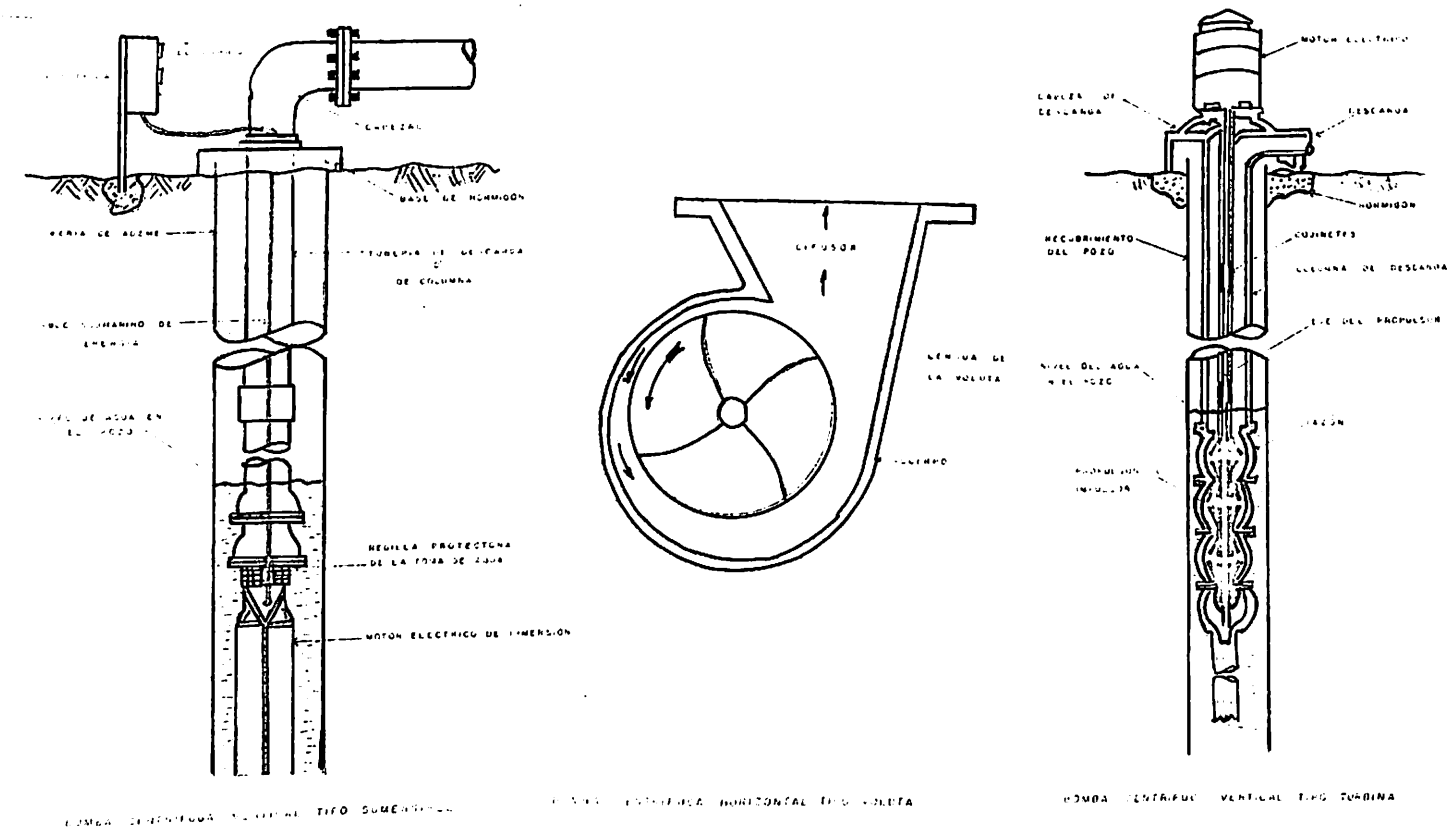


Figura 5.17

Todo el líquido tiene tendencia a vaporizarse, o sea, a proyectar moléculas hacia el exterior, y esas moléculas expulsadas ejercen cierta presión llamada presión de vapor (la cual es una presión absoluta). La presión de vapor de un líquido está en función directa de su temperatura, de manera que cuando la presión de vapor del líquido sea mayor o igual a al presión absoluta exterior, va a ocurrir la ebullición, de manera que existen dos formas para

que un líquido empiece a ebullir; la primera será aumentándole la temperatura hasta que la presión de vapor se iguale con la presión exterior, y la segunda forma sería disminuir la presión exterior hasta que se iguale con la presión de vapor del líquido a la temperatura dada. Si un líquido en ebullición llega a retornar el mismo número de molécular, que las que salieron, se dice que existe un equilibrio entre las fases líquido y vapor, o sea que el medio exterior se saturó de vapor de líquido, y cuando este equilibrio nunca se alcanza, toda la masa líquida se transformará en vapor. En la Tabla 5.6 se dan algunos valores de la presión de vapor de agua a diferentes temperaturas.

TABLA 5.6 PRESION DE VAPORIZACION DEL AGUA EN KILO PASCAL* A DIFERENTES TEMPERATURAS.

Temperatura	Presión de vapor	Temperatura	Presión de vapor
0	0.61	40	9.730
5	0.87	50	9.689
10	1.23	60	9.642
15	1.70	70	9.589
20	2.34	80	9.530
25	3.17	90	9.466
30	4.24	100	9.399

En una tubería que conduce agua que tiene presiones manométricas negativas, puede ocasionar que la presión absoluta en el interior del conducto se reduzca de tal manera que se iguale o sea menor que la presión de vapor del líquido y empiece la formación de burbujas o cavidades llenas de vapor de líquido que produce pérdi-

* Un Kilo pascal (1K Pa) equivale a un Kilonewton/m^2

da de eficiencia y vibración del conducto, acompañado de un ruido muy característico.

En la práctica, el agua viene disuelta con aire que empezará a formar burbujas, antes de que la presión absoluta del líquido - del conducto se iguale a la presión de vapor, por lo que se deberá de evitar que el valor absoluto de la presión manométrica no exceda a dos tercios de la diferencia entre la presión atmosférica local y la de vapor.

La potencia P en caballos de vapor cv de una bomba, se puede obtener con la siguiente fórmula:

$$P = \frac{Q\ H\ \gamma}{75n} \qquad 5.106$$

Donde:

Q = gasto bombeado (m^3/seg)

γ = peso específico del líquido (Kgf/m^3)

H = carga total de bombeo (m)

n = eficiencia global del sistema de bombeo (fracción porciento)

Ejemplo 5.7 Si se quiere bombear 3 600 litros por minuto de agua a 20°C en - el sistema que se encuentra en la figura, encontrar: a) Carga - total de bombeo, b) Potencia requerida por la bomba si opera - con un 77% de eficiencia, c) Presión a la entrada de la bomba, d) Presión a la salida de la bomba, e) El gasto máximo confiable que podría bombear el sistema de conducción sin peligro de cavitación. El material de todo el conducto es de fierro galvanizado y la presión barométrica es de 720 mm de Hg.

Solución Datos que hay que obtener:

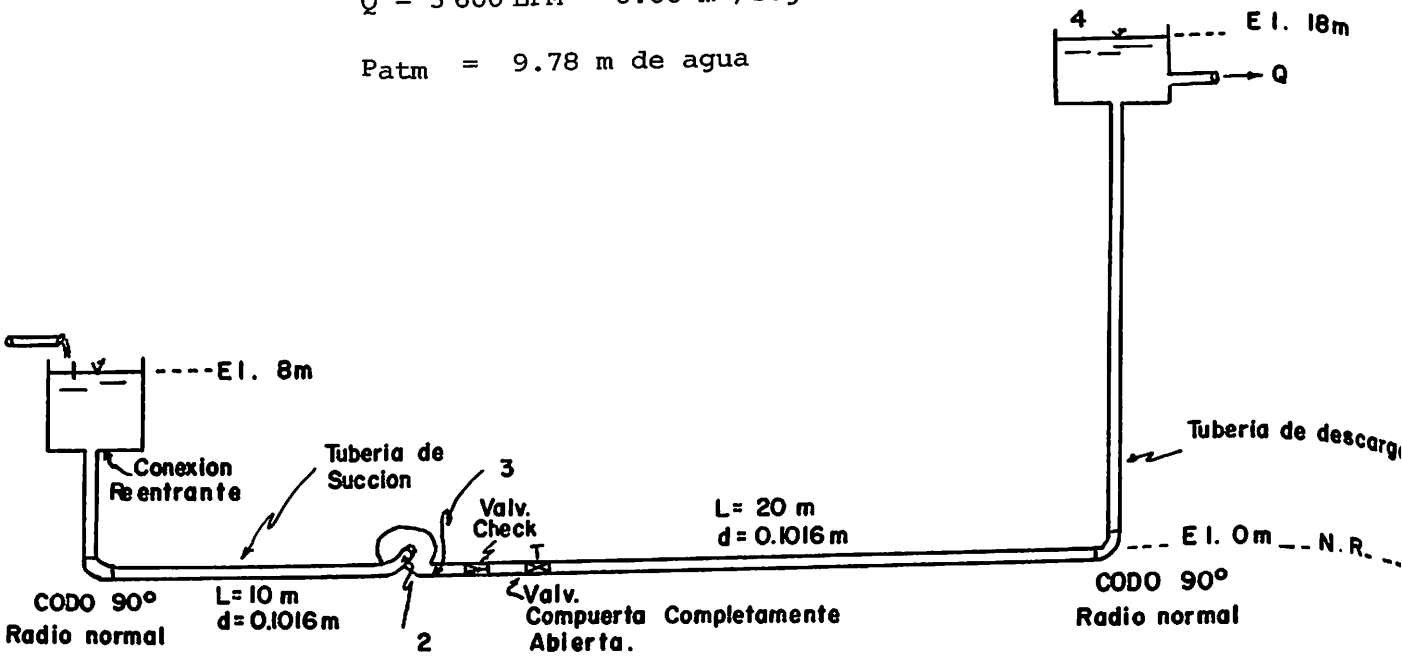
$\varepsilon = 0.15$ mm

$\nu_{20°C} = 1.007 \times 10^{-6}$ m^3/seg

$P_{Vagua\ a\ 20°C} = 2.34$ K Pa $= 0.24$ m de agua

$Q = 3\,600$ LPM $= 0.06$ m^3/seg

$P_{atm} = 9.78$ m de agua



Aplicando la ecuación de Bernoulli en las superficies libres - del líquido en los depósitos y poniendo el nivel de referencia en el nivel a cero metros:

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + H = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{TOT_{1-4}}$$

$$0 + 8\ m + 0 + H = 0 + 18\ m + 0 + h_{TOT_{1-4}}$$

$$H = 10\ m + h_{TOT_{1-4}}$$

$$h_{TOT_{1-4}} = \left(f\frac{L}{d} + K_{ent} + 2K_{codo\ 90°} + k_{valv.check} + K_{valv.comp.} + K_{sal}\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(0.06\ m^3/seg)}{\pi(0.1016\ m)^2} = 7.4\ m/seg$$

$$\frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{4Q}{\pi d^2} = 2.791 \text{ m}$$

$$R_e = \frac{\bar{V}d}{\nu} = \frac{(7.4 \text{ m/seg})(0.1016 \text{ m})}{1.007 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}} = 7.46 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.15 \text{ mm}}{101.6 \text{ mm}} = 0.001476$$

$$f = 0.0213$$

$$h_{TOT_{1-4}} = [0.0213 \frac{10 \text{ m}}{0.1016 \text{ m}} + 1.0 + 2(0.9) + 2.0 + 0.19 + 1.06]2.791 \text{ m}$$

$$h_{TOT_{1-4}} = 34.27 \text{ m}$$

$$H = 10 \text{ m} + 34.27$$

$$H = 44.27 \text{ m}$$

Siendo H la solución del inciso "a"

$$P = \frac{Q\ H}{75\ n} = \frac{(0.06 \text{ m}^3/\text{seg})(1\,000 \text{ Kg}_f/\text{m}^3)(44.27 \text{ m})}{75(0.77)} = 46 \text{ C.V.}$$

$$P = 46 \text{ C.V.}$$

$$1 \text{ C.V.} = 0.986 \text{ H.P.}$$

$$P = 45.35 \text{ H.P.}$$

Siendo P la solución del inciso "b"

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto 1 y 3 no se va a tomar en cuenta el término H porque la bomba no se encuentra - entre estos dos puntos.

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_1 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{TOT_{1-2}}$$

$$0 + 8 \text{ m} + 0 = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_{TOT_{1-2}}$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = 8 \text{ m} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g} - h_{TOT_{1-2}}$$

$$h_{TOT_{1-2}} = (f \frac{L}{d} + K_{codo} + K_{ent}) \frac{\bar{V}_2^2}{2g}$$

$$h_{TOT_{1-2}} = [0.0213 \left(\frac{10\ m}{0.1016\ m} \right) + 0.9 + 1.0]\ \ 2.79\ m$$

$$h_{TOT_{1-2}} = 11.154\ m$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = 8m - 2.79\ m - 11.154\ m$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = -\ 5.945\ m$$

P_2 = Presión a la entrada de la bomba

$$P_2 = -\ 0.594\ Kg_f/cm^2$$

La presión manométrica poco antes de entrar el agua en la bomba es negativa o sea que existe un vacío parcial en ese punto.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 3

$$\frac{P_3}{\gamma} = Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + H = \frac{P_3}{\gamma} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + h_{TOT_{1-3}}$$

$h_{TOT_{1-3}} = h_{TOT_{1-2}}$ porque la pérdida que sufre el agua al estar en la bomba ya está cuantificada en la eficiencia global de la bomba.

$$0 + 8\ m + 0 + H = \frac{P_3}{} + 0 + \frac{\bar{V}_3^2}{2g} + h_{TOT_{1-3}}$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = H - h_{TOT_{1-3}} - \frac{\bar{V}_3^2}{2g} + 8\ m$$

$$\frac{P_3}{\gamma} = 44.27\ m - 11.154\ m - 2.79\ m + 8\ m$$

$$\frac{P_3}{\gamma} = 38.327\ m$$

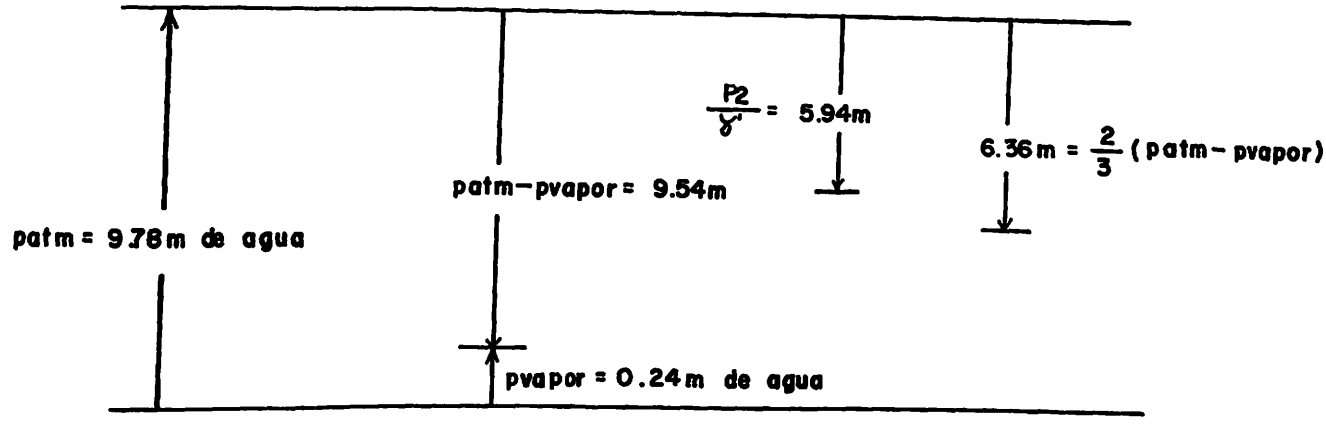
P_3 = Presión a la salida de la bomba

$$P_3 = 3.83\ Kg_f/cm^2$$

El punto más crítico en todo el sistema de conducción se encuentra en la tubería de succión, poco antes de que el agua entre a la bomba o sea en el punto 2, por lo tanto, la P_2 debe tener la siguiente condición:

$$P_2 \leq \frac{2}{3} \ (P_{atm} - P_{vapor})$$

Por lo que se ve en la siguiente figura, la $P_2 < \frac{2}{3} \ (P_{atm} - P_{vapor})$ y el máximo valor que puede tener P_2 es 6.36 m, por lo que el gasto máximo será:



$$\frac{P_2}{\gamma} = 8. \text{ m} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g} - h_{TOT_{1-2}}$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = 8 \text{ m} - (1 + f \frac{L}{d} + K_{codo\ 90°} + K_{ent}) \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = 8 \text{ m} - (98.425 \text{ f} + 2.9) \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$- 6.36 \text{ m} = 8 \text{ m} - (98.425 \text{ f} + 2.9) \frac{\bar{V}_{max}^2}{2g}$$

$$\bar{V}_{max} = \sqrt{\frac{(14.26 \text{ m}) 2g}{98.425 \text{ f} + 2.9}}$$

$$\bar{V}_{max} = \sqrt{\frac{281.74 \text{ m}^2/\text{seg}^2}{98.425 \text{f} + 2.9}}$$

Primera asunción: $f_{1a} = 0.02$

$\bar{V}_{max} = 7.6$ m/seg

$Re_{max} = 7.67 \times 10^5$

$\frac{\varepsilon}{d} = 0.001476$

$f_{Moody} = 0.0215$

Segunda asunción: $f_{2a} = 0.0215$

$\bar{V}_{max} = 7.49$ m/seg

$Re_{max} = 7.56 \times 10^5$

$\frac{\varepsilon}{d} = 0.001476$

$f_{Moody} = 0.213 = f_{2a}$

La velocidad máxima confiable será:

$\bar{V}_{max} = 7.56$ m/seg

$$Q_{max} = \frac{(7.56 \text{ m/seg})\pi(0.1016 \text{ m})^2}{4} = 0.00613 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$Q_{max} = 62.3$ L.P.S.

Como se puede observar, el sistema estaba operando casi a un gasto máximo confiable.

COEFICIENTE α DE CORIOLIS

Di un líquido fluye por un conducto cualquiera, se verá que en la sección transversal del conducto por donde pasa el flujo existe una distribución de velocidades como se muestra en la Figura 5.17, que además, tiene un tubo de Pitot móvil en el cual registra todas las diferentes alturas que tiene la línea de energía total del flujo, debido a la distribución de velocidades.

El potencial de flujo N se define como el trabajo del fluído por unidad de tiempo; en un diferencial de flujo será:

$$dN = H \gamma \, dQ \qquad 5.107$$

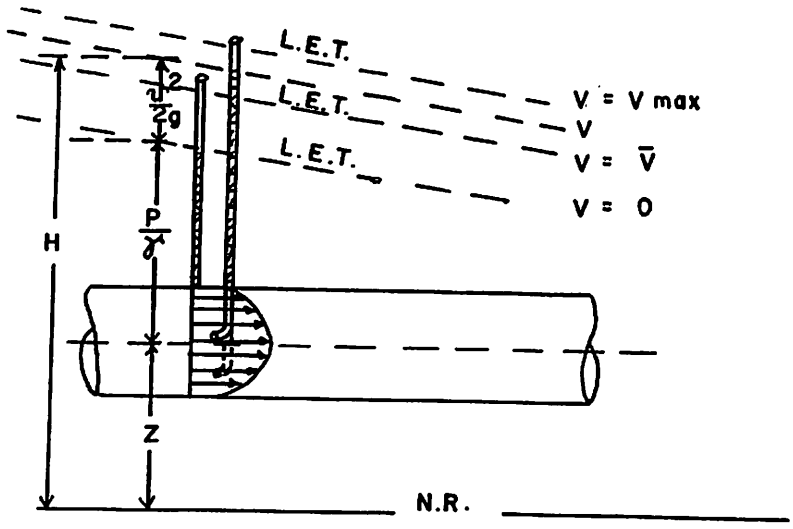


Fig. 5.17 Conducto con tubo de Pitot móvil

Siendo H una variable en función de la velocidad:

$$H = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V}{2g} \qquad 5.108$$

Donde los primeros dos términos son constantes; sustituyendo la ecuación 5.108 en 5.107

$$dN = (Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}) \; dQ \qquad 5.109$$

$$dQ = V \, dA \qquad 5.110$$

Sustituyendo la ecuación 5.110 en 5.109

$$dN = (Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g})\gamma \; V \, dA \qquad 5.111$$

Al integrar con límites la ecuación 5.111 se obtiene:

$$N = (Z + \frac{P}{\gamma})\gamma \int_0^A V \, dA + \frac{\gamma}{2g} \int_0^A V^3 dA \qquad 5.112$$

$$N = \bar{H} \; \gamma \; Q$$

Siendo $\bar{H}$ la H que se obtiene con la velocidad media o:

$$\frac{N}{\gamma Q} = \bar{H} \qquad 5.113$$

Al dividir la ecuación 5.112 por Q, resulta:

$$\frac{N}{\gamma Q} = \frac{(Z + \frac{P}{\gamma})}{Q} \int_0^A V\, dA + \frac{1}{2gQ} \int_0^A V^3\, dA \qquad 5.115$$

$$\int_0^A V\, dA = Q \qquad 5.116$$

$$Q = \bar{V}A \qquad 5.117$$

Si sustituimos las ecuaciones 5.114, 5.116, 5.117 en 5.115, tenemos:

$$H = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{1}{2g\ \bar{V}A} \int_0^A V^3 dA \qquad 5.118$$

Si se multiplica y a la vez se divide por $\bar{V}^2$ el último término de la ecuación 5.118

$$H = A + \frac{P}{\gamma} + \left(\frac{1}{\bar{V}^3 A}\right) \int_0^A (V^3 dA)\, \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 5.119$$

Se observa muy bien que para obtener la altura total media de la energía específica del líquido, a la velocidad media se le agrega un nuevo término.

$$\alpha = \frac{1}{\bar{V}^3\ A} \int_0^A \bar{V}^3 dA \qquad 5.120$$

α corrige el error al considerar como un valor medio de toda la distribución de velocidades a $\bar{V}$. Al término α se le denomina coeficiente de Coriolis; en flujo laminar es igual a 2 y en flujo turbulento varía desde 1.15 a 1.025 por lo que consideramos que para nuestros fines en la práctica como unitario ($\alpha = 1$). Los valores medios de la energía total del líquido en dos secciones del conducto será:

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_2 + h_{TOT_{1-2}} \qquad 5.121$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_2 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2}{2g} + h_{TOT_{1-2}} \qquad 5.122$$

Capítulo VI

SISTEMAS DE CONDUCTOS A PRESION

De acuerdo a la importancia que tiene una adecuada conducción del agua, se han implementado diferentes sistemas de conductos a presión con las que se pretende cubrir las necesidades de cada caso en una forma práctica, económica y eficiente, tomando en cuenta la trascendencia de lo anterior, en este capítulo se describe y explica el diseño de todos los sistemas de conducción de agua a presión más usados en el medio agrícola.

TUBERIA EN SERIE

Un sistema de conducción de tubería en serie se describe como una línea de conducción con tramos que tienen diferentes diámetros o material. Este tipo de sistema tiene dos características principalmente; la primera es que los gastos de cada tramo de diferente diámetro o material son iguales como lo especifica la ecuación 6.1 donde n es el último tramo.

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_i = \ldots Q_n = Q \qquad 6.1$$

La otra característica es que en sistemas de conducción cor - tos, la pérdida de carga total es igual a la suma de todas las pér didas por longitud más la suma de todas las pérdidas locales.

$$h_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} h_{f_i} + \sum_{i=1}^{m} h_{LOC_1} \qquad 6.2$$

Donde n es el número de tramos ya sea de diferente diámetro o material y la m es el número de accesorios que provocan pérdidas - locales en todo el sistema de tubería en serie. Si se tiene un sis tema como se ilustra en la Figura 6.1 donde el material de todos - los tramos es el mismo y tiene tres diámetros diferentes, de mane- ra que el $d_1 > d_2 > d_3$ por lo que $s_2 > s_3 > s_1$ (siendo s la pendien- te piezométrica en cada tramo). Por lo que a la ecuación 6.2 se - transforma para este caso particular en:

$$h_{TOT} = \sum_{i=1}^{3} h_{f_i} + \sum_{i=1}^{4} h_{LOC} \qquad 6.3$$

$$h_{TOT} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + h_{LOC_1} + h_{LOC_2} + h_{LOC_3} \qquad 6.4$$

$$h_{TOT} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + h_{ent.} + h_{cont.} + h_{ens.} + h_{sal.} \qquad 6.5$$

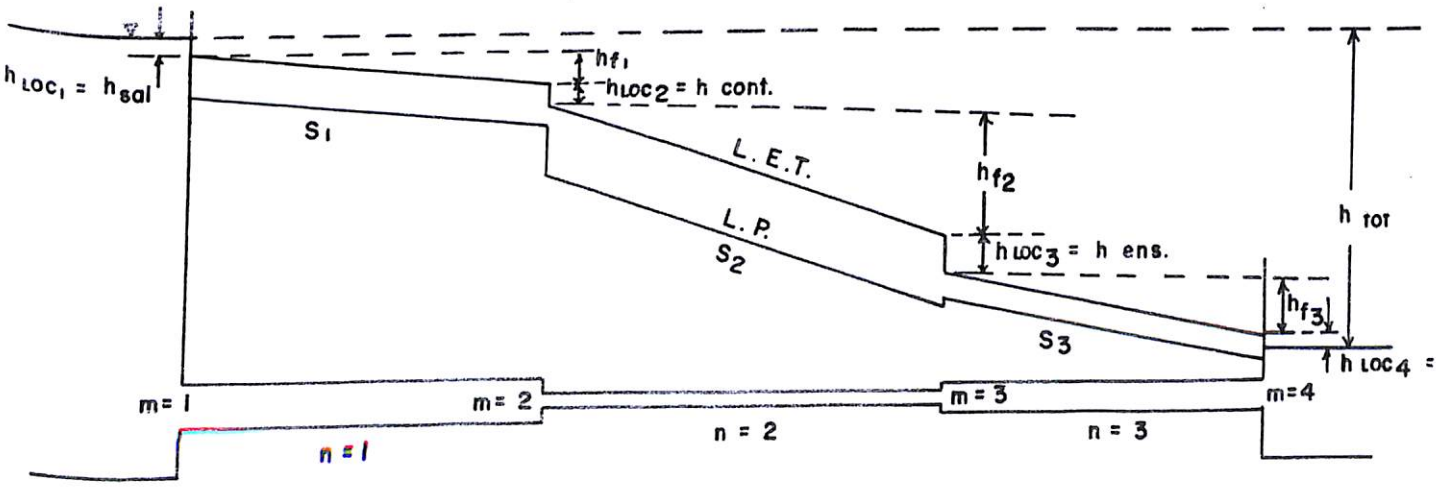


Fig. 6.1 Sistema de tuberías cortas en serie

En el caso de tramos largos de diferente diámetro, se ilustra en la Figura 6.2; tiene las mismas características que el ejemplo ilustrativo de la Figura 6.1 a excepción de que los tramos de cada diámetro son largos, por lo cual se desprecian las pérdidas locales y la ecuación para obtener la pérdida de carga total será:

$$h_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} \qquad 6.6$$

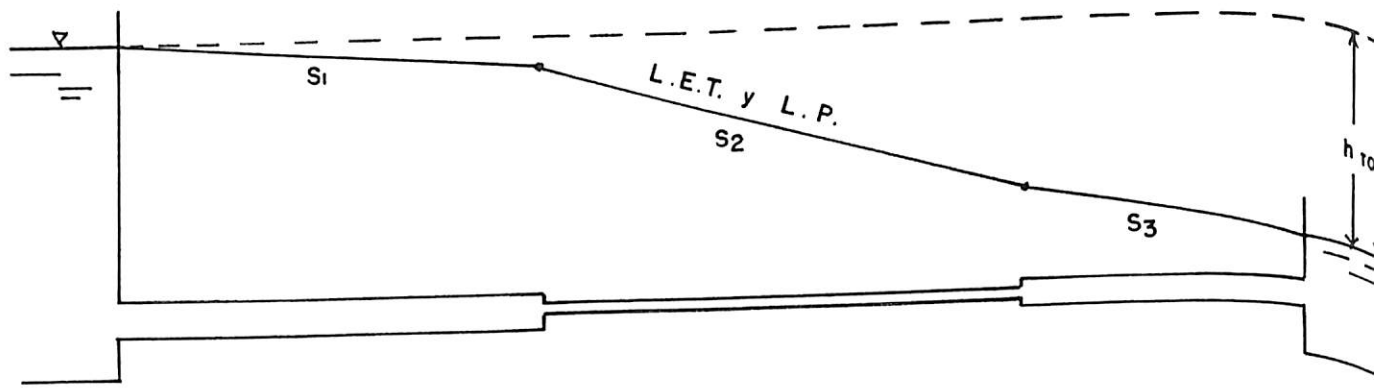


Fig. 6.2 Sistema de tubería larga en serie

Para el caso particular del ejemplo de la Figura 6.2, la ecuación 6.6 se transforma en:

$$h_{TOT} = \sum_{i=1}^{3} h_{fi} \qquad 6.7$$

$$h_{TOT} = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} \qquad 6.8$$

Se pueden presentar dos casos en tuberías en serie: cuando se conoce el gasto, que en la práctica resulta ser lo más común, y cuando se desconoce.

APLICACION DE LA FORMULA DE DARCY-WEISBACH EN TUBERIA EN SERIE

Los problemas de tubería en serie que están dentro del primer caso se resuelven directamente, siempre y cuando se conozcan los -

diámetros y, por consiguiente, se pueda encontrar en cada tramo la f sin hacer asunciones; los problemas del segundo caso tendrán que resolverse a prueba y error cuando se desee obtener el gasto y se hará de la siguiente manera:

Primero. Se aplica la ecuación de Bernoulli en el sistema

Segundo. Todas las velocidades de la ecuación de Bernoulli se establecen en función de una sola de ellas, mediante la ecuación - de continuidad.

Tercero. Se factoriza la única velocidad que quedó y se despe ja.

Cuarto. Como se desconocen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, se asumen por prime- ra vez utilizando el diagrama de Moody dentro de la zona de comple ta turbulencia cuyo único parámetro con el que se cuenta es la ru- gosidad relativa de cada tramo en serie del sistema.

Quinto. Se encuentran los números de Reynolds de cada tramo - $(R_{e_1}, R_{e_2}, \ldots, R_{en})$ y con las respectivas rugosidades relativas $(\varepsilon/d, \varepsilon/d, \ldots, \varepsilon/d_n)$ se obtienen los correspondientes valores de f en el diagrama de Moody.

Sexto. Si cada f asumida de cada tramo no coincide aproximada mente con su f respectiva encontrada en el diagrama, se toman como segunda sunción cada f que se obtuvo en el diagrama de Moody y se vuelve al quinto paso; y si coincide, el último valor de f se con- sidera el correcto.

Para los problemas del segundo caso, existe otro método para poder resolverlos, llamado Grafo-analítico y consiste en obtener - una curva característica de cada tramo puesto en serie y otra cur- va característica de las pérdidas locales de todo el sistema en el caso de tramos cortos, para posteriormente sumerlas en serie y ob- tener una sola curva característica de todo el sistema.

Para obtener la curva característica de cada tramo, hay que - proponer varios gastos empezando por un gasto igual a cero, y por

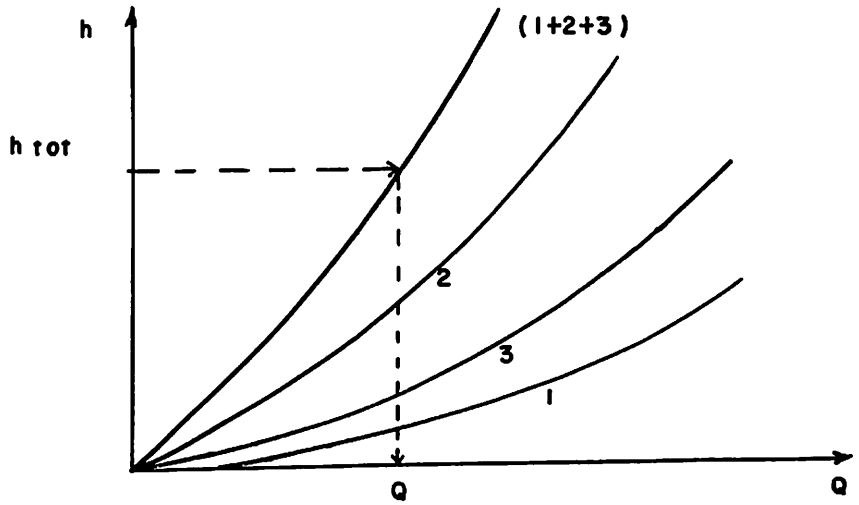
cada gasto propuesto calcular la pérdida de carga en cada tramo, haciendo una tabla que tenga los siguientes datos: Q_i y hf_i, siendo i el número del tramo. En el caso de tomar en cuenta pérdidas locales, se hará otra tabla que tenga los siguientes datos: Q y Σh_{LOC}

Una vez reunidas todas las tablas, se construye una gráfica poniendo la pérdida de carga Q en la ordenada y el gasto Q en la abscisa donde la curva característica del primer tramo se construye graficando Q_1 contra hf_1, la del segundo tramo será Q_2 contra hf_2 y así sucesivamente.

Para sumar en serie todas las curvas características, solamente hay que sumar las pérdidas de carga de cada curva, por cada gasto dado. Teniendo la curva característica de todo el sistema, para encontrar el gasto, sólo hay que conocer la pérdida de carga total de todo el sistema.

Ejemplo 6.1 Determinar el gasto del sistema de tubería en serie de la Figura 6.2 si se conocen los diámetros, las longitudes y el material de todos los conductos como además la pérdida de carga total y la temperatura de agua.

Solución No tomando en cuenta las pérdidas locales (por ser tramos largos, se proponen varios gastos para hacer las 3 tablas correspondientes a los 3 tramos en serie, y posteriormente graficar las curvas características de cada tramo como se ve en la figura. Se suman los tramos en serie para obtener la curva característica de todo el sistema y con la pérdida de carga total (h_{TOT}) se encuentra el gasto.

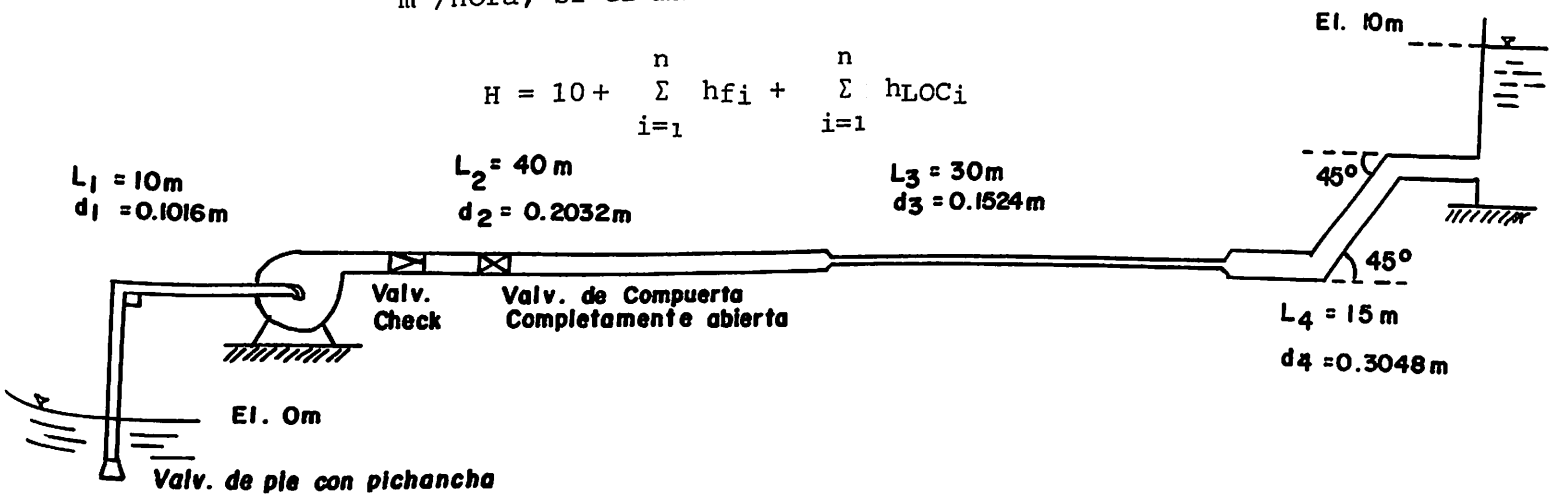


APLICACION DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS EN TUBERIA EN SERIE

Los problemas de tubería en serie del primer caso, se resuel - ven directamente utilizando la ecuación de Hazen-Williams, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2 Encontrar la carga requerida por la bomba para transportar 110 - m^3/hora, si el material de la tubería es de fierro fundido nuevo

$$H = 10 + \sum_{i=1}^{n} h_{fi} + \sum_{i=1}^{n} h_{LOCi}$$



Solución Datos que hay que obtener:

$C = 130$

$Q = 0.03055$ m /seg

$K_{valv.pie} = 1.6$

$K_{valv.comp} = 0.19$

$K_{codo\ 90°} = 0.9$

$K_{codo\ 45°} = 0.4$

$K_{sal} = 1.0$

$K_{valv.check} = 2.0$ $\qquad$ $K_{c.b.} = 0.15$

$$\bar{V}_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4(0.305\ m^3/seg)}{\pi(0.1016\ m)^2} = 2.76\ m/seg$$

$$\bar{V}_2 = \frac{4(0.0305\ m^3/seg)}{\pi(0.2032\ m)^2} = 0.94\ m/seg$$

$$\bar{V}_3 = \frac{4(0.0305\ m^3/seg)}{\pi(0.1524\ m)^2} = 1.67\ m/seg$$

$$\bar{V}_4 = \frac{4(0.0305\ m^3/seg)}{\pi(0.3048\ m)^2} = 0.418\ m/seg$$

$$\frac{\bar{V}_1^2}{2g} = 0.72\ m \qquad \frac{\bar{V}_3^2}{2g} = 0.142\ m$$

$$\frac{\bar{V}_2^2}{2g} = 0.045\ m \qquad \frac{\bar{V}_4^2}{2g} = 0.0089\ m$$

Pérdida por longitud.

$$S_1 = \left[\frac{Q}{0.2785\ C\ d^{2.63}}\right]^{1.852} = \left[\frac{0.0305}{0.2785(130(0.1016)^{2.63}}\right]^{1.852}$$

$$= 0.139$$

$$S_2 = \left[\frac{0.0305}{0.2785(130)(0.2032)^{2.63}}\right]^{1.852} = 0.00475$$

$$S_3 = \left[\frac{0.0305}{0.2785(130)(0.1524)^{2.63}}\right]^{1.852} = 0.0193$$

$$S_4 = \left[\frac{0.0305}{0.2785(130)(0.3048)^{2.63}}\right]^{1.852} = 0.000659$$

$$h_{f_1} = S_1 L_1 = (0.139)(10\ m) = 1.39\ m$$

$$h_{f_2} = (0.00475)(40\ m) = 0.19\ m$$

$$h_{f_3} = (0.0193)(30\ m) = 0.579$$

$$h_{f_4} = (0.000659)(15\ m) = 0.0098\ m$$

$$\sum_{i=1}^{4} h_{f_i} = 2.169\ m$$

Pérdidas locales.

Una h(valv. de pie con pichancha) = 1(1.7)(0.72 m) = 1.152 m

Una h(codo 90°) = 1(0.9)9.72 m) = 0.648 m

Una h(valv.check) = 1(2.0(0.045 m) = 0.09 m

Una h(valv. de compuerta completamente) = 1(0.19)(0.045 m)

= 0.00855 m

Una h(contracción brusca) = 1(0.15)(0.142) = 0.0213 m

Una h(ensanchamiento brusco) = 1(3.76 m/seg - 0.418 m/seg)^2/2g

= 0.569 m

Dos h(codo 45°) = 2(0.4)(0.0089) = 0.00712 m

Una h(por salida) = 1(1)(0.0089 m) = 0.0089

$$\sum_{i=1}^{9} h_{LOC_i} = 2.505 \text{ m}$$

H = 10 m + 2.169 m + 2.505 m = 14.67 m

H = 14.67 m

Para el segundo caso, existen dos métodos para solucionar este tipo de problemas con Hazen-Williams que son:

a) Método de la tubería equivalente

b) Método del porcentaje

Un conducto es equivalente a un sistema de conductos en serie si conduce el mismo gasto con las mismas pérdidas de carga total. En la Figura 6.3 se muestran dos sistemas de conducción, uno es un sistema tubería en serie y el otro una tuberría de un solo diáme - tro. Se dice que los sistemas de conducción son equivalentes siempre y cuando $Q_1 = Q_2$ y $h_{TOT_1} = h_{TOT_2}$

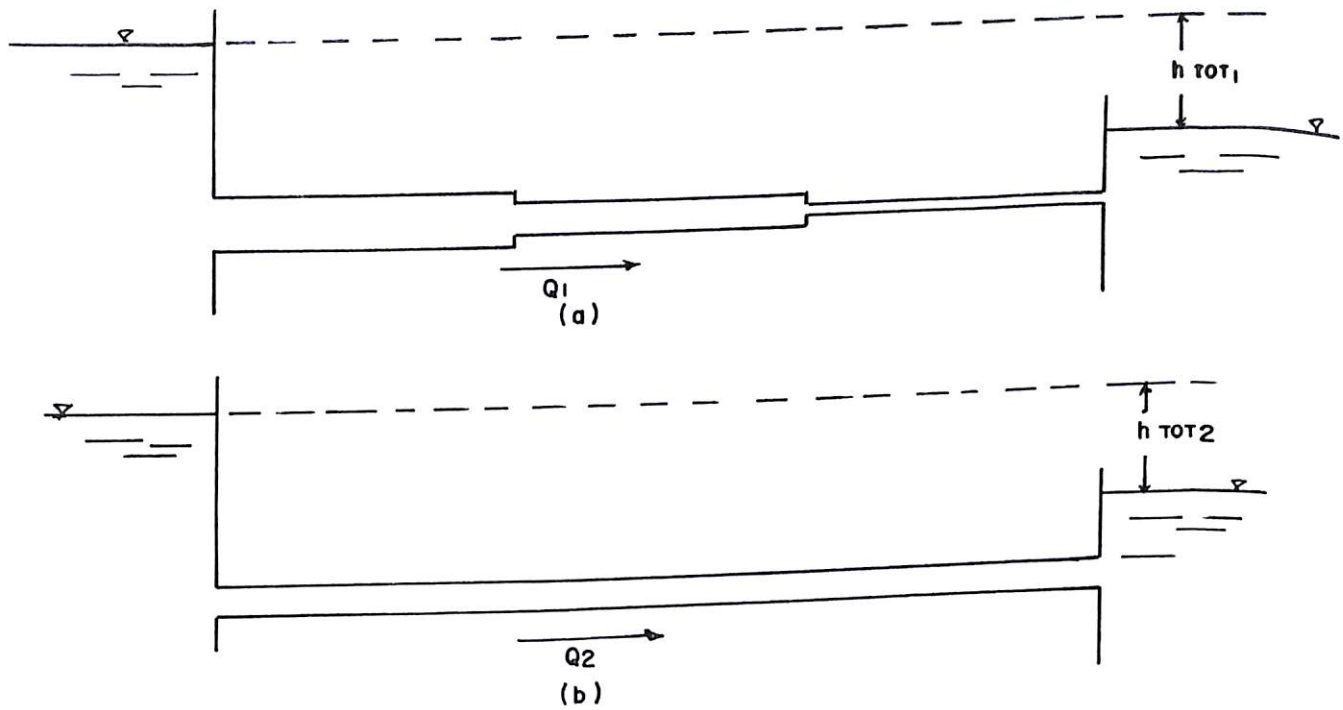


Fig. 6.3 Sistemas de conducción. a) Sistema de tubería en serie b) Sistema de una tubería de un solo diámetro.

Al despejar s de la fórmula de Hazen-Williams

$$S = \left(\frac{Q}{0.2785\ C\ d^{2.63}} \right) \qquad 6.9$$

Por lo tanto h_f será:

$$h_f = \left(\frac{Q}{0.2785\ C}\right)^{1.852} \frac{L}{d^{4.87}} \qquad 6.10$$

Un sistema de conducción de tubería en serie en el cual se puedan despreciar pérdidas locales siendo equivalente a una tubería simple de tramo largo, se igualan las pérdidas de carga totales.

$$h_{TOT}\ (\text{Tubería simple}) = h_{TOT}\ (\text{Tubería en serie}) \qquad 6.11$$

Como a los dos sistemas se le desprecian las pérdidas locales, la ecuación 6.11 se puede transformar en:

$$h_f = \sum_{i=1}^{n} h_{f_i} \qquad 6.12$$

Sustituimos la ecuación 6.10 en 6.11

$$\left(\frac{Q}{0.2785\ C} \right)^{1.852} \frac{L}{d^{4.87}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{Q}{0.2785\ C} \right)^{1.852} \frac{L}{d^{4.87}} \right]_i \qquad 6.13$$

Si ambos conductos tienen el mismo material y además el mismo gasto por ser equivalentes; a la ecuación 6.13 se le puede eliminar todo lo que está elevado a la 1.852

$$\frac{L}{d^{4.87}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{d^{4.87}}$$

Para encontrar la tubería simple que sea equivalente a la tubería en serie, sólo basta proponer el diámetro o la longitud y despejar la incógnita.

Ejemplo 6.3 El sistema de tubería en serie de la Figura 6.3 está constituido por 600 m de tubería de 40 cm, 300 m de tubería de 30 cm y 1500m de 20 cm. Si la pérdida de carga total es de 60 m, calcular el caudal que conduce el sistema por el método de la tubería equivalente. El material del conducto es de asbesto-cemento nuevo.

Solución Datos que hay que obtener:

$$C = 130$$

Utilizando la ecuación 6.14 para encontrar una tubería simple equivalente a la tubería en serie.

$$\frac{L}{d^{4.87}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{L}{d^{4.87}}$$

$$\frac{L}{d^{4.87}} = \frac{L_1}{d_1^{4.87}} + \frac{L_2}{d_2^{4.87}} + \frac{L_3}{d_3^{4.87}}$$

Proponiendo un d = 30 cm para la tubería simple (el diámetro propuesto es el que uno desee así como también pudo haber sido la longitud).

$$\frac{L}{(0.3)^{4.87}} = \frac{600\,m}{(0.4\,m)^{4.87}} + \frac{3000\,m}{(0.3\,m)^{4.87}} + \frac{1\,500\,m}{(0.2\,m)^{4.87}}$$

$$\frac{L}{(0.3)^{4.87}} = 5\,378\,391.312\ m^{-3.87}$$

$$L = 15\,283.855\,m$$

Por lo tanto, la tubería simple de asbesto-cemento nuevo equivalente a la tubería compuesta en serie, tiene un diámetro de 30 cm y una longitud de 15 293.855 m; el gasto que pasa por la tubería simple si tiene una pérdida de carga total de 60 m será:

$$Q = 0.2785\ C\ d^{2.63}\ \ S^{0.54}$$

$$S = \frac{h_f}{L} = \frac{60\ m}{15\,283.855\,m} = 0.003926$$

$$Q = 0.2785\ (130(0.2)^{2.63}\ \ (0.003926)^{0.54}$$

$$Q = 0.076\ m^3/seg$$

$$Q = 76.62\ L.P.S.$$

El gasto que pasa por la tubería simple es igual al gasto que pasa por la tubería en serie.

El otro método es el del porcentaje y su metodología es la siguiente:

Primero. Se asume un gasto en el sistema de tubería en serie.

Segundo. Se determina la pérdida de carga en cada tramo y la pérdida de carga total.

Tercero. Si la pérdida de carga total es un 100%, se determi-

na el porcentaje de pérdida de carga en cada tramo en serie.

Cuarto. Se multiplica la pérdida de carga total real que tiene el sistema por la fracción porciento que corresponde a cada tramo, para obtener la pérdida de carga real de cada uno de ellos.

Quinto. Con la pérdida de carga real de cualquiera de los tramos, el diámetro y la longitud, se calcula el gasto real.

Ejemplo 6.4 Determine el gasto del ejemplo 6.3 con el método del porcentaje

Solución Primero. Se asume un Q = 100 L.P.S.

Segundo. Utilizando la ecuación 6.10 en cada uno de los tramos

$$h_f = \left(\frac{Q}{0.2785\ C} \right)^{1.857} \frac{6\,000}{d^{4.87}}$$

$$h_{f_1} = \left(\frac{0.1}{0.2785(130)} \right)^{1.857} \frac{6\,000}{(0.4)^{4.87}}$$

$$h_{f_1} = (0.000018247) \frac{6000}{(0.4)^{4.87}}$$

$$h_{f_2} = 9.49 \text{ m}$$

$$h_{f_2} = (0.0000182457) \frac{3\,000}{(0.3)^{4.87}}$$

$$h_{f2} = 19.26 \text{ m}$$

$$h_{f_3} = (0.0000182457) \frac{1\,500}{(0.2)^{4.87}}$$

$$h_{f_3} = 69.38 \text{ m}$$

$$\sum_{i=1}^{3} h_{f_i} = 98.13 \text{ m}$$

Tercero.

98.12 m = 100%

9.49 m = 9.67%

19.26 m = 19.63%

69.38 m = 70.70%

Cuarto.

(60 m)(0.967) = 5.803 m

$h_{f\ real}$ = 5.802 m

(60 m)(0.1963) = 11.778 m

$h_{f\ real}$ = 11.778 m

(60 m)(0.7070) = 42.42 m

$h_{f\ real}$ = 42.42 m

$$\sum_{i=1}^{3} h_{fi} = 5.802\ m + 11.778\ m + 42.42\ m = 60\ m$$

Quinto. Utilizamos la pérdida de carga del último tramo para en - contrar el gasto.

$$Q = 0.2785\ C\ d^{2.63}\ S^{0.54}$$

$$S = \frac{h_f}{L} = \frac{42.42\ m}{1\,500\ m} = 0.02828$$

$$Q = 0.2785(130)(0.2)^{2.63}\ (0.02828)^{0.54}$$

$$Q = 0.0766\ m^3/seg$$

$$Q_{real} = 76.6\ L.P.S.$$

TUBERIA EN PARALELO

Un sistema de tubería en paralelo se define como el conjunto de conductos que se ramifican en un punto para unirse de nuevo posteriormente (Figura 6.4).

Un sistema de tubería en paralelo también tiene dos caracte - rísticas principalmente; la primera es que la pérdida de carga de cada tramo en paralelo es la misma, como lo especifica la ecuación 6.15

$$h_{TOT_1} = h_{TOT_2} = \ldots = h_{TOT_i} = \ldots h_{TOT_n} = \Delta h \qquad 6.15$$

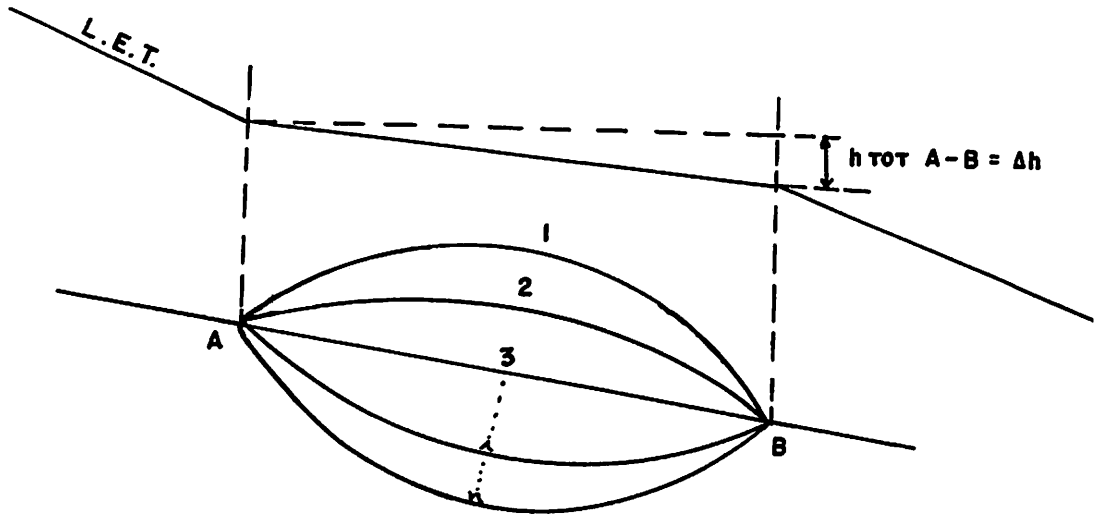


Fig. 6.4 Sistema de tubería en paralelo

La otra característica es que el gasto total del sistema - (Q_{TOT}) es igual a la suma de los gastos de todos los tramos.

$$Q_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad 6.16$$

Donde:

Como se observa, las características del sistema de tubería en paralelo son inversas a las características del sistema de tubería en serie.

Existen dos casos que se pueden presentar en tubería en paralelo. El primer caso es cuando se conoce la pérdida de carga total - (Δh) y en el segundo caso se desconoce.

APLICACION DE LA FORMULA DE DARCY-WEISBACH EN TUBERIA EN PARALELO

La pérdida de carga de cada tramo en paralelo de la Figura 6.4 será:

$$h_{TOT_1} = \left[f_1 \frac{L_1}{d_1} + (\Sigma K_{LOC})_1\right] \frac{\bar{V}_1^2}{2g} \qquad 6.17$$

$$h_{TOT_2} = \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + (\Sigma K_{LOC})_2\right] \frac{\bar{V}_2^2}{2g} \qquad 6.18$$

$$h_{TOT_i} = \left[f_i \frac{L_i}{d_i} + (\Sigma K_{LOC})_i\right] \frac{\bar{V}_i^2}{2g} \qquad 6.19$$

$$h_{TOT_n} = \left[f_n \frac{L_n}{d_n} + (\Sigma K_{LOC})_n\right] \frac{\bar{V}_i^2}{2g} \qquad 6.20$$

Si despejamos la $\bar{V}_i$ de la ecuación 6.19, tenemos:

$$\bar{V}_i = \sqrt{\frac{2g\ H_{TOT_i}}{f_i \frac{L_i}{d_i} + (\ K_{LOC})}} \qquad 6.21$$

$$E_i = f_i \frac{L_i}{d_i} + (\Sigma K_{LOC})_i \qquad 6.22$$

Al sustituir la ecuación 6.22 en 6.21, resulta:

$$\bar{V}_i = \sqrt{\frac{2g\ h_{TOT_i}}{E_i}} \qquad 6.23$$

Ahora, apliquemos la ecuación de continuidad en cada tramo

$$Q_i = A_i \bar{V}_i \qquad 6.24$$

Sustituyamos la ecuación 6.23 en 6.24

$$Q_i = A_i \sqrt{\frac{2g\ h_{TOT_i}}{E_i}} \qquad 6.25$$

Si sustituimos la ecuación 6.25 en 6.16 , se obtiene:

$$Q_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} A_i \sqrt{\frac{2g\ h_{TOTi}}{E_i}} \qquad 6.26$$

y al sustituir la ecuación 6.15 en 6.16 :

$$Q_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} A_i \sqrt{\frac{2g\ h}{E_i}} \qquad 6.27$$

Al sacar de la sumatoria las constantes de la ecuación 6.27 tenemos:

$$Q_{TOT} = \sqrt{2g\ \Delta h} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{E_i} \qquad 6.28$$

En conductos circulares, el área de cada tramo será:

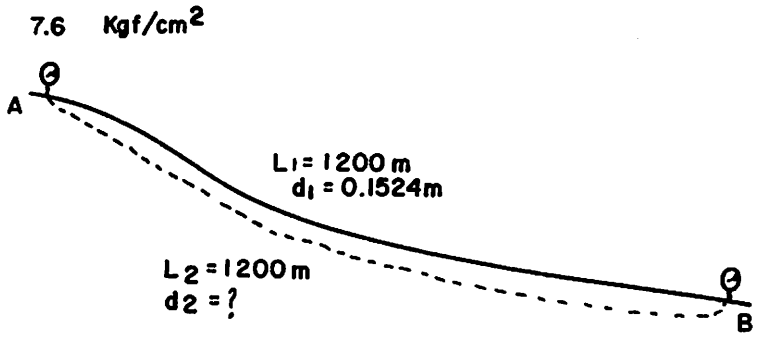
$$A_i = \frac{\pi d_i^2}{4} \qquad 6.29$$

Sustituyamos ahora la ecuación 6.29 y 6.22 en 6.28

$$Q_{TOT} = \frac{\pi \sqrt{2g\ \Delta h}}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{\sqrt{f_i \frac{L_i}{d_i} + (\Sigma K_{LOC})_i}} \qquad 6.30$$

Los problemas de tubería en paralelo que se hallan dentro del primer caso se resuelven a prueba y error cuando no se puede conocer f directamente, como se puede observar en el ejemplo 6.5

Ejemplo 6.5 Si en un sistema de riego presurizado se quiere aumentar el tamaño de la unidad y para ello se requiere tener un gaso de 70 L.P.S. y una presión mínima a la entrada de la unidad (Punto B) de 4.8 Kgf/cm^2. ¿Qué diámetro debe tener la tubería lisa de 1200 m de longitud que debe ponerse en paralelo (raya punteada en la figura), con la línea principal de conducción del sistema de riego entre los puntos A y B?. El conducto original transporta 50 L.P.S. y tiene una presión de 4.2 Kgf/cm^2 en el punto B; considere la temperatura del agua a 20°C



Solución Aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos A y B del con - ducto original.

$$Z_A = \frac{P_B - P_A}{\gamma} + h_{fA-B}$$

$$Z_A = \frac{P_B - P_A}{\gamma} + f\frac{L}{d}\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\bar{V} = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2} = \frac{4(0.050\ m^3/seg)}{(0.1524\ m)} = 2.74\ m/seg$$

$$R_{e_1} = \frac{\bar{V}_1 d_1}{\nu} \quad \frac{(2.74\ m/seg)(0.1524)}{1.007 \times 10^{-6}\ m^2/seg} = 4 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.0015\ mm}{152.4\ mm} = 0.0000098$$

$$f = 0.0137$$

$$Z_A = \frac{41\,000\ Kg_f/m^2 - 76\,000\ Kg_f/m}{1\,000\ Kg_f/m} + 0.0137\ \frac{1200\ m}{0.1524}\ \frac{(2.74m/seg)}{19.62m/seg}$$

$$Z_A = 6.27\ m$$

El manómetro A se encuentra 6.27 m arriba de B. Para encontrar - el gasto del conducto de 0.1524 m de diámetro, dado a las nuevas condiciones, se vuelve a aplicar la ecuación de Bernoulli.

$$h_{fA-B} = \Delta h = Z_A + \frac{P_B - P_A}{\gamma}$$

$$\Delta h = 6.27\ m + \frac{76\,000\ Kg_f/m^2 - 48\,000\ Kg_f/m^2}{1\,000\ Kg_f/m^3} = 34.27\ m$$

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{2g\,h}{f\frac{L}{d}}} = \sqrt{\frac{(19.62\ m/seg)(34.27\ m)}{f\ \frac{1200\ m}{0.1524\ m}}} = \frac{0.2922}{\sqrt{f}}$$

Como no se conoce la f se tiene que asumir.

Primera asunción: $f_{1a} = 0.012$

$\bar{V}_1 = 2.67$ m/seg

$R_e = 4 \times 10^4$

$\frac{\varepsilon}{d_1} = 0.0000098$

$f_{Moody} = 0.0137$

Segunda asunción: $f_{2a} = 0.0137$

$V_1 = 2.5$ m/seg

$R_e = 3.8 \times 10^5$

$\frac{\varepsilon}{d_1} = 0.000\text{-}098$

$f_{Moody} = 0.0138 = f_{2a}$

$\therefore \bar{V} = 2.5$ m/seg

$$Q_1 = \frac{\bar{V}\pi d^2}{4} = \frac{(2.5\ m/seg)\pi(0.1524\ m)^2}{4} = 0.04542\ m^3/seg$$

$Q_1 = 45.43$ L.P.S.

$Q_2 = Q_{TOT} - Q_1 = 70$ L.P.S. $- 45.42$ L.P.S. $= 24.58$ L.P.S.

La tubería que se va a instalar en paralelo tiene que llevar un gasto de 4.58 L.P.S. por lo que habrá que encontrar un diámetro que nos produzca la misma pérdida de carga del tramo original ($\Delta h = 34.27$ m)

$$d = \sqrt{f}\ \sqrt{\frac{8Q_2^2 L_2}{\pi^2 g \Delta h}}$$

$$d = \sqrt[5]{f} \sqrt{\frac{8(0.02458\ m^3/seg)^2(1200m)}{\pi^2 g\ 34.27\ m}} = \sqrt{f}\quad (0.28087\ m)$$

Primera asunción: $f_{1a} = 0.015$

$d_2 = 0.1212$ m

$$R_{e_2} = \frac{1}{d}\left(\frac{4Q_2}{\pi\nu}\right) = 7.3 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d_2} = \frac{0.0015\ mm}{121.2\ mm} = 0.0000124$$

$f = 0.0122 \neq f_{1a}$

Segunda asunción: $f_{2a} = 0.0122$

$d_2 = 0.1163$ m

$R_{e_2} = 7.6 \times 10^5$

$$\frac{\varepsilon}{d_2} = \frac{0.0015\ mm}{116.3\ mm} = 0.0000129$$

$f_{Moody} = 0.0122 \cong f_{2a}$

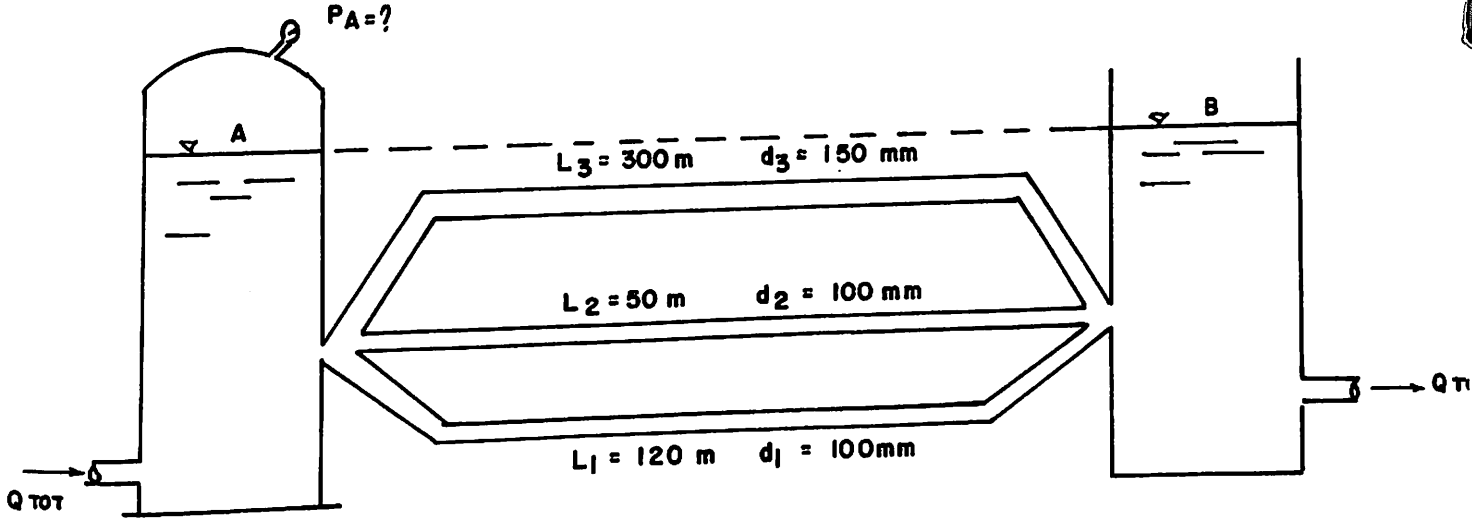
$\therefore\ d_2 = 0.1163$ m

El diámetro comercial será el inmediato superior a 11.63 cm

Para el segundo caso se utilizaría la ecuación 6.30, para encontrar Δh siempre y cuando hubiera seguridad de que el flujo es completamente turbulento ya que podríamos obtener los coeficientes f con la rugosidad relativa de cada tramo. Con el método grafoanalítico no se tiene ninguna dificultad para los problemas que son del segundo caso, lo que se tiene que hacer es elaborar las curvas características de cada tramo en paralelo y después sumarlas en paralelo para construir la curva característica de todo el sistema. Para sumar las curvas en paralelo, solamente hay que sumar los gas

tos de cada curva, por cada pérdida de cargas dada. Teniendo la - curva característica de todo el sistema, para encontrar la pérdida de carga total y el gasto en cada tramo, sólo hay que conocer el - gasto total de todo el sistema, como se ilustra en el ejemplo 6.6

Ejemplo 6.6 Un recipiente cerrado que tiene aire comprimido hace circular - un gasto de 60 L.P.S. de agua a 20°C a través de un sistema de tubería en paralelo hasta un recipiente abierto cuyo nivel de - la superficie del líquido está a la misma altura que el nivel - del líquido en el recipiente cerrado como se ve en la figura. ¿Cuál es la lectura del manómetro y el gasto que pasa por cada tramo?. La tubería es de fierro fundido nuevo.



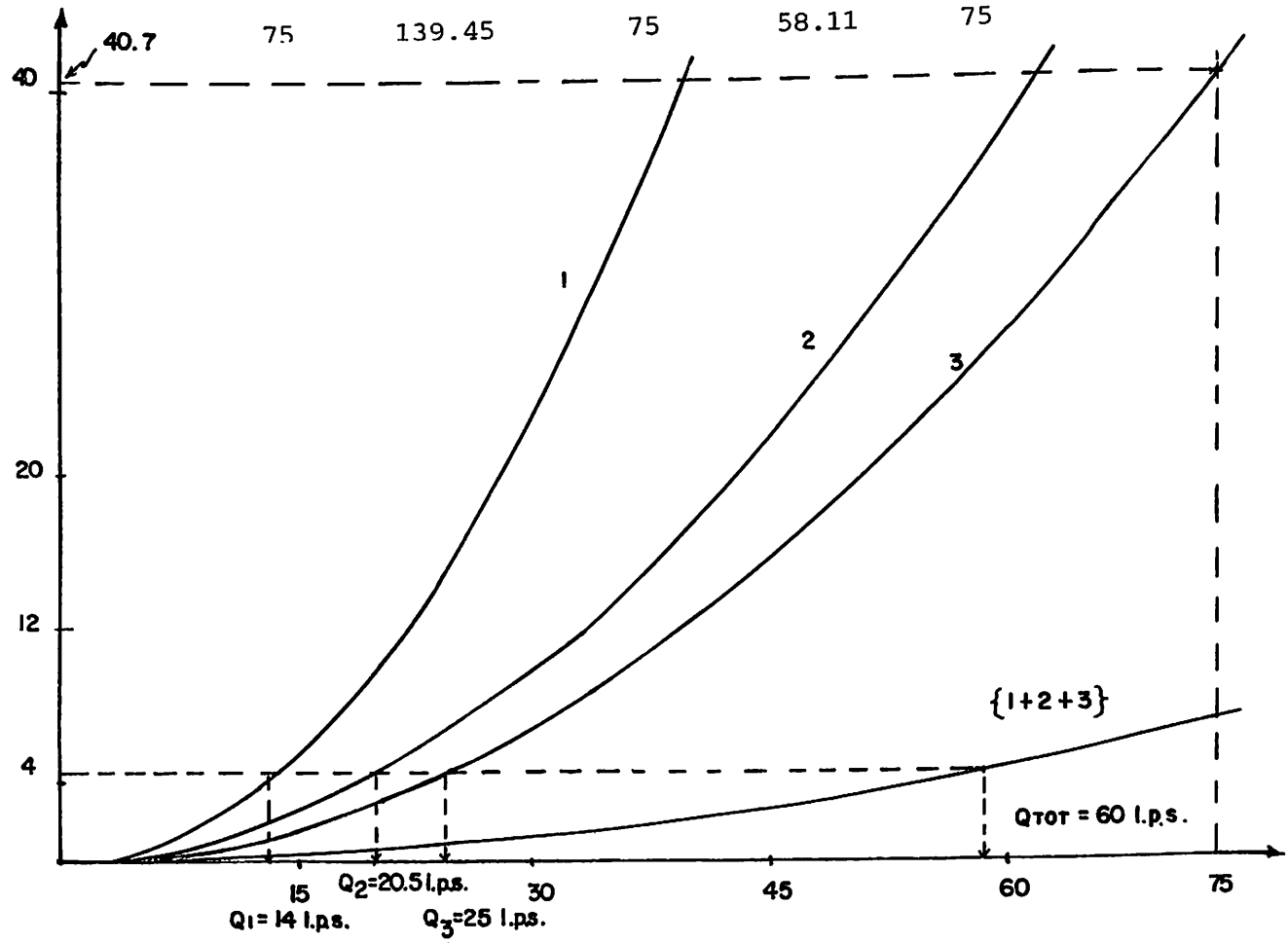
Solución Aplicando la ecuación de Bernoulli

$$P_A = (h_{TOT})\gamma$$

Despreciando pérdidas locales

Tramo uno		Tramo dos		Tramo tres	
Q_1 (LPS)	h_{f_1} (m)	Q_2 (LPS)	h_{f_2} (m)	Q_3 (LPS)	h_{f_3} (m)
0	0	0	0	0	0
15	5.58	15	2.32	15	6.83
30	22.31	30	9.30	30	14.98

Tramo uno		Tramo dos		Tramo tres	
Q_1 (LPS)	hf_1 (m)	Q_2 (LPS)	hf_2 (m)	Q_3 (LPS)	hf_3 (m)
45	50.03	45	20.85	45	26.39
60	89.25	60	37.20	60	40.68
75	139.45	75	58.11	75	



$h_{TOT} = 4.4$ m

$P_A = (4.4\ m)(1\ 000\ Kg_f/m^3)$

$P_A = 4\ 400\ Kg_f/m^2$

$P_A = 0.44\ Kg_f/cm^2$

$Q_1 = 14$ L.P.S.

$Q_2 = 20.5$ L.P.S.

$Q_3 = 25$ L.P.S.

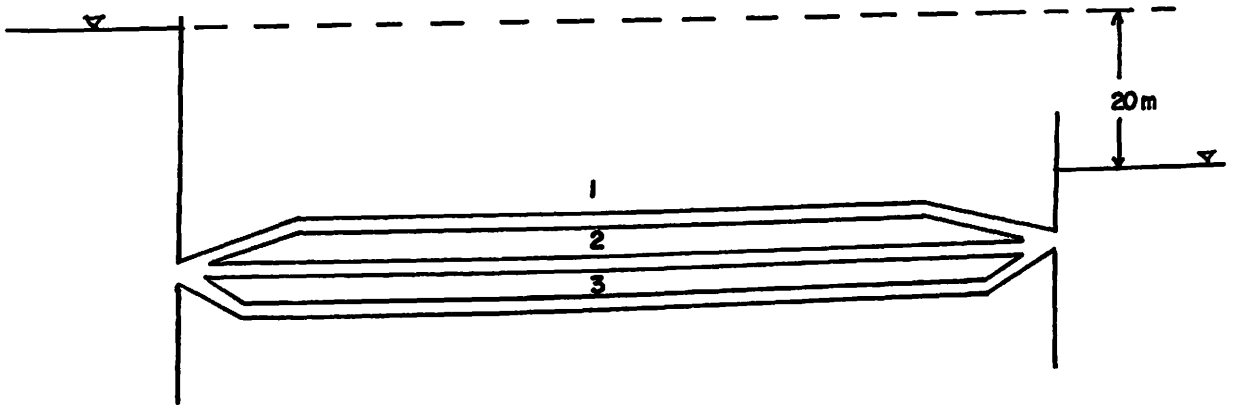
Los datos del método grafoanalítico no son exactos pero sí muy aproximados como se puede ver en la suma de los tres gastos - ($Q_1 + Q_2 + Q_3 = 59.5$ L.P.S.); también es algo laborioso al mo - mento de graficar las curvas, pero el método nos evita resolver

los problemas a prueba y error y además, nos ofrece una solu - ción universal del sistema, o sea, cualquier variación que tenga (sin modoficar diámetros, longitudes y material de los conduc - tos) se pueden obtener las nuevas incógnitas de la misma gráfi- ca.

APLICACION DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS EN TUBERIA EN PARALELO

Los problemas de tubería en paralelo del caso uno, se resuel- ven directamente utilizando la ecuación de Hazen-Williams como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.7 Calcular el gasto en cada uno de los tramos y el gasto total del sistema de tubería en paralelo que se ilustra en la figura.



D A T O S

i	d (cm)	L (Km)	C
1	40	4	100
2	30	2	100
3	20	3.5	100

Solución Como los tres tramos se encuentran en paralelo y tomando en - cuenta que se desprecian pérdidas locales tenemos que:

$$h_{f_1} = h_{f_2} = h_{f_3} = h = 20 \text{ m}$$

$$S_1 = \frac{h}{L_1} = \frac{20 \text{ m}}{4000 \text{ m}} = 0.005$$

$$S_2 = \frac{h}{L_2} = \frac{20\ m}{2000\ m} = 0.01$$

$$S_3 = \frac{h}{L_3} = \frac{20\ m}{3500\ m} = 0.0057$$

$$Q_i = 0.2785\ C_i d_i^{2.63}\ S_i^{0.54}$$

$$Q_1 = (0.2785)(100)(0.4)^{2.63}\ (0.005)^{0.54} = 0.14314\ m^3/seg$$

$$Q_2 = (0.2785)(100)(0.3)^{2.63}\ (0.01)^{0.54} = 0.09766\ m^3/seg$$

$$Q_3 = (0.2785)(100)(0.2)^{2.63}\ (0.057)^{0.54} = 0.02482\ m^3/seg$$

$Q_1 = 143.14$ L.P.S.

$Q_2 = 97.66$ L.P.S.

$Q_3 = 24.82$ L.P.S.

$Q_{TOT} = 265.62$ L.P.S.

Para el segundo caso, existen dos métodos para solucionar problemas de tubería en paralelo con Hazen-Williams que son:

a) Método de la tubería equivalente

b) Método del porcentaje

Un sistema de conducción de tubería simple es equivalente a un sistema de tubería en paralelo siempre y cuando los dos conduzcan igual gasto a una misma pérdida de carga.

Siendo Q el gasto de una tubería simple y Q_{TOT} el gasto de un sistema de tubería en paralelo de n tramos, si son equivalentes se tiene que:

$$Q = Q_{TOT} \qquad 6.31$$

Sustituyendo la ecuación 6.16 en 6.31

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad 6.32$$

Al sustituir la ecuación de Hazen-Williams en la ecuación

$$0.2785\ C\ d^{0.54}\ \frac{hf^{0.54}}{L} = \sum_{i=1}^{n} 0.2785\ C_i d_i^{2.63}\ \left(\frac{\Delta h}{L}\right)^{0.54} \qquad 6.33$$

Si el material de los sistemas de conducción es el mismo

$$0.2785\ C\ d^{2.63}\ \left(\frac{hf}{L}\right)^{0.54} = 0.2785\ C\ \Delta h^{0.54} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^{2.63}}{L^{0.54}} \qquad 6.34$$

como $h_f = \Delta h$ por ser equivalentes

$$\frac{d^{2.63}}{L^{0.54}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^{2.63}}{L_i^{0.54}} \qquad 6.35$$

Ejemplo 6.8 Si en el ejemplo 6.7 no se conociera h y se conociese el gasto total igual a 265.62 L.P.S. ¿Cuál es el gasto en cada tramo y cuál es la pérdida de carga total?

Solución Utilizando el método de la tubería equivalente, se tiene que obtener una tuberís simple equivalente al sistema de tubería en paralelo y para ello hay que auxiliarse de la ecuación 6.35, donde se tiene que proponer un diámetro o una longitud para la tubería simple.

$$\frac{d^{2.63}}{L^{0.54}} = \frac{d_1^{2.63}}{L^{0.54}} + \frac{d_1^{2.63}}{L^{0.54}} + \frac{d_1^{2.63}}{L^{0.54}}$$

$$\frac{d^{2.63}}{L^{0.54}} = \frac{(0.4\ m)^{2.63}}{(40000\ m)^{0.54}} + \frac{(0.3\ m)^{2.63}}{(2000\ m)^{0.54}} + \frac{(0.2\ m)^{2.63}}{(3500\ m)^{0.54}}$$

$$\frac{d^{2.63}}{L^{0.54}} = 0.0018917$$

Se propone una longitud igual a 1 000 m para la tubería simple

$$d = [(0.0018917)(1000\ m)^{0.54}\ ]^{0.38}$$

$$d = 0.38\ m$$

Por lo tanto, la tubería simple equivalente tiene un diámetro de 0.28 m, una longitud de 1000 m, y una C = 100. Para encontrar la pérdida de carga total se utilizará la ecuación 6.10

$$h_f = \left(\frac{Q}{0.2785\ C} \right)^{1.852} \frac{L}{d^{4.87}}$$

$$h_f = \left[\frac{0.26562}{(0.2785)(100)} \right]^{1.852} \frac{1000}{(0.38)^{4.87}}$$

$$h_f = 19.98 \cong 20 \text{ m}$$

$$\Delta h = 20 \text{ m}$$

Con $\Delta h = 20$ se obtienen los gastos Q_1, Q_2 y Q_3 de la misma manera que en el ejemplo 6.7

El método del porcentaje en sistemas de tubería en paralelo - tiene los siguientes pasos a seguir:

Primero. Se asume un valor de la pérdida de carga total

Segundo. Con la Δh asumida se obtiene $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n$, - siendo i cualquier tramo de las tuberías en paralelo y el último tramo.

Tercero. Con S_i y d_i se obtiene Q_i utilizando la fórmula de - Hazen-Williams.

Cuarto. Se obtiene el gasto total al sumar los gastos de todos los tramos en paralelo. $\left(Q_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\right)$

Quinto. Si el gasto total es el 100%, se determina el porcentaje del gasto de cada tramo en paralelo.

Sexto. Con el gasto real de cualquiera de los tramos Q_i, el -

diámetro d_i y la longitud L_i se calcula la pérdida de carga total real.

Ejemplo 6.9 Resolver el ejemplo 6.8* por el método del porcentaje.

Solución Primero. Se asume un $\Delta h = 10$ m

Segundo. $S_1 = \frac{\Delta h}{L_1} = \frac{10 \text{ m}}{4000 \text{ m}} = 0.0025$

$$S_2 = \frac{10 \text{ m}}{2000 \text{ m}} = 0.005$$

$$S_3 = \frac{10 \text{ m}}{3500 \text{ m}} = 0.00286$$

Tercero.

$$Q_1 = 0.2785(100)(0.4)^{2.63}(0.0025)^{0.54} = 0.09844 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 0.2785(100)(0.3)^{2.63}(0.005)^{0.54} = 0.067170 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 0.2785(100)(0.2)^{2.63}(0.00286)^{0.54} = 0.017102 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_1 = 98.499 \text{ L.P.S.}$$

$$Q_2 = 67.170 \text{ L.P.S.}$$

$$Q_3 = 17.102 \text{ L.P.S.}$$

Cuarto.

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 182.72 \text{ L.P.S.}$$

Quinto.

$$182.72 \text{ L.P.S.} = 100\%$$

$$98.448 \text{ L.P.S.} = 53.88\%$$

$$67.170 \text{ L.P.S.} = 36.76\%$$

$$17.102 \text{ L.P.S.} = 9.36\ \%$$

* Los ejemplos se han llevado a cabo como si no se hubiera resuelto el ejemplo anterior

Sexto.

$$Q_{1real} = (265.62 \text{ L.P.S.})(0.5388) = 143.11 \text{ L.P.S.}$$

$$Q_{2real} = (265.62 \text{ L.P.S.})(0.3676) = 97.64 \text{ L.P.S.}$$

$$Q_{3real} = (265.62 \text{ L.P.S.})(0.0936) = 24.86 \text{ L.P.S.}$$

Séptimo. Con el gasto del primer tramo se encontrará la pérdida de carga total real.

$$h_{f_1} = \Delta h = S_1 L_1$$

$$\Delta h = (0.005(4000 \text{ m}) = 20 \text{ m}$$

$$\Delta h_{real} = 20 \text{ m}$$

REDES ABIERTAS

Una red abierta se define como un conjunto de líneas de conducción que se ramifican en un punto llamado nudo y no vuelven a unirse.

Si se tiene una red abierta de tres depósitos A, B y C y un nudo, de manera que la altura piezométrica está mas alto que el nivel del agua de los depósitos A y B (Figura 6.5), entonces el depósito A alimenta al depósito B y C, por lo que al hacer un balance en el nudo tendremos que:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad 6.36$$

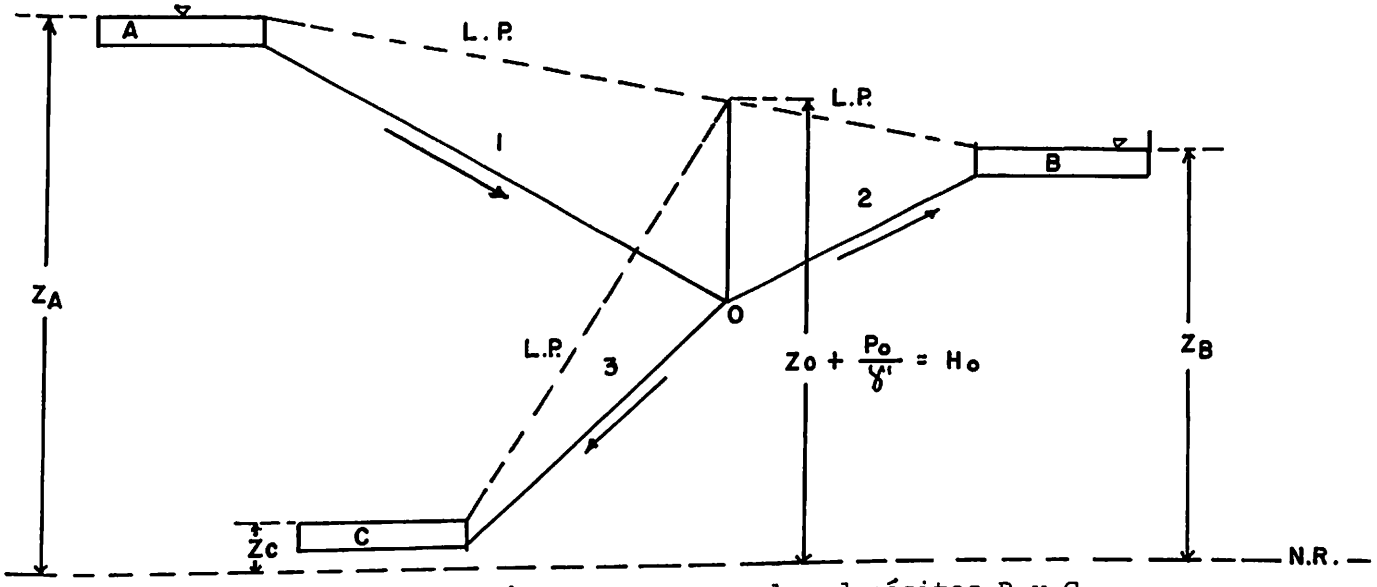


Fig. 6.5 Depósito A surte a los depósitos B y C

Si la altura del agua del piezómetro en el nudo está por debajo del nivel del agua de los depósitos A y B y por arriba del nivel del agua del depósito C (Figura 6.6), entonces los depósitos A y B alimentan al depósito C, por lo que al hacer un balance de gastos en el nudo tendremos que:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \qquad 6.37$$

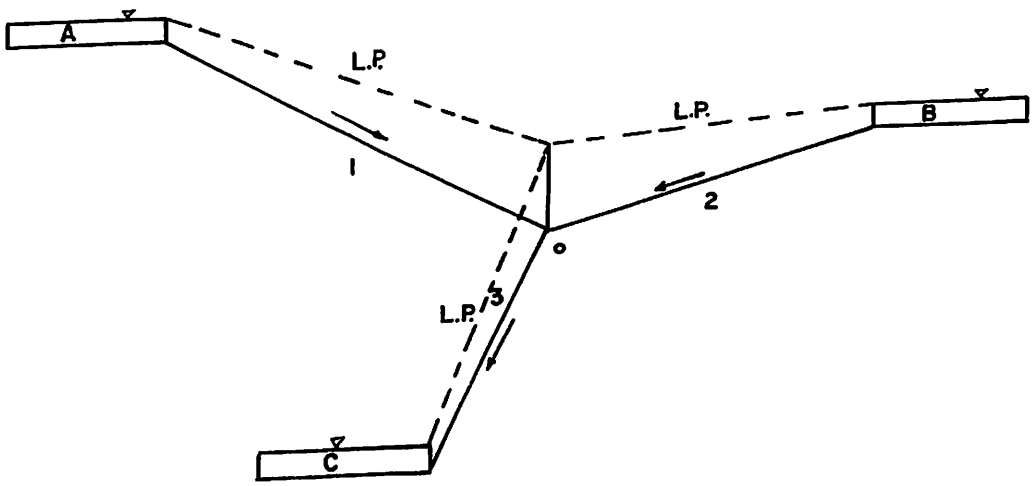


Fig. 6.6 Depósitos A y B alimentan al depósito C

En el caso de que la altura de la presión en el nudo O se encuentre al mismo nivel que la superficie del agua en el depósito B, entonces el depósito B no alimenta ni es alimentado, por lo que al hacer un balance de gastos en el nudo, tendremos que:

$$Q_1 = Q_3 \qquad 6.38$$

APLICACION DE LA FORMULA DE DARCY-WEISBACH EN REDES ABIERTAS CON UN NUDO

Al aplicar la ecuación de Bernoulli en la línea de conducción uno, en los ejemplos anteriores de redes abiertas, desde el nivel del depósito A hasta la frontera de la tubería uno y el nudo O.

$$Z_A = \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_{TOTA-B} \qquad 6.39$$

$$Z_A = \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \left[1 + f\ \frac{L_1}{d_1} + (\Sigma K_{LOC})_1\right]\ \frac{\bar{V}_1^2}{2g} \qquad 6.40$$

$$Z_A = \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \left[1 + f_1 \frac{L_1}{d_1} + (\Sigma K_{LOC})_1\right] \frac{8Q_1^2}{g\pi^2 d_1^4} \qquad 6.41$$

$$H_0 = \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 \qquad 6.42$$

$$C_1 = \left[1 + f_1 \frac{L_1}{d_1} + (\Sigma K_{LOC})\right] \frac{8}{g\pi^2 d^4} \qquad 6.43$$

Si se desprecian las pérdidas locales y la carga por velocidad al sistema de conducción por ser tubería larga, C_1 se transforma en:

$$C_1 = \frac{8 f_1 L_1}{g\pi^2 d_1^5} \qquad 6.43a$$

Donde C es variable si f varía. Sustituyendo las ecuaciones 6.42 y 6.43 en 6.41

$$Z_A = H_0 + C_1 Q_1^2 \qquad 6.44$$

Si despejamos H de la ecuación 6.44, se obtiene:

$$H = Z_A - C\,Q \qquad 6.45$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli en la línea de conducción dos, desde la frontera de la tubería dos y el nudo 0 hasta el ni - vel del agua del depósito B para el caso de que el depósito fue- ra alimentado.

$$\frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = Z_V + h_{TOT\ 0\text{-}B} \qquad 6.46$$

$$\frac{P_0}{\gamma} + Z_0 = Z_B + \left[-1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} + (\Sigma K_{LOC})_2\right] \frac{8Q_2^2}{g\pi^2 d_2^4} \qquad 6.47$$

$$C_2 = \left[-1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} + (\Sigma K_{LOC})_2\right] \frac{8}{g\pi^2 d_2^4} \qquad 6.48$$

Despreciando pérdidas locales y la carga por velocidad para - el caso de tubería larga.

$$C_2 = \frac{8 f_2 L_2}{g\pi^2 d_2^5} \qquad 6.48a$$

Al sustituir las ecuaciones 6.42 y 6.48 en 6.47

$$H_0 = Z_B + C_2 Q_2^2 \qquad 6.49$$

Para el caso de que el depósito B alimente, entonces la ecuacion de Bernoulli que se aplica en la línea de la tubería dos será desde el nivel del agua del depósito B hasta la frontera de la tubería dos y el nudo 0 por lo que:

$$Z_B + \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \frac{V}{2g} + h_{TOT_{B-0}} \qquad 6.50$$

$$Z_B = \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + [1 + f_1 \frac{L_2}{d_2} + (\Sigma K_{LOC})_2] \frac{8Q_2^2}{g\pi^2 d_2^4} \quad 6.51$$

$$C_2 = [1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} + (\Sigma K_{LOC})_2] \frac{8}{g\pi^2 d_2^4} \quad 6.52$$

Para tubería corta:

$$C = \frac{8f_2 L_2}{g\pi^2 d_2^5} \quad 6.52a$$

Si sustituimos las ecuaciones 6.42 y 6.52 en 6.51, se tiene:

$$Z_B = H_0 + C_2 Q_2^2 \quad 6.53$$

Al despejar H_0 de la ecuación 6.53 resulta:

$$H_0 = Z_B - C_2 Q_2^2 \quad 6.54$$

Observando las ecuaciones anteriores, se concluye que en las ecuaciones 6.45, 6.49 y 6.54 los términos del lado derecho se suman cuando el depósito es alimentado y se restan cuando alimenta, donde tiene una ligera variación cuando del depósito alimenta o es alimentado para el caso de tubería corta, y para el caso de tubería larga, c permanece constante.

Aplicando la ecuación de Bernoulli en la línea de conducción tres desde la frontera del nudo y la tubería tres hasta el nivel del agua del depósito c se tiene que:

$$H_0 = Z_C + C_3 Q_3^2 \quad 6.55$$

$$C_3 = [-1 + f_3 \frac{L_3}{d_3} + (\Sigma K_{LOC})] \frac{8}{g\pi^2 d_3^4} \quad 6.56$$

Para el caso de tubería corta:

$$C_3 = \frac{8f_3 L_3}{g\pi^2 d_3^5}$$

Por último se hace una gráfica de altura piezométrica en el nudo H contra gasto Q y se grafican las ecuaciones 6.45, 6.49 o 6.54 y 6.55 como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.10 Encontrar el gasto de cada línea de conducción de la Figura 6.6, si el depósito A tiene un nivel de 50 m, el B tiene un nivel de 45 m, y el C tiene un nivel de 20 m, todos medidos bajo un nivel referencial, donde L_1 = 2 km, L_2 = 1.5 Km, d_1 = 25.4 cm, d_2 = 20.30 cm y d_3 = 30.48 cm. El material de todos los conductos es de asbesto-cemento nuevo y la temperatura del agua es de 20°C. En el caso de cerral la línea de conducción uno. ¿Cuál será la distribución de gastos y la altura piezométrica en el nudo. La misma pregunta si se cierra la línea de conducción dos.

Solución Si se asume una altura piezométrica de 45 cm desde el nivel de referencia, para que el depósito B quede inactivo y así obtener el Q_1 y el Q_3. Se verá que el $Q_3 > Q_1$ por lo que se concluye que el depósito B tiene que alimentar también al depósito C, o sea que:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Utilizando las ecuaciones 6.45, 6.54 y 6.55 para tubería que se le desprecia pérdidas locales para diferentes gastos propuestos

$$H_0 = Z_A - C_1Q_1^2$$

$$H_0 = Z_B - C_2Q_2^2$$

$$H_0 = Z_C + C_3Q_3^2$$

$$C_i = \frac{8f_iL_i}{g\pi^2d_i^5}$$

LINEA UNO DE CONDUCCION

Q_1 (LPS)	H_0 (m)
0	0
30	47.6

LINEA DOS DE CONDUCCION

Q_2 (LPS)	H_0 (m)
0	0
30	38.7

LINEA TRES DE CONDUCCION

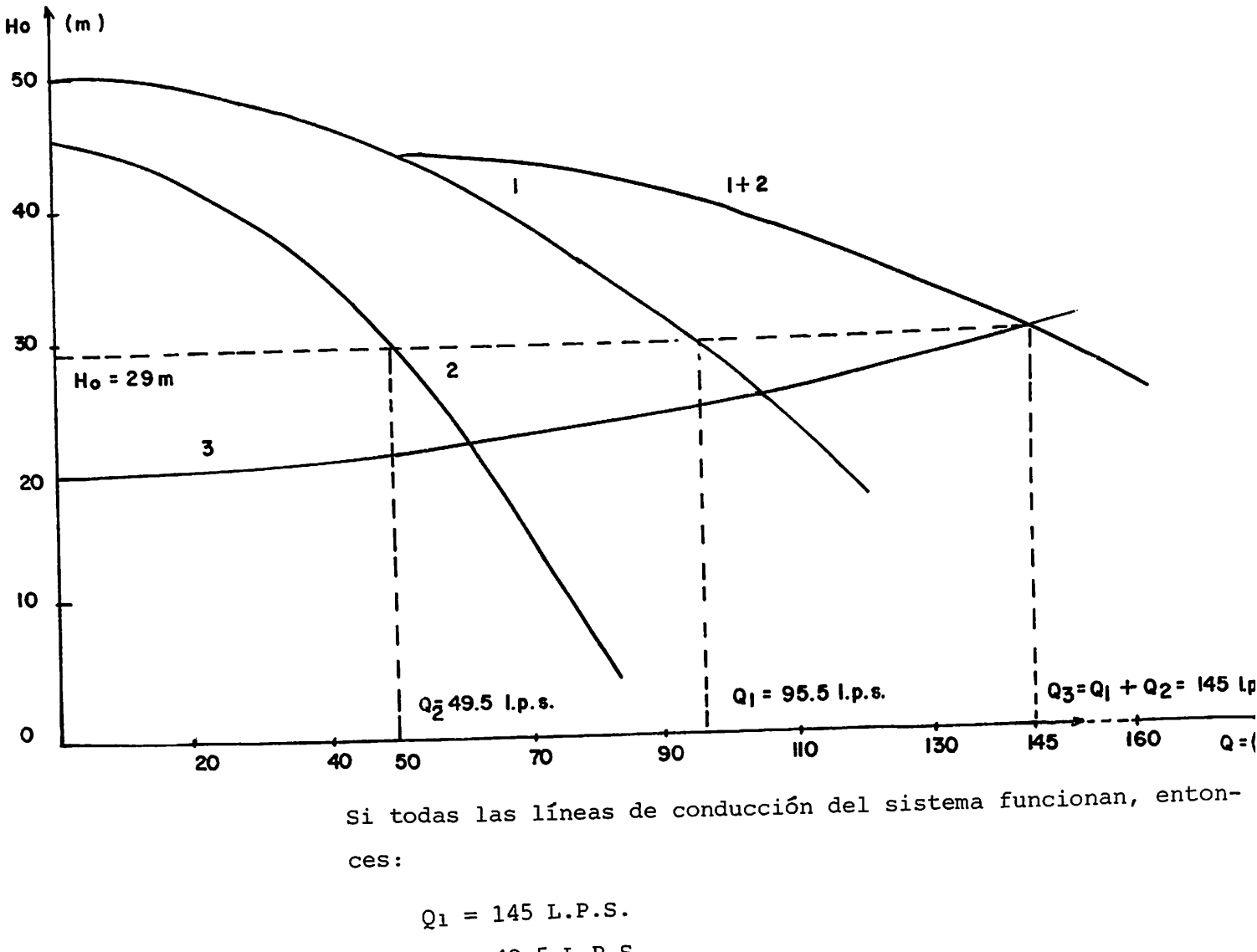
Q_3 (LPS)	H_0 (m)
0	0
30	20.5

LINEA UNO DE CONDUCCION	
Q_1 (LPS)	H_0 (m)
40	45.9
50	43.7
60	41.0
80	35.0
100	27.3
120	18.0

LINEA DOS DE CONDUCCION	
Q_2 (LPS)	H_0 (m)
40	34.1
50	29.2
60	22.7
80	7.0

LINEA TRES DE CONDUCCION	
Q_3 (LPS)	H_0 (m)
40	20.8
50	21.3
60	21.8
80	23.0
100	24.6
120	26.5
140	28.6

Se grafica el gasto con la altura piezométrica H_0



Si todas las líneas de conducción del sistema funcionan, entonces:

Q_1 = 145 L.P.S.

Q_2 = 49.5 L.P.S.

Q_3 = 95.5 L.P.S.

H_0 = 29 m

Si se cierra la línea uno:

$Q_2 = Q_3$ = 61.5 L.P.S.

Si se cierra la línea dos:

$Q_1 = Q_3$ = 105.5 L.P.S.

APLICACION DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS EN REDES ABIERTAS CON UN NUDO

Los pasos a seguir utilizando la fórmula de Hazen-Williams para la solución de redes abiertas con un nudo, son los siguientes:

Primero. Se asume una altura piezométrica en el nudo, de manera que uno de los depósitos de altura intermedia quede inactivo.

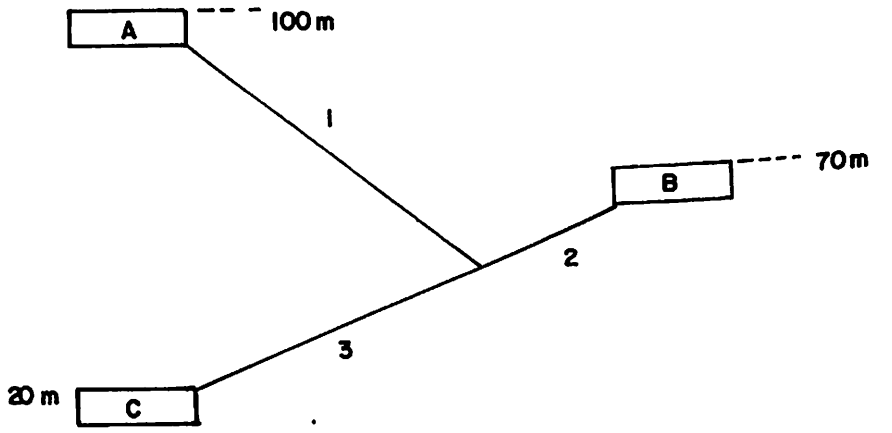
Segundo. Se determina la dirección del flujo y se cuantifica el gasto que entra al nudo y el gasto que sale de él.

Tercero. Si el gasto que entra al nudo es mayor que el gasto que sale de él, implica que el depósito inactivo es alimentado. Si es lo contrario, implica que alimenta.

Cuarto. Para el caso de que sea alimentado, se proponen alturas piezométricas mayores que el nivel del depósito inactivo, hasta que el gasto que entra al nudo sea aproximadamente igual al que sale.

Quinto. Para el caso de que el depósito inactivo alimente, entonces se proponen alturas piezométricas menores a su nivel, hasta que los gastos que entran al nudo se igualen en forma aproximada a los que salen.

Ejemplo 6.11 Encontrar los gastos y la dirección de flujo de cada una de las líneas de conducción de la siguiente red abierta.



	D A T O S		
i	d (cm)	L (Km)	C
1	40	2	130
2	30	1	130
3	20	3	130

Solución Se asume $H_0 = 70$ m

Por lo tanto, el depósito B quedó inactivo

$$h_{f_1} = 100 \text{ m} = 70 \text{ m} = 30 \text{ m}$$

$$S_1 = \frac{hf}{4} = \frac{30 \text{ m}}{2000 \text{ m}} = 0.015$$

$$Q_1 = 0.2785(130(0.4)^{2.63} \quad (0.015)^{0.54}$$

$$Q_1 = 336.72 \text{ L.P.S.}$$

$$h_{f_2} = 70 \text{ m} - 20 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

$$S_3 = \frac{50 \text{ m}}{3000 \text{ m}} = 0.017$$

$$Q_3 = 0.2785(130(0.4)^{2.63} (0.017)^{0.54}$$

$$Q_3 = 641.00 \text{ L.P.S.}$$

El gasto que entra al nudo

$$Qent = Q_1$$

El gasto que sale del nudo

$$Qsal = Q_2$$

Balance de los gastos en el nudo

$$Qent - Qsal = 304.28 \text{ L.P.S.}$$

Como el gasto de salida es mayor que el de entrada, implica que el depósito B alimenta, o sea que A y B alimentan a C. Por lo - tanto, se asume una altura peizométrica menor que el nivel del depósito B.

Se asume $H_0 = 60$ m

$h_{f_1} = 40$ m

$S_1 = 0.02$

$Q_1 = 393.32$ L.P.S.

$h_{f_2} = 10$ m

$S_2 = 0.01$

$Q_2 = 126.94$ L.P.S.

$h_{f_3} = 40$ m

$S_3 = 0.0133$

$Q_3 = 568.23$ L.P.S.

$Q_{ent} = 520.26$ L.P.S.

$Q_{sal} = Q_3$

$Q_{sal} = 568.23$ L.P.S.

$Q_{ent} = -47.97$ L.P.S.

El signo negativo nos indica que sigue siendo mayor el gasto - que sale del nudo, por lo que habrá que bajar más la altura - piezométrica.

Se asume $H_0 = 57$ m

$h_{f_1} = 43$ m

$S_1 = 0.0215$

$Q_1 = 408.98$ L.P.S.

$h_{f2} = 13$ m

$S_2 = 0.013$

$Q_2 = 146.26$ L.P.S.

$h_{f_3} = 37$ m

$S_3 = 0.012$

$Q_3 = 544.81$ L.P.S.

$Qent = Q_1 + Q_2$

$Qent = 555.24$

$Qsal = Q_3$

$Qsal = 544.81$ L.P.S.

$Qent - Qsal = 10.43$

El signo positivo nos indica que ahora es mayor el gasto que entra al nudo que el que sale, por lo que habrá que subir un poco la altura piezométrica.

Se asume $H_0 = 57.52$ m

$h_{f_1} = 42.6$ m

$S_1 = 0.0212$

$Q_1 = 406.30$ L.P.S.

$h_{f_2} = 12.48$ m

$S_2 = 0.01245$

$Q_2 = 143.07$ L.P.S.

$h_{f_3} = 37.52$

$S_3 = 0.0125$

$Q_3 = 548.93$ L.P.S.

$Qent = Q_1 + Q_2$

$Qent = 548.37$

$Qsal = Q$

$Qsal = 548.93$ L.P.S.

$Qent - Qsal = 0.44$ L.P.S.

En esta última asunción el gasto que entra al nudo aproximadamente es igual al que sale, por lo que el depósito A y B alimenta al C y la distribución de gastos en la línea será:

Q_1 = 406.30 L.P.S.

Q_2 = 134.07 L.P.S.

Q_3 = 558.93 L.P.S.

APLICACION DE LA FORMULA DE DARCY-WEISBACH EN REDES ABIERTAS CON DOS NUDOS

En un sistema de conducción de red abierta con dos nudos tal como se observa en la Figura 6.7, la diferencia que se tiene respecto al sistema de red abierta con un nudo, es que tiene una línea de conducción entre los dos nudos que no existía anteriormente, por lo que habrá una nueva ecuación que se obtiene al aplicar la ecuación de Bernoulli en la línea de conducción que une a los dos nudos.

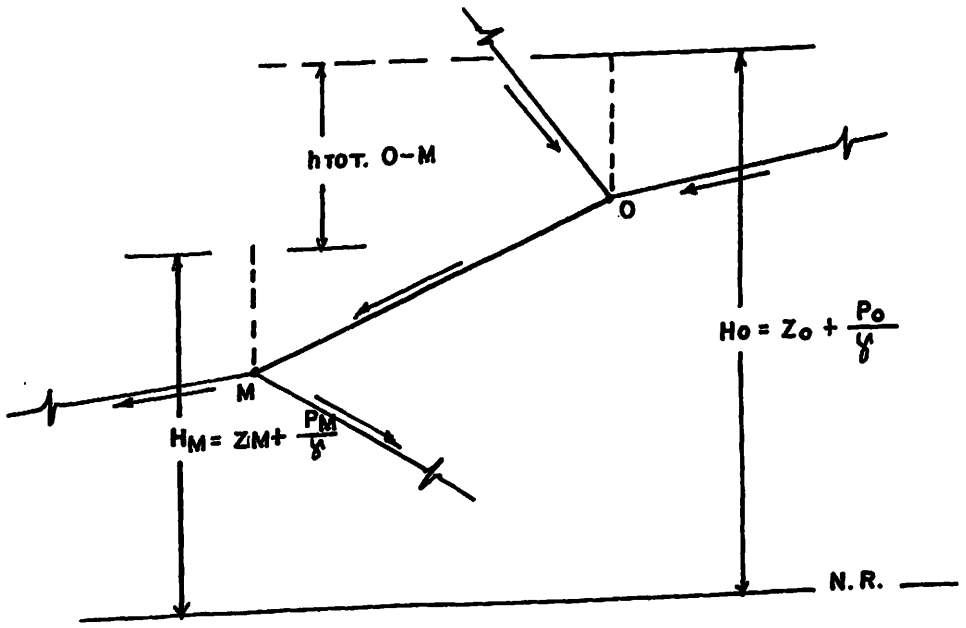


Fig. 6.7 Parte de un sistema de red abierta con dos nudos (Nudo 0 y Nudo M)

$$hTOT_{A-B} = \frac{P_0}{\gamma} + Z_0 + \left(\frac{P_M}{\gamma} + Z_M \right) \qquad 6.58$$

$$H_M = \frac{P_M}{\gamma} + Z_M \qquad 6.59$$

Sustituyendo la ecuación 6.42 y 6.59 en 6.58

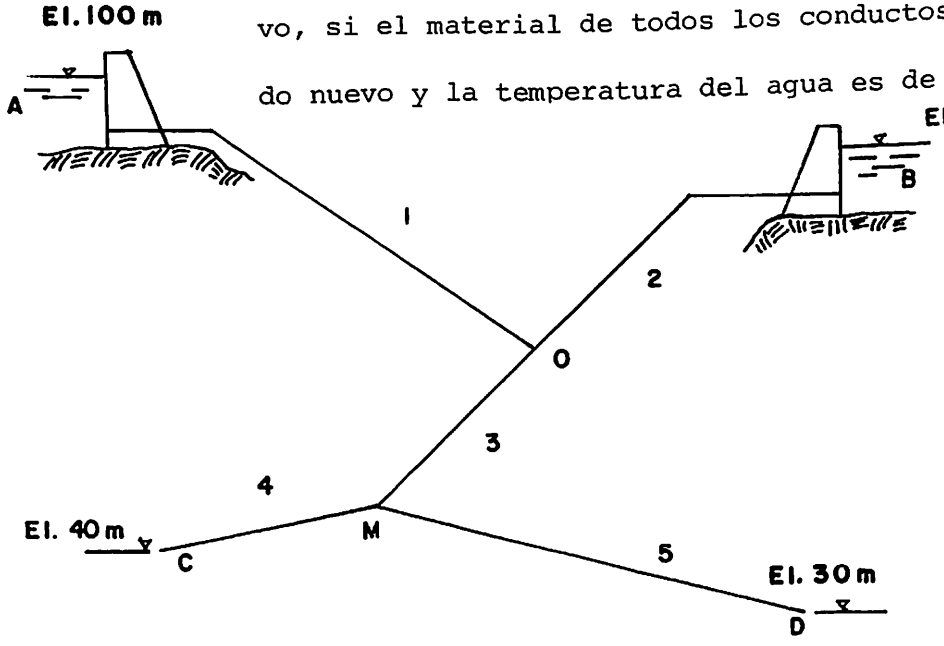
$$H_{TOT_{O-M}} = H_0 - H_M \qquad 6.60$$

$$H_{TOT_{O-M}} = \left(f \frac{L}{d} + \Sigma K_{LOC}\right) \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \qquad 6.61$$

Siendo Q, L, d, f, y ΣK_{LOC}. los términos de la línea de conducción que se encuentran entre los dos nudos.

Para poder explicar con detalle la solución de los problemas con dos nudos, se hará un ejemplo donde se describirá el método en forma minuciosa.

Ejemplo 6.12 Encontrar los gastos que aportan dos presas para llevar agua a dos zonas de cultivo, y los gastos que llegan al área de cultivo, si el material de todos los conductos son de fierro fundido nuevo y la temperatura del agua es de 20°C



DATOS DE LOS CONDUCTOS

i	d (cm)	L (Km)
1	30	2.0
2	40	1.0
3	50	1.0
4	30	0.9
5	30	3.0

Solución Para encontrar la curva característica del conducto 1, 2, 4 y 5 se utilizarán las siguientes ecuaciones:

$$H_0 = Z_A - C_1Q_1^2$$

$$H_0 = Z_B - C_2Q_2^2$$

$$H_0 = Z_C + C_4Q_4^2$$

$$H_0 = Z_D + C_5Q_5^2$$

$$C_i = \frac{8f_iL_i}{g\pi^2d_i^5}$$

Las dos primeras ecuaciones tienen el signo negativo porque alimentan y las otras dos tienen signo positivo porque son alimentados. Si se establece el nivel de referencia donde está la elevación cero metros, y se proponen varios gastos a cada línea de conducción se formarán las siguientes tablas.

LINEA DE CONDUCCION UNO

Q_1 (LPS)	H_0 (m)
0	100.0
25	99.0
50	96.5
75	92.3
100	86.6
125	79.3
150	70.2
200	47.5
225	33.6

LINEA DE CONDUCCION DOS

Q_2 (LPS)	H_0 (m)
0	90.0
50	89.6
100	88.4
150	86.6
200	84.1
250	80.8
300	76.8
350	72.2

LINEA DE CONDUCCION CUATRO

Q_4 (LPS)	H_0 (m)
0	40.0
50	41.6
100	46.0
150	53.3
200	63.6
250	76.7
300	92.6

LINEA DE CONDUCCION CINCO

Q_5 (LPS)	H_0 (m)
0	30.0
25	31.4
50	35.2
75	41.4
100	50.05
125	61.2
150	74.5
175	90.4

El siguiente paso será construir otra tabal para la línea de - conducción tres, que se encuentra entre los dos nudos, utilizando las siguientes fórmulas:

$$H_{TOT_{O-M}} = h_{f_3}$$

$$h_{f_3} = \frac{8Q\ f_3 L_3}{g\pi^2 d_3^5}$$

Se proponen valores del Q_3 para obtener h_{f_3} y se construye la - siguiente tabla:

LINEA DE CONDUCCION TRES

Q_3 (LPS)	h_{f_3} (m)
0	0
50	0.12
100	0.47
150	1.05
200	1.87
250	2.90
300	4.1
350	5.6
400	7.3

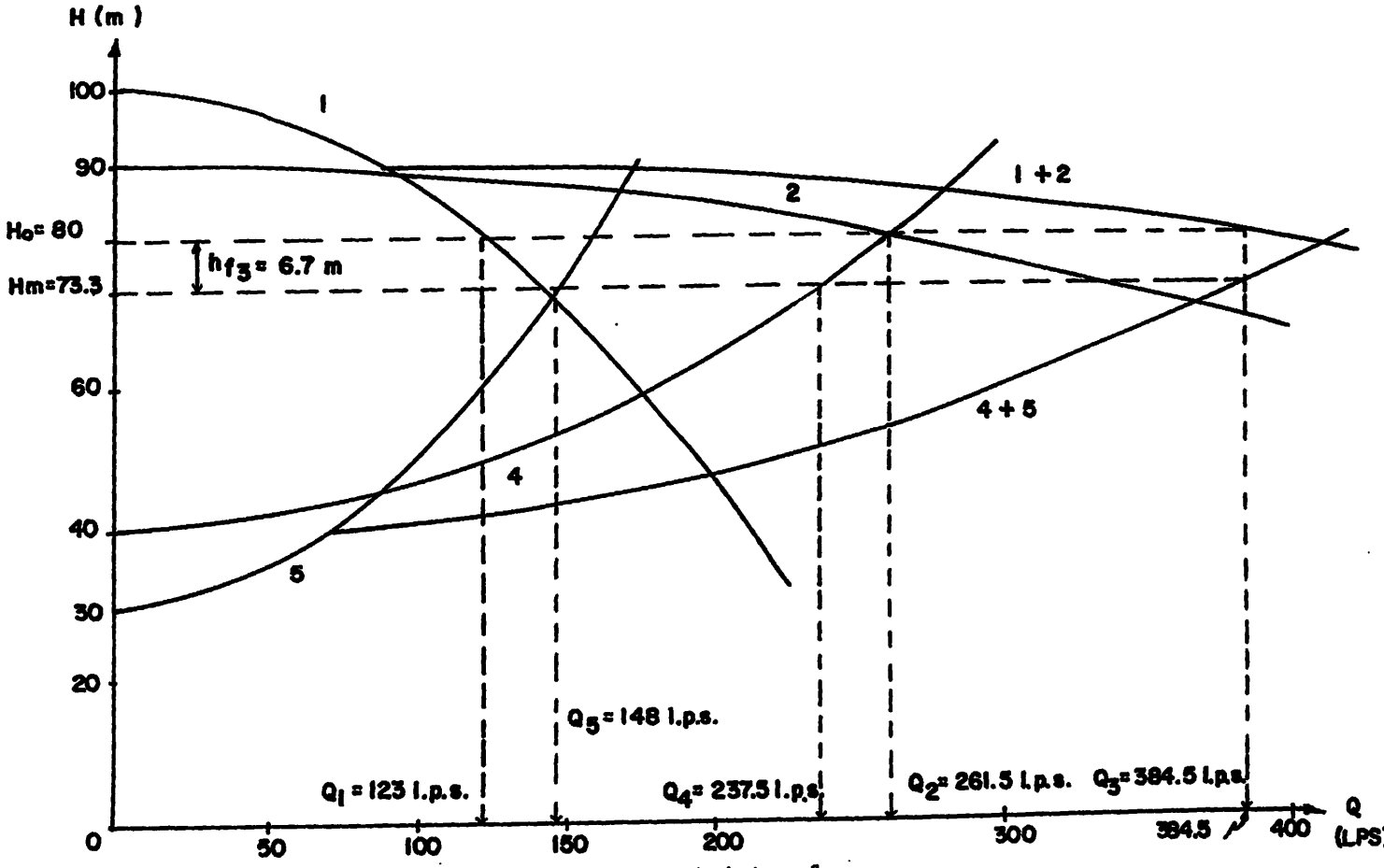
Con las tablas de las líneas de conducción una, dos, cuatro y - cinco, se constuye la gráfica uno, considerando lo siguiente:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$
$$Q_3 = Q_4 + Q_5$$

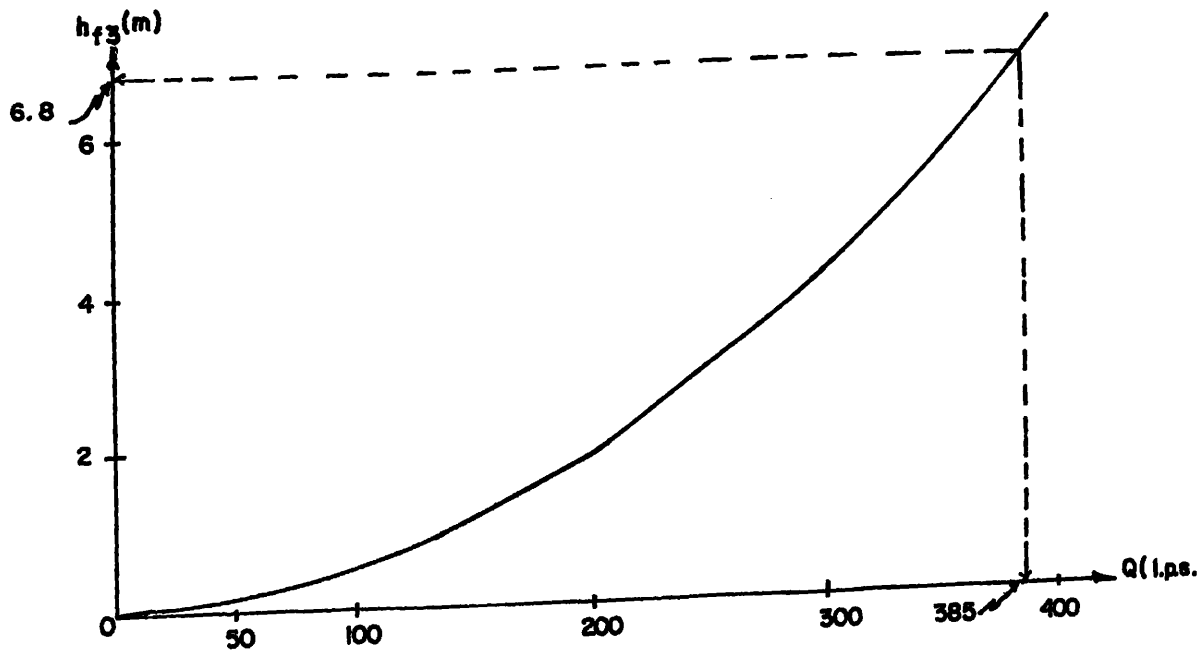
Con la tabla de la línea de conducción tres se construye la grá fica dos.

Para podersolucionar el problema mediante las gráficas se efectuarán los siguientes pasos:

Primero. Se busca cualquier gasto en la gráfica dos y se encuentra la pérdida de carga en el conducto tres, por ejemplo, para un Q = 300 LPS existe un h_{f_3} = 4.1 m en la línea de conducción tres.



Gráfica 1



Gráfica 2

Segundo. En la gráfica uno se busca una separación vertical entre la curva 1 + 2 y 4 + 5 igual a h_{f3} (encontrado en la gráfica dos).

Tercero. En la gráfica uno, se encuentra el gasto que da esa separación, por lo tanto, con 4.1 de separación vertical entre las dos curvas da un gasto de 395 LPS.

Cuarto. Se compara el gasto propuesto en el primer paso con el gasto obtenido en el tercero; si los gastos son diferentes como los del ejemplo (300 LPS $\neq$ 395 LPS) se vuelve al primer paso y se repite el mismo procedimiento hasta que los gastos sean aproximadamente iguales.

Para este problema, se vió que proponiendo un gasto de 385 LPS en la gráfica dos, da un h_{f3} = 6.8 m y buscando la separación vertical de las curvas 1 + 2 y 4 + 5 de la gráfica uno, da un gasto de 384.5 LPS, por lo que la solución es:

Q_3 = 384.5 LPS

La obtención de los demás gastos y las alturas piezométricas, se detalla en la gráfica uno con la linea discontinua.

Q_1 = 123 LPS

Q_2 = 261.5 LPS

Q_3 = 237.5 LPS

Q_4 = 148 LPS

H_0 = 80 m

H_M = 73.3 m

h_{f_1} = 100 m - 80 m = 20 m

h_{f_2} = 90 m - 80 m = 10 m

h_{f_3} = 80 m = 73.3 m = 6.7 m

h_{f_4} = 73.3 m - 40 m = 33.3 m

h_{f_5} = 73.3 m - 30m = 43.3 m

APLICACION DE LA FORMULA DE HAZEN-WILLIAMS EN REDES ABIERTAS CON DOS NUDOS

De la misma manera en que se detalló como solucionar los problemas de redes abiertas con dos nudos aplicando la ecuación de Darcy-Weisbach, se hará aplicando la ecuación de Hazen-Williams, auxiliándonos del siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.12 Encontrar los gastos que llegan a las tres áreas de cultivo así como también el gasto que aporta la presa, si las cinco líneas de conducción de la figura son de asbesto-cemento nuevo.

Solución Se asume un $H_0 = 70$ m

$$h_{f_1} = 40 \text{ m}$$

$$S_1 = 0.02$$

$$Q_1 = 707.32 \text{ L.P.S.}$$

Como la línea dos quedó inactiva

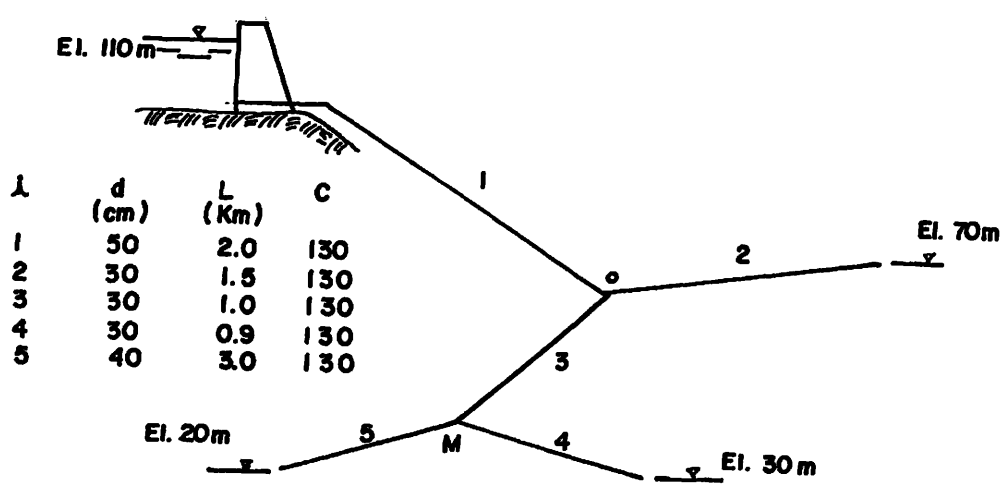
$$Q_1 = Q_3$$

$$S_1 = \left(\frac{Q_3}{0.2785\ C\ d^{2.63}} \right)^{1.852}$$

$$S_1 = \left[\frac{0.70732}{(0.2785)(130)(0.3)^{2.63}} \right]^{1.852} = 0.24069$$

$$h_{f_3} = S_3 L_3 = (0.24069)(100 \text{ m}) = 240.69 \text{ m}$$

$$H_M = H_0 - h_{f_3} = 70 \text{ m} - 240.69 \text{ m} = -170.69 \text{ m}$$



j	d (cm)	L (Km)	C
1	50	2.0	130
2	30	1.5	130
3	30	1.0	130
4	30	0.9	130
5	40	3.0	130

El signo negativo del H_M indica que existe un vacío muy grande, de manera que la altura piezométrica está a una distancia de - 170.7 m por debajo del nivel de referencia debido al gasto tan grande que aportó la línea de conducción uno a la tres, por lo que se subirá el nivel del piezómetro en 0 y esto implica que - el conducto dos se usa para alimentar.

Se asume un $H_0 = 100$ m

$h_{f_1} = 10$ m

$S_1 = 0.005$

$Q_1 = 334.6$ LPS

Como la línea de conducción uno alimenta al dos y al tres:

$Q_1 = Q_2 + Q_3$

$Q_3 = Q_1 - Q_2$

$h_{f_2} = 30$ m

$S_2 = 0.02$

$Q_2 = 184.56$ LPS

$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 334.6$ LPS $- 184.56$ LPS $= 150$ LPS

$S_3 = 0.0136$

$h_{f_3} = 13.62$ m

$H_M = 100$ m $- 13.62$ m $= 83.38$ m

$h_{f_4} = 56.38$ m

$S_4 = 0.06264$

$Q_4 = 421.91$ LPS

$h_{f_5} = 66.38$ m

$S_5 = 0.02212$

$Q_5 = 415.37$ LPS

$Q_3 = Q_4 + Q_5 = 341.91$ LPS $+ 415.37$ LPS $= 757.28$ LPS

Lo que entra al nudo o debe ser igual a lo que sale del nudo M.

Lo que entra al nudo $0 = Q_1 - Q_2 = 150$ LPS

Lo que sale del nudo M = $Q_4 + Q_5$ = 757.28 LPS

$Qent_0 - Q_{sal}$ = -607.28 LPS

Como $Q_{salM} > Qent_0$, habrá que bajar H_0 con el fin de aumentar $Qent_0$ y disminuir Q_{salM}

H_0 = 91 m

h_{f_1} = 19 m

S_1 = 0.0095

Q_1 = 473.2 LPS

h_{f_2} = 21 m

S_2 = 0.014

Q_2 = 152.23 LPS

Q_3 = 320.97 LPS

S_3 = 0.0557

h_{f_3} = 55.71 m

H_M = 35.29

h_{f_4} = 5.29 m

S_4 = 0.00587

Q_4 = 95.26 LPS

h_{f_5} = 15.287

S_5 = 0.02212

Q_5 = 187.95

Q_3 =

$Qent_0 - Q_{salM}$ = 320.97 LPS - 283.21 LPS = 37.76 LPS

Con el resultado anterior, habrá que subir un poquito H_0

H_0 = 91.317

Q_1 = 468.9 LPS

Q_2 = 153.47 LPS

$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 315.43$

$Q_4 = 114$ LPS

$Q_5 = 201.42$ LPS

$Q_3 = Q_4 + Q_5 = 315.42$

$Qent_0 - QsalM = 0.01$ LPS

SALIDAS MULTIPLES UTILIZANDO HAZEN-WILLIAMS

Si se tiene un conducto con salidas múltiples como se ilustra en la Figura 6.8, y se tienen las siguientes condiciones:

a) En cada salida el gasto es constante

b) Los espacios entre las salidas son iguales

c) Se desprecia pérdidas locales en las salidas

d) El diámetro de conducto es constante.

Q: es el gasto antes de pasar por la primera salida lateral

Q_T: es el gasto en tránsito, o sea, el gasto que queda des - pués de que Q haya pasado por todas las salidas laterales

q : es el gasto de cada salida lateral ($q_1 = q_2 = \ldots = q_i = \ldots = q_n$)

e : es el espacio entre las salidas laterales

$$Q = nq + Q_T \qquad 6.62$$

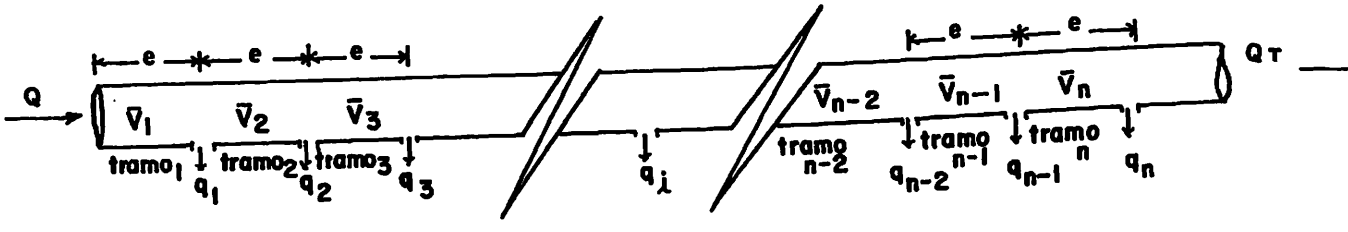


Fig. 6.8 Conducto con salidas múltiples

La velocidad en el primer tramo:

$$\bar{V}_1 = \frac{4Q}{\pi d^2} \qquad 6.63$$

Si sustituimos la ecuación 6.62 en 6.63 , se obtiene:

$$\bar{V}_1 = \frac{4(nq + Q_T)}{\pi d^2} \qquad 6.64$$

$$\bar{V}_1 = \frac{4nq}{\pi d^2} + \frac{4Q}{\pi d^2} \qquad 6.65$$

$$\delta = \frac{4q}{\pi d^2} \qquad 6.66$$

$$\xi = \frac{4Q_T}{\pi d^2} \qquad 6.67$$

Sustituyendo las ecuaciones 6.66 y 6.66 en 6.65

$$\bar{V}_1 = n + \xi \qquad 6.68$$

La velocidad en el segundo tramo:

$$\bar{V}_2 = (n - 1)\delta + \xi \qquad 6.69$$

La velocidad en el tercer tramo:

$$\bar{V}_3 = (n - 2)\delta + \xi \qquad 6.70$$

La velocidad en el tramo i

$$\bar{V}_i = [N - (i - 1)]\delta + \xi \qquad 6.71$$

La velocidad en el penúltimo tramo:

$$\bar{V}_{n-1} = 2 + \xi \qquad 6.72$$

La velocidad en el último tramo:

$$\bar{V}_n = \delta + \xi \qquad 6.73$$

La ecuación de Hazen-Williams:

$$h_f = \left(\frac{1}{0.2785\ C\ d^{2.63}} \right)^{1.852} Q^{1.852}\ L \qquad 6.74$$

$$K = \left(\frac{1}{0.2785\ C\ d} \right) \qquad 6.75$$

Sustituyendo la ecuación 6.75 en 6.74

$$h_f = K\ Q^{1.852}\ L \qquad 6.76$$

La pérdida de carga en el primer tramo:

$$h_{f_1} = K\ Q^{1.852}\ e \qquad 6.77$$

Al sustituir la ecuación 6.62 en 6.77

$$h_{f_i} = K(nq + Q_T)^{1.852}\ e \qquad 6.78$$

La pérdida de carga en el segundo tramo

$$h_{f_2} = K[(n - 1)q + Q_T]\ e \qquad 6.79$$

La pérdida de carga en el tramo

$$h_{fi} = K[N - (i - 1)q + Q_T]^{1.852}\ e \qquad 6.80$$

La pérdida de carga en el penúltimo tramo

$$h_{f\ 1} = K(2q + Q_T)^{1.852}\ \ e \qquad 6.81$$

La pérdida de carga en el último tramo

$$h_{fn} = K(q + Q_T)^{1.852}\ \ e \qquad 6.82$$

La pérdida de carga total será

$$h_{fTOT} = h_{f_1} + h_{f_2} + \ldots + h_{fi} + \ldots + h_{fn} \qquad 6.83$$

$$h_{fTOT} = \sum_{i=1}^{n} h_{fi} \qquad 6.84$$

Sustituyendo la ecuación 6.80 en 6.84

$$h_{fTOT} = Ke \sum_{i=1}^{n} \{[N - (i - 1)]\ q + Q_T\}^{1.852} \qquad 6.85$$

$$\sum_{i=1}^{n} [N - (i - 1)q + Q_T]^{1.852} = \sum_{i=1}^{n} (iq + Q_T)^{1.852} \qquad 6.86$$

Sustituyendo la ecuación 6.86 en 6.85

$$h_{fTOT} = Ke \sum_{i=1}^{n} (iq + Q_T)^{1.852} \qquad 6.87$$

$$h_{f_{TOT}} = Ke \sum_{i=1}^{n} (iq + Q_T) \qquad 6.87$$

Si se sustituye la ecuación 6.75 en 6.87 , obtenemos:

$$h_{f_{TOT}} = \left(\frac{1}{0.2785\ C\ d^{2.63}} \right)^{1.852} e \sum_{i=1}^{n} (iq + Q_T)^{1.852} \qquad 6.88$$

En el caso de que no exista gasto en tránsito ($Q_T = 0$)

$$h_{f_{TOT}} = \left(\frac{1}{0.2785\ C\ d^{2.63}} \right)^{1.852} e \sum_{i=1}^{n} i^{1.852} \qquad 6.89$$

Ejemplo 6.13 Se utiliza para regar un sistema de riego por surcos, una tubería de aluminio de compuertas (C = 140) y la fuente de abastecimiento es un canal. La tubería de compuertas tiene un diámetro de 6 pulgadas, una longitud de 45.72 m, con 45 orificios igualmente espaciados con una distancia entre un orificio y otro de 1.016 m; el gasto de cada orificio es de 0.425 LPS y la presión en el último orificio debe de ser de 15.24 cm de columna de agua. ¿Qué altura H debe tener (ver figura) si la compuerta de control está totalmente abierta? Hay que tomar en cuenta la pérdida de entrada del conducto ($K_{ent} = 1$) y las pérdidas del tramo que une al canal con la tubería de compuertas que tiene una longitud de 3 m y un diámetro de 6 pulgadas contando con el codo de 90° de radio grande. La diferencia de altura entre la entrada del conducto y al final de la tubería de compuertas es de 20 cm. Desprecie pérdidas locales en la tubería de compuertas.

Solución Aplicando la ecuación de Bernoulli en la superficie libre del canal y al final de la tubería de compuertas:

$Q = 19.125$ LPS

$H = 0.1524\ m + h_{TOT\ primer\ tramo} + H_{TOT\ tubería\ de\ comp.} - 0.2\ m$

$$h_{TOT\ primer\ tramo} = h_{f\ primer\ tramo} + K_{ent} \frac{\bar{V}^2}{2g} + K_{codo\ 90°} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$h_{f\ primer\ tramo} = (S)(L)_{primer\ tramo}$$

$$S_{primer\ tramo} = \left(\frac{Q}{0.2785 C d^{2.63}} \right)^{1.852} = \left(\frac{0.019125}{0.2785(130(0.1524)^{2.63})} \right)^{1.852}$$

$S_{primer\ tramo} = 0.00813$

$h_{f\,primer\ tramo} = (0.00813)(3\ m) = 0.0244\ m$

$h_{TOT\ primer\ tramo} = 0.0244\ m + (1)(0.056\ m) + (0.07(0.056)$

$h_{TOT\ primer\ tramo} = 0.1196\ m$

$$h_{TOT\ tubería\ de\ compuerta} = \left(\frac{q}{0.2785 C\ d^{2.63}} \right)^{1.852} \rho \sum_{i=1}^{n} i^{1.852}$$

$$h_{TOT\ tubería\ de\ compuerta} = \left(\frac{}{0.2785(130(0.1524)^{2.63}} \right)^{1.852}$$

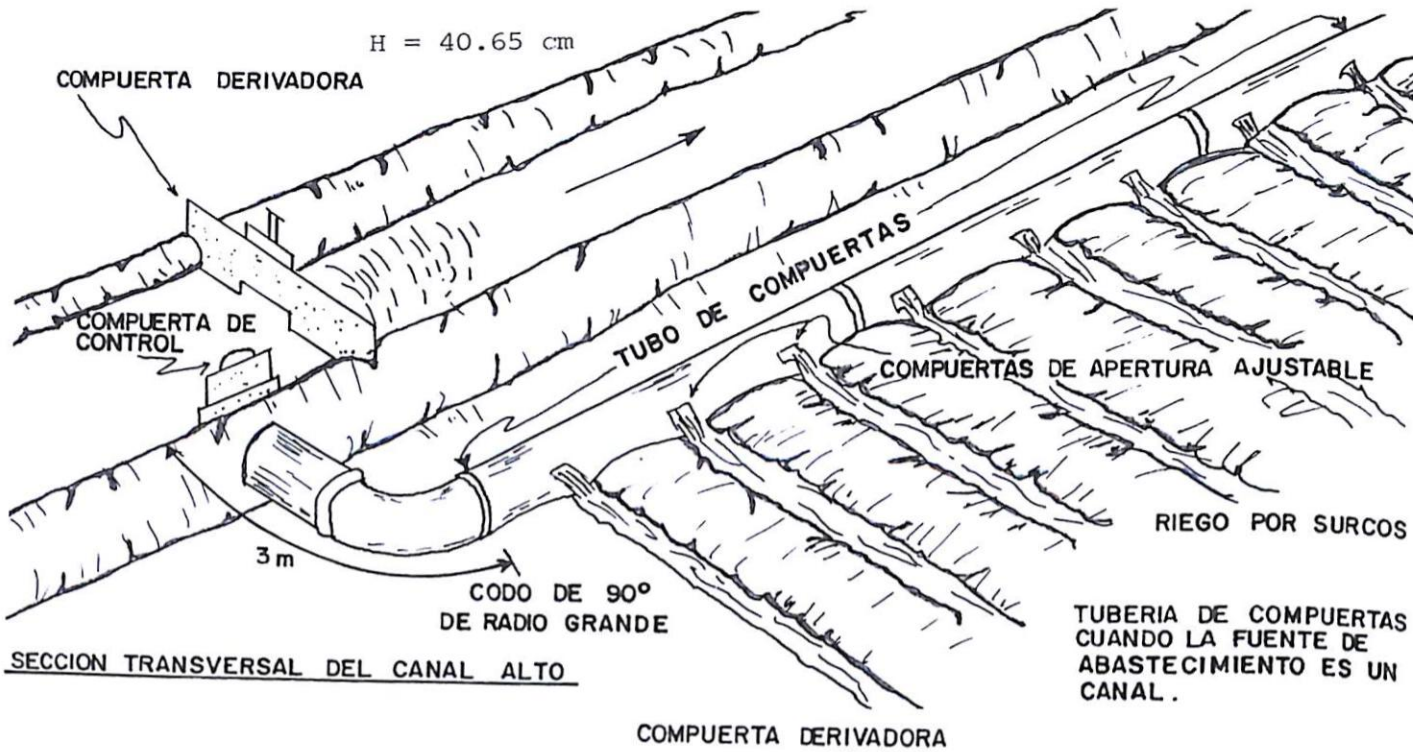
$$(1.016)(18769.5)$$

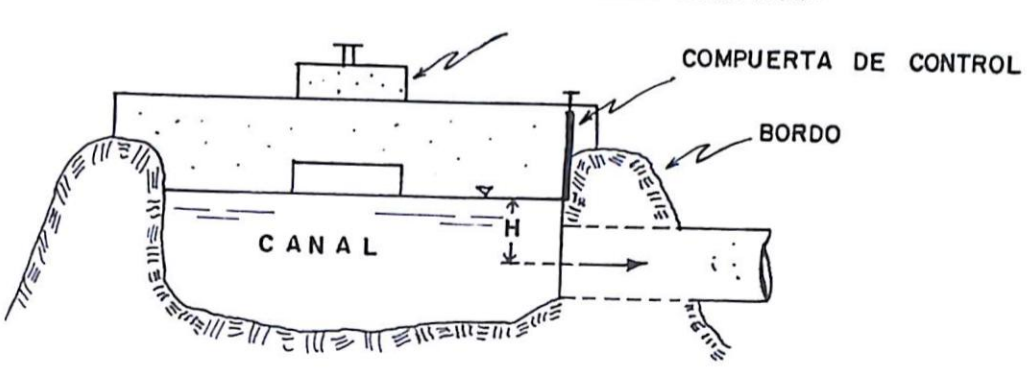
$h_{TOT\ tubería\ de\ compuerta} = 0.1345\ m$

$H = 0.1524\ m + 0.1196\ m + 0.1345\ m$

$H = 0.4065\ m$

$H = 40.65\ cm$





CORTE

CAPITULO VII

CONDUCTOS ABIERTOS

El estudio del flujo en conductos abiertos o canales tiene su origen en los cauces naturales por donde fluye el agua. Los primeros pobladores al dedicarse a la agricultura, se establecieron en las orillas de los ríos, viéndose en la necesidad de construir obras para derivar el agua de su cauce natural, la mayoría de estas obras fueron zanjas que las utilizaron principalmente en la irrigación.

Actualmente, el estudio y utilización de conductos abiertos es muy amplia, comprende, por ejemplo: red de drenaje en las ciudades (pluvial y sanitario), conducción de agua con desechos industriales, conducción y distribución del agua mediante redes de canales en los distritos y unidades de riego, etc.

El flujo en un canal se caracteriza en que la única presión que actúa sobre el líquido que fluye es la presión atmosférica, por lo que el flujo se debe a la acción de la gravedad debido a cierta pendiente del canal (ver Figura 7.1).

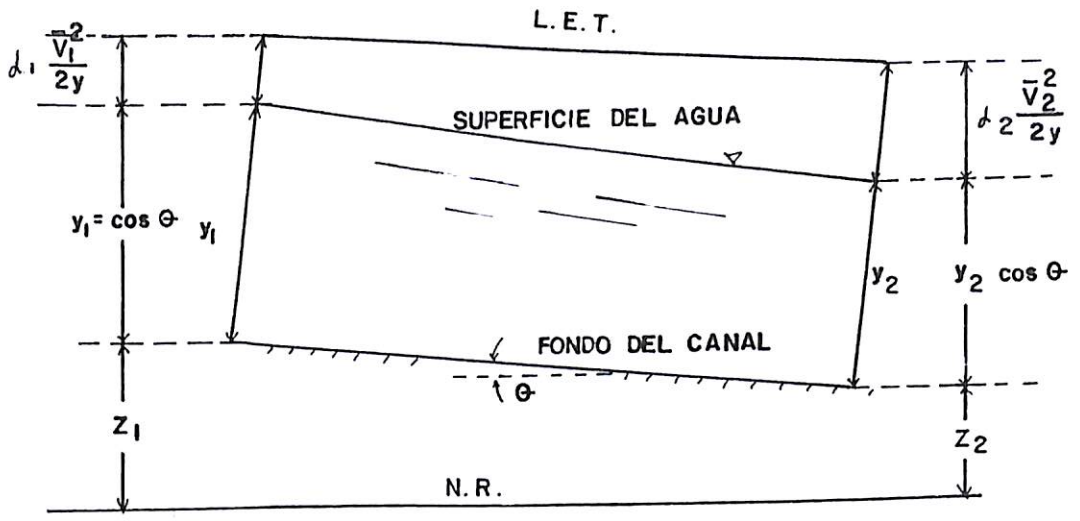


Fig. 7.1 Flujo en un canal

CLASIFICACION DE FLUJOS EN CANALES

Los flujos en canales se pueden clasificar como se muestra en la siguiente forma:

A. Flujo permanente
   1. Flujo uniforme
   2. Flujo variado
      a) Flujo gradualmente variado
         1) acelerado
         2) retardado
      b) Flujo bruscamente variado
         1) acelerado
         2) retardado

B. Flujo no permanente
   1. Flujo uniforme (muy raro)
   2. Flujo variado
      a) Flujo gradualmente variado

1) acelerado

2) retardado

b) Flujo bruscamente variado

1) acelerado

2) retardado

La diferencia que existe entre un flujo permanente y no permanente, como ya se explicó en el capítulo cuatro, consiste en que - el flujo permanente las características del movimiento (para el caso de canales, serán la profundidad del flujo y la velocidad) es - tán en función exclusivamente del cauce (del punto) y no del tiempo y esto implica que el gasto es constante, mientras que en el - flujo no permanente las características del movimiento están en - función del cauce y del tiempo y esto implica que el gasto del canal varía con el tiempo. En este capítulo solamente se estudiará el flujo permanente.

Flujo uniforme

Ocurre cuando la profundidad del líquido no varía a lo largo de la dirección del movimiento como se ilustra en la Figura 7.2 ($y_1 = y_2$).

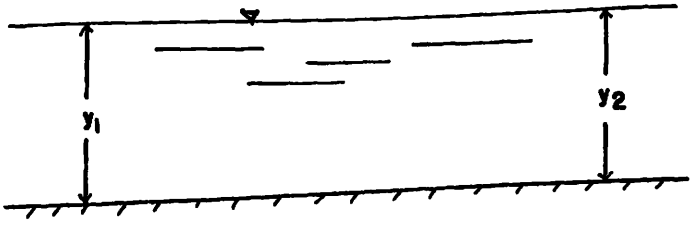


Fig. 7.2 Flujo uniforme en un canal

Flujo variado.

Se presenta cuando la profundidad del líquido varía a lo largo de la dirección del flujo. En la Figura 7.3 se ilustran los tipos de flujo variado que pueden ocurrir.

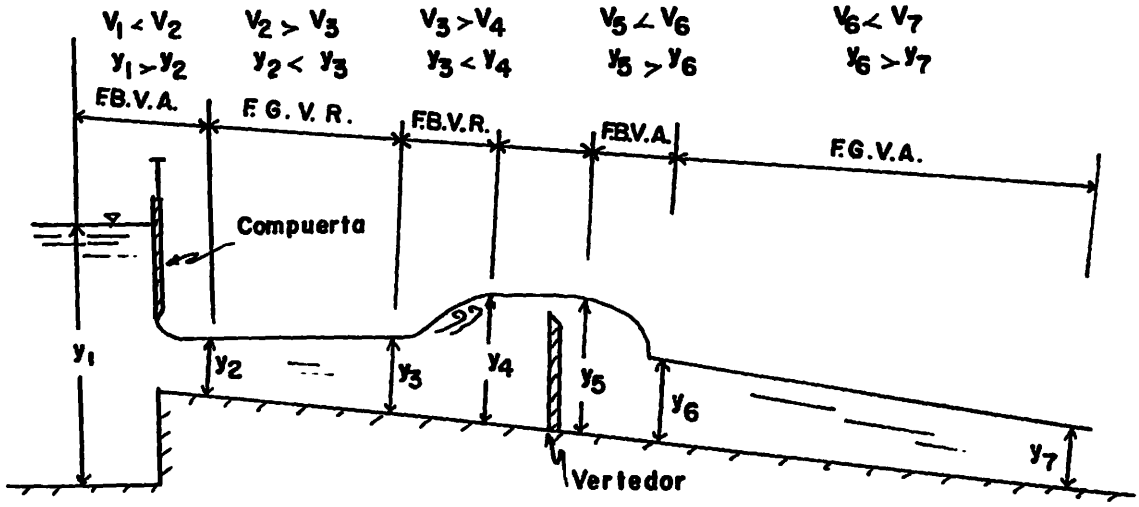


Fig. 7.3 Tipos de flujo variado

REGIMEN DE FLUJO

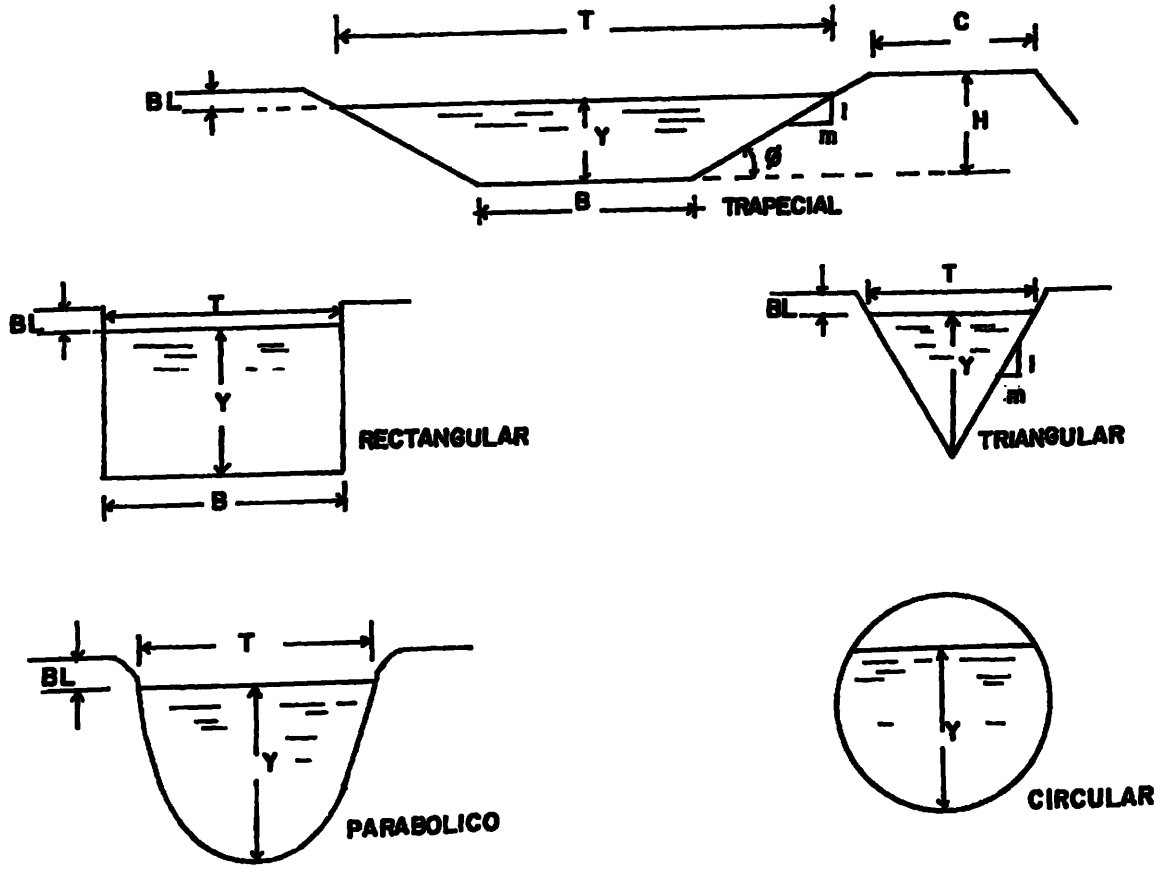
El régimen de flujo en canales puede ser laminar o turbulento, el régimen laminar en canales se realiza en láminas delgadas de anchura relativamente infinita (comparada con la profundidad del flujo), sin paredes laterales, o sea, la resistencia del conducto es solamente en el piso. El régimen laminar con agua no se presenta en ingeniería de canales. El régimen turbulento que se caracteriza por el movimiento desordenado o mezcla del líquido, es lo que se presenta en conductos abiertos, aplicados en la irrigación. La ecuación del número de Reynolds en canales:

$$Re = \frac{4Rh\bar{V}}{\nu} \qquad 7.1$$

Para Re menor o igual a 2000 se presenta el régimen laminar y para Re mayor o igual a 4000 se presenta el régimen turbulento.

FORMAS Y NOMENCLATURA DE CANALES

Las formas de la sección transversal por donde pasa el flujo de un canal, pueden ser simétricas y asimétricas. Las formas simétricas se ilustran en la Figura 7.4



Tomando la forma más común de canales simétricos que es la trapecial, se hará la nomenclatura usual en conductos abiertos.

y: tirante hidráulico; la máxima profundidad del líquido que fluye por el canal

T: ancho de la plantilla

H: ancho del espejo del agua

C: altura total del canal

C: corona del bordo

BL: bordo libre = H - Y

m: talud

S: pendiente a lo largo del canal

$$m = \text{Cot } \phi \qquad 7.2$$

$$S = \text{Tan } \theta \qquad 7.3$$

En la Figura 7.5 se ilustran dos ejemplos de canales asimé - tricos.

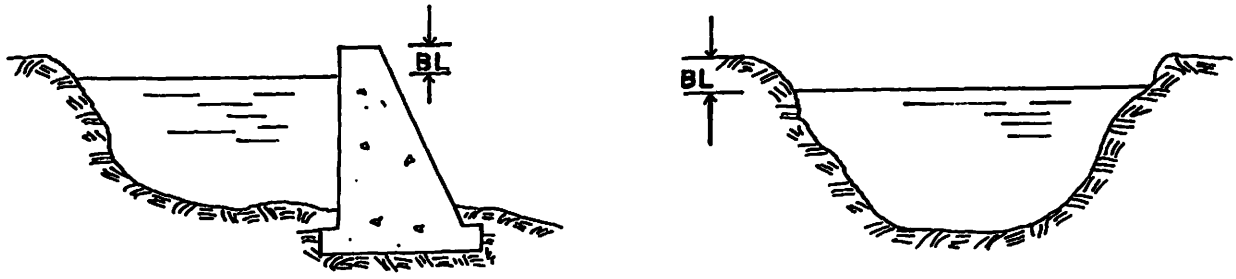
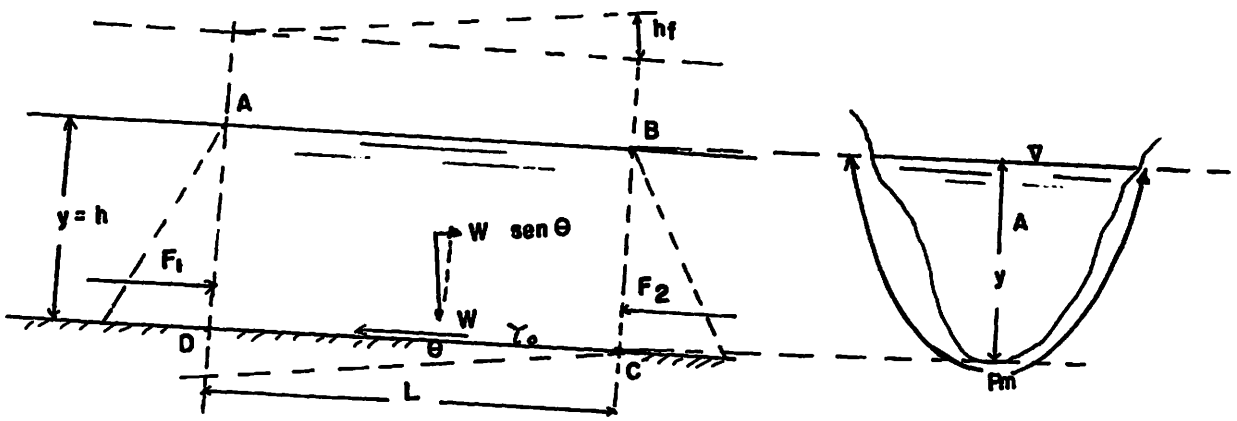


Fig. 7.5 Canales de forma asimétrica

FLUJO UNIFORME

En un canal de sección transversal de cualquier forma, ocurre un flujo uniforme, debido a que se tiene una pendiente y sección - constante, como además el ángulo θ de inclinación del canal es muy pequeño. Tomando un volumen de control ABCD que es una porción - del líquido que fluye por el canal (Figura 7.6) F_1 es la fuerza de la presión hidrostática sobre AD y F_2 actúa sobre BC, τ_0 es el esfuerzo cortante en el piso y paredes del canal, A es el área de la sección transversal por donde pasa el flujo, P_m es el perímetro mojado.



Fib. 7.6 Volumen de control ABCD

Si se tiene un flujo uniforme, implica que la velocidad media del canal es constante, por lo que, al aplicar la Primera Ley de Newton al volumen de control:

$$F_1 + W \operatorname{sen}\theta - F_2 - \text{Fuerzas de resistencia al flujo} = 0 \qquad 7.4$$

$$F_1 = \gamma \bar{h} A \qquad 7.5$$

$$F_2 = \gamma \bar{h} A \qquad 7.6$$

$$W = \gamma A L \qquad 7.7$$

$$\text{Fuerzas de resistencia al flujo} = \tau_0 (P_m L) \qquad 7.8$$

Sustituyendo las ecuaciones 7.5, 7.6, 7.7, 7.8 7.4

$$\gamma \bar{h} A + AL(\operatorname{sen}\theta) - \gamma \bar{h} A - \tau_0 (P_m L) = 0 \qquad 7.9$$

Al despejar τ_0, resulta:

$$\tau_0 = \frac{\gamma A \operatorname{sen}\theta}{P_m} \qquad 7.10$$

$$Rh = \frac{A}{P_m} \qquad 7.11$$

Cuando θ es muy pequeño ($\theta \cong 0$), como se ilustra en la Figu

ra 7.7, $h \cong CA$



Fig. 7.7 Triángulo rectángulo

$$\text{sen}\,\theta = \frac{OP}{h} \qquad 7.14$$

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{OP}{CA} \qquad 7.15$$

Como se observa en las ecuaciones 7.14 y 7.15 si $h \cong CA$, entonces:

$$\text{sen}\,\theta = \tan\,\theta \qquad 7.16$$

Sustituyendo la ecuación 7.16 en 7.13

$$\tau_0 = \gamma R_h \,\text{Tan}\theta \qquad 7.17$$

Sustituimos la ecuación 7.3 en 7.17

$$\tau_0 = \gamma R_h S \qquad 7.18$$

Recordando en el capítulo 5 en el flujo laminar, la ecuación para obtener τ_{max} en conductos a presión es:

$$\tau_{max} = \frac{(P_1 - P_2)R\gamma}{2L} \qquad 7.19$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación 7.19 por γ

$$\tau_{max} = \frac{(P_1 - P_2)R\gamma}{2L} \qquad 7.20$$

$$h_f = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} \qquad 7.21$$

Al sustituir la ecuación 7.21 en 7.20, tenemos:

$$\tau_{max} = \frac{h_f \, R \, \gamma}{2L} \qquad 7.22$$

Despejando h_f de la ecuación

$$h_f = \frac{2L \, \tau_{max}}{R \, \gamma} \qquad 7.23$$

$$R = \frac{d}{4} \qquad 7.24$$

Sustituyendo la ecuación 7.24 en 7.23

$$h_f = \frac{4L \, \tau_{max}}{d \, \gamma} \qquad 7.25$$

La ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 7.26$$

Igualando las ecuaciones 7.25 y 7.26 y despejando $_{max}$

$$\tau_{max} = \frac{f\bar{V}^2\gamma}{8g} \qquad 7.27$$

Como τ_0 es el esfuerzo cortante en el piso y las paredes del canal y como se encuentra dentro de la capa límite o sea la capa - delgada del flujo donde existe un régimen laminar dentro del flujo turbulento del líquido que fluye por el canal, se tiene que:

$$\tau_{max} = \tau_0 \qquad 7.28$$

Al sustituir la ecuación 7.28 en 7.27

$$\tau_0 = \frac{f\bar{V}^2\gamma}{8g} \qquad 7.29$$

Si igualamos las ecuaciones 7.18 y 7.29 y despejamos la velocidad me dia:

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{Rh \; S} \qquad 7.30$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \qquad 7.31$$

Sustituyamos ahora la ecuación 7.31 en 7.30

$$\bar{V} = C\, Rh^{\frac{1}{2}}\, S^{\frac{1}{2}} \qquad 7.32$$

La ecuación 7.30 es la fórmula de Chezy para conductos a presión y conductos abiertos donde C se le conoce con el nombre de coeficiente de Chezy.

La ecuación de Chezy fue la primera que se formuló en el año de 19775 en Francia. Sin embargo, a partir de ésta fórmula se fueron haciendo modificaciones de tal manera que fueron creando nuevas fórmulas, entre las que se cuentan:

Fórmula de Manning.

En 1890 Manning le hizo una modificación al coeficiente de - Chezy basado en el coeficiente n (de Ganguillet y Kutter) que depende de la rugosidad del piso y paredes del canal, dándole la siguiente forma:

$$C = \frac{1}{n}\, Rh^{\frac{1}{2}} \qquad 7.33$$

Por lo que la fórmula de velocidad de Chezy modificada por - Manning es:

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\, Rh^{\frac{2}{3}}\, S^{\frac{1}{2}} \qquad 7.34$$

y el gasto será:

$$Q = \frac{A}{n}\, Rh^{\frac{2}{3}}\, S^{\frac{1}{2}} \qquad 7.35$$

Siendo A el área de la sección transversal por donde pasa el flujo.

La fórmula de Manning (7.34) es la más utilizada en el cálculo de velocidad en canales, por ser simple y por haberse comprobado tanto en canales muy pequeños como de gran tamaño

Fórmula de Ganguillet y Kutter

En 1869 los ingenieros suizos crearon la siguiente fórmula basada en muchos experimentos y otras fórmulas para evaluar el coeficiente c de Chezy.

$$C = \frac{23 + \frac{0.00155}{S} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{Rh^{\frac{1}{2}}}\left(23 + \frac{0.00155}{S}\right)} \qquad 7.36$$

Fórmula de Bazin

Bazin, en el año 1897, propuso la siguiente expresión para calcular el valor del coeficiente c de Chezy.

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{Rh^{\frac{1}{2}}}} \qquad 7.37$$

Siendo m un coeficiente que depende de la naturaleza de las paredes y piso del canal análogo al coeficiente de Kutter y Ganguillet.

En la Tabla 7.1 se muestran algunos valores promedio de n y m, que utilizan las fórmulas de Ganguillet-Kutter, Manning y Bazin

TABLA 7.1 VALORES DE n Y m

Naturaleza de pared y piso del canal	n	m
Madera muy bien lijada, cemento muy bien pulido	0.010	0.11
Madera lijada ordinariamente, acequias de duelas de maderas nuevas	0.012	0.20
Tubería de alcantarillado bien vitrificado, buena mampostería, tubería de hormigón, madera no - lijada	0.013	0.20
Cemento con pulido ordinario, tubería de fundi - ción ordinaria, tubería de alcantarillado de arcilla ordinaria	0.015	0.4
Canales de tierra rectos y bien conservados	0.023	1.54
Canales labrados en roca	0.040	3.50
Ríos en buenas condiciones	0.30	3.00
Canales de tierra con plantas acuáticas	0.035	3.30

PERDIDA DE CARGA EN CANALES CON FLUJO UNIFORME

Para calcular la pérdida de energía de un canal en un tramo L, se utilizará la fórmula de Manning. Despejando la pendiente de la fórmula:

$$S = \left(\frac{nQ}{A\ Rh^{2/3}} \right)^2 \qquad 7.38$$

$$h_f = S\ L \qquad 7.39$$

Al sustituir la ecuación 7.39 en 7.38, tenemos:

$$h_f = \left(\frac{nQ}{A} \right)^2 \frac{L}{Rh^{\frac{4}{3}}} \qquad 7.40$$

APLICACION DE LA FORMULA DE MANNING EN CANALES

Los problemas de canales con flujo uniforme que hidráulicamente se pueden solucionar, se dividen en dos casos:

Primer caso

Problemas que se resuelven directamente aplicando la fórmula; de todos los términos de la ecuación de Manning, sólo uno de ellos puede ser la incógnita y los demás son datos conocidos, o que se obtienen directamente sin necesidad de asumirlos.

Segundo caso

Problemas que se resuleven a base de asunciones, ya que no se pueden resolver directamente al aplicar la fórmula; los datos que se dan son n, Q y S y para conocer y poder comprobar la solución hay que obtener A y Rh. De la fórmula de Manning tenemos que:

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = ARh^{\frac{2}{3}} \qquad 7.41$$

Los pasos a seguir para la solución del segundo caso son:

Primero. Se calcula $nQ/S^{\frac{1}{2}}$

Segundo. Se organiza una tabla como la siguiente:

Y	P(y)	A(y)	Rh(y)	$[Rh(y)^{\frac{2}{3}}]$	$f(y) = ARh^{\frac{2}{3}}$

Tercero. Se asumen valores de y para calcular P, A y Rh y obtener el valor $ARh^{\frac{2}{3}}$ por cada y asumida

Cuarto. Cuando $ARh^{\frac{2}{3}} = nQ/S^{\frac{1}{2}}$ se encuentra la y requerida para la sección del canal dada a esa rugosidad, gasto y pendiente.

Ejemplo del **primer caso**

Ejemplo 7.1 ¿Qué caudal puede tener un canal trapecial revestido de cemento con pulido ordinario de 2 m el ancho de la plantilla, con una pendiente de 5 m por cada 100 m, el talud es de 1.5:1, si el agua circula con un tirante hidráulico de 4 m?

Solución

D A T O S

B = 2 m

y = 4 m

n = 0.015 (Tabla 7.1)

$S = \frac{5\ m}{10000\ m} = .0005$

$m\ cot = \frac{1.5}{1} = 1.5$

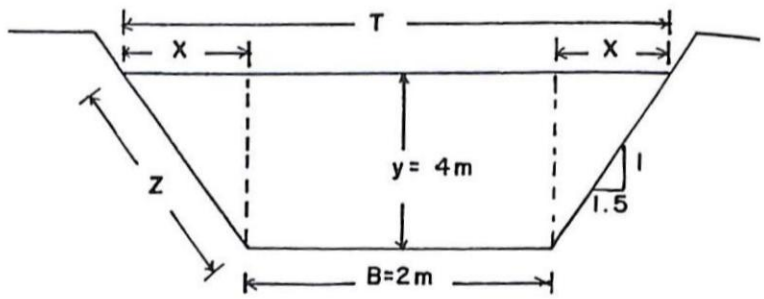
$m = \frac{x}{y}$

$x = my$

$Z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = (m^2y^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

$Z = y\sqrt{m^2 + 1}$

$A = \frac{(T + B)y}{2} = \frac{(B + 2X + B)y}{2} = \frac{(2B + 2X)y}{2}$



$$A = [2m + 4m(1.5]4m = 32\ m^2$$

$$Pm = B + 2Z = B + 2y\ m^2 + 1$$

$$Pm = 2m + 2(4m)\ (1.5)^2 + 1 = 16.42\ m$$

$$Rh = \frac{A}{Pm} = \frac{32\ m^2}{16.42\ m} = 1.95\ m$$

$$Q = \frac{1}{n} A\ Rh^{\frac{2}{3}}\ S^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0.015}\ (32)\ (1.95)^{\frac{2}{3}}\ (0.0005)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = 74.45\ m^3/seg$$

Ejemplo del segundo caso

Ejemplo 7.2 A qué profundidad y fluirán 11 m^3/seg en un canal trapecial de - tierra con n = 0.025, ancho de la plantilla de 4.5 m y un talud de 3:1 si el canal tiene una pendiente de 1:1000

Solución

D A T O S

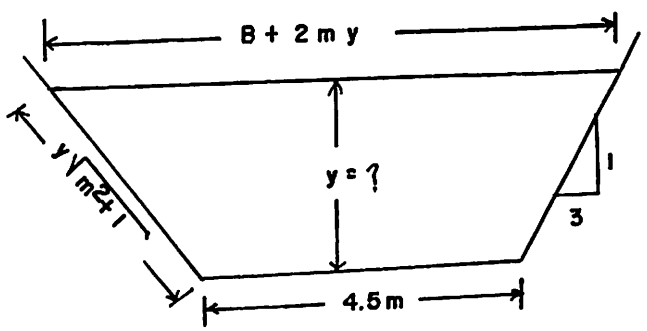
n = 0.025

Q = 11 m /seg

S = 0.0001

B = 4.5 m

m = 3



Se tiene que:

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = \frac{(0.025)(11)}{(0.0001)^{\frac{1}{2}}} = 27.5$$

$$P_{(y)} = B + 2y\sqrt{m^2+1} = 4.5 + 2y\sqrt{1 + (3)^2} = 4.5 + 2\sqrt{10}\ y$$

$$A_{(y)} = (B + ym)y = (4.5 + 3y)y$$

$$Rh_{(y)} = \frac{A(y)}{P(y)}$$

y	P(y)	A(y)	Rh(y)	$[Rh_{(y)}]^{\frac{2}{3}}$	$f_{(y)} = ARh^{\frac{2}{3}}$
1	10.8 m	7.5 m^2	0.693	0.783	5.873
3	23.47 m	40 m^2	1.73	1.438	58.26
2	17.15 m	21 m^2	1.22	1.14	24.036
2.5	20.31 m	30 m^2	1.48	1.296	38.90
2.13	17.97	23.19	2.19	1.185	27.50

y = 2.13 m

SECCIONES CON RUGOSIDAD DIFERENTE

Podría presentarse el caso de que una misma sección transversal del canal tenga diferente rugosidad, como se muestra en la Figura 7.8

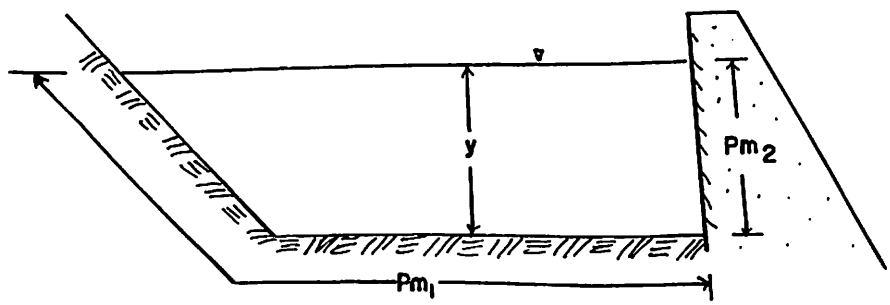


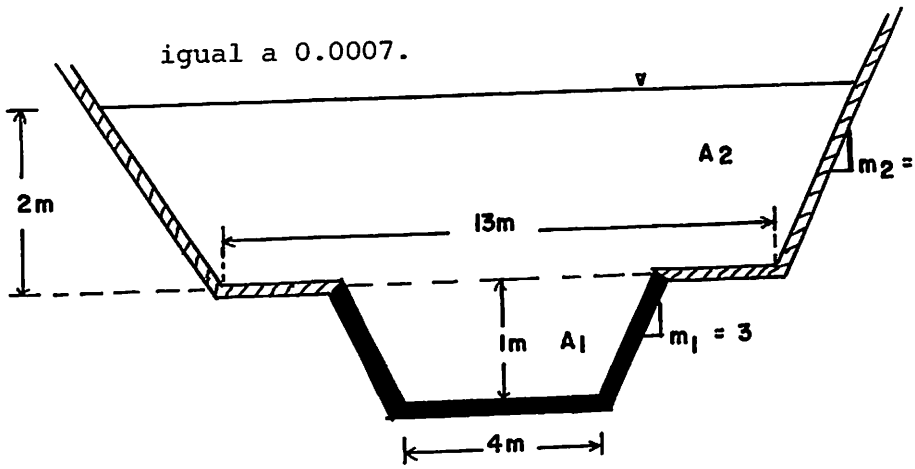
Fig. 7.8 Sección del canal con diferente rugosidad

La rugosidad media que respresenta toda la sección del canal se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$n = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} Pm_i \, n_i^2}{\sum_{i=1}^{N} Pm_i \, n_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad 7.41$$

Siendo N el número total de rugosidades diferentes

Ejemplo 7.3 Determinar el gasto que fluye por un canal que tiene dos rugosidades como se muestra en la figura. La pendiente del canal es igual a 0.0007.



$n_1 = 0.025$

$n_2 = 0.040$

$$A_1 = (B_1 + y_1 m_1) y_1 = [4\ m + (1m)(3m)]\ 1m = 7m^2$$

$$P_1 = B_1 + 2y_1 (m_1 + 1)^{\frac{1}{2}} = 4\ m + 2(1m)[(3) + 1]^{\frac{1}{2}} = 10.32\ m$$

$$A_2 = (B_2 + y_2 m_2) y_2 = [13\ m + (2m)(1)]2\ m = 34\ m^2$$

$$P_2 = 2y_2\ (m_2 + 1)^{\frac{1}{2}} + B_2 - (B_1 + 2m_1 y_1)$$

$$P_2 = 2(2\ m)(4 + 1)^{\frac{1}{2}} + 13 - [4\ m + (2)(3)(1\ m)]$$

$$P_2 = 11.94$$

$$A_T = A_1 + A_2 - 7\ m^2 + 34\ m^2 = 41\ m^2$$

$$Pm_T = Pm_1 + Pm_2 = 10.32\ m + 11.944\ m = 22.26\ m$$

$$n = \left(\frac{\sum_{i=1}^{2} Pm_i\ n_i^2}{\sum_{i=1}^{2} Pm_i} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Pm_1 n_1^2 + Pm_2 N_2^2}{Pm_1 + Pm_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{n} = \left[\frac{10.32\ m\ (0.025)^2 + 11.94\ m\ (0.04)^2}{20.32\ m + 11.94\ m} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.0338$$

$$Rh_T = \frac{A_T}{Pm_T} = \frac{42\ m}{22.26\ m} = 1.841\ m$$

$$Q_T = \frac{1}{\bar{n}} A R h^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{0.0338} \right)(41)(1.841)^{\frac{2}{3}}\ (0.0007)^{\frac{1}{2}}$$

$$Q_T = 48.22\ m^2/seg$$

VELOCIDADES MAXIMAS Y MINIMAS PERMISIBLES EN CANALES

La velocidad máxima permitida es la velocidad media más gran de que tiene un canal, que no causará erosión al piso y paredes - del canal. En el Cuadro 7.2 se muestran algunas velocidades máxi- mas permitidas según la naturaleza del piso y la pared del canal.

TABLA 7.2 MATERIAL DE CANAL Y VELOCIDAD MAXIMA PERMITIDA EN m/seg

Naturaleza del piso y pared del canal	Velocidad máxima permitida
Arenoso	0.30
Arenisca	0.40
Cantos rodados	0.80
Materiales aglomerados consistentes	2.00
Mampostería	2.50
Canales de roca compacta	4.0
Canales de concreto	4.50

La velocidad máxima permitida es la velocidad media más peque ña que tiene un canal, que no causará sedimentación de partículas que lleva el agua en suspensión y además, que no propicie el creci miento de plantas acuáticas y musgos. En el Cuadro 7.3 se muestran algunas velocidades mínimas permitidas en función de las caracte - rísticas de turbidez del agua.

La velocidad mínima que previene el crecimiento de vegetación es de 0.76 m/seg. En la construcción de canales para irrigación pa

a irrigación para pendientes que oscilan entre 0.0006 a 0.0008 - e aconsejan que sean pequeños, y grandes para pendientes que tie- len un rango de 0.0002 a 0.0005

TABLA 7.3 CARACTERISTICAS DEL AGUA Y LA VELOCIDAD MINIMA PEMITIDA EN m/seg

Característica de turbidez del agua	Velocidad mínima permitida
Con suspensiones fina	0.30
Que contienen arenas finas	0.45
De drenaje	0.60
Pluviales	0.75

La velocidad mínima que previene el crecimiento de vegetación es de 0.76m/seg. En la construcción de canales para irrigación para pendientes que oscilan entre 0.0006 a 0.0008 se aconsejan que - sean pequeños, y grandes para pendientes que tienen un rango de - 0.0002 a 0.0005

DISEÑO DE LA SECCION OPTIMA DEL CANAL

Lo primero que se debe tomar en cuenta para el diseño de la - sección óptima de un canal, es el gasto que hay que conducir, la - pendiente que va a tener de acuerdo a la topografía del terreno y la rugosidad del piso y paredes del canal.

La sección más óptima cuando se tiene el área, gasto, pendiente y rugosidad del canal, será cuando se encuentre la forma de conducir un mayor gasto sin necesidad de cambiar lo anterior. Obser-

vando la ecuación de Manning se puede concluir que el gasto máximo está determinado por el radio hidráulico máximo y como se sabe que el radio hidráulico es la relación del área entre el perímetro mojado, y como el área es fija, habrá que encontrar qué figura nos da un menor perímetro mojado.

De todas las secciones transversales, la circular y semicircular es la que tiene el mínimo perímetro mojado, dada una área constante. O sea, que estas secciones cuando ya se tienen fijas el área, pendiente, gasto, rugosidad, serán las que conduzcan un mayor gasto, lo que las hace ser las secciones de máxima eficiencia. La sección semicircular en canales ofrece muchas dificultades de construcción.

La sección trapecial es la sección más simple que se asemeja a la semicircular, teniendo como referencia la sección trapecial de la Figura 7.9, si ya se tiene el área y el talud dados la óptima sección del canal será:

$$Rh = \frac{A}{Pm} \qquad 7.42$$

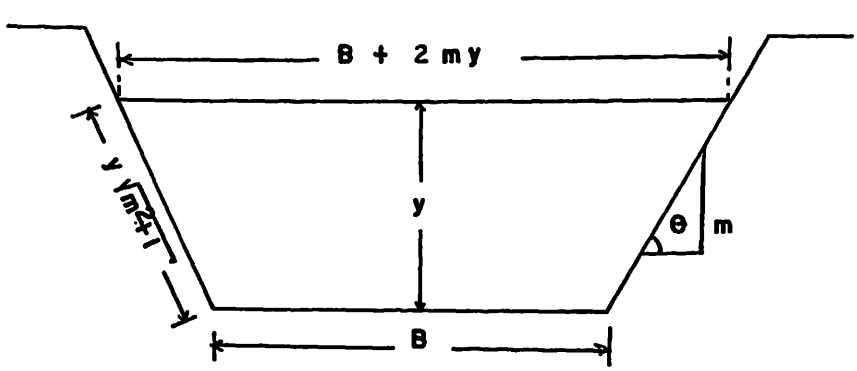


Fig. 7.9 Sección Trapecial

Donde:

$$A = By + my^2 \qquad 7.43$$

$$P_m = B + 2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}y \qquad 7.44$$

Para un Rh máximo debe Pm ser mínimo; despejando B de la ecuación

$$B = P_m - 2y(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad 7.45$$

Sustituyendo la ecuación 7.45 en 7.43

$$A = [P_m - 2y(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]y + my^2 \quad 7.46$$

Al despejar P de la ecuación 7.46, resulta:

$$P_m = \frac{A}{y} + 2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} y - my \quad 7.47$$

Ahora derivamos en la ecuación 7.47 Pm con respecto a y e igualamos a cero para obtener un mínimo

$$\frac{dPm}{dy} = -\frac{A}{y^2} + 2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m \quad 7.48$$

$$0 = -\frac{A}{y^2} + 2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m \quad 7.49$$

Al sustituir la ecuación 7.43 en 7.49

$$0 = -\frac{By + my}{y^2} + 2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m \quad 7.50$$

Si despejamos B de la ecuación 7.50, se tiene:

$$B = 2y\,[(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m] \quad 7.51$$

La ecuación 7.51 nos permite obtener la plantilla de máxima eficiencia para un talud y un área dados.

$$T = B + 2my \quad 7.52$$

Se sustituye la ecuación 7.51 en la ecuación 7.52

$$T = 2y(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad 7.53$$

De la ecuación 7.53 se obtiene la conclusión de que la mitad del ancho del espejo del agua debe seri igual a un lado lateral del canal cuando se quiere la sección óptima, dados el área y el talud.

Obtención de la sección óptima dados el gasto, la rugosidad, pendiente y talud.

Sustituyendo las ecuaciones 7.43 y 7.44 en 7.42

$$Rh = \frac{By + my^2}{B + 2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} y} \qquad 7.54$$

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = ARh^{\frac{2}{3}} \qquad 7.55$$

Ahora se sustituye la ecuación 7.43 y 7.54 en 7.55

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = (By + my^2)\left[\frac{By + my^2}{B + 2y(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{2}{3}} \qquad 7.56$$

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = \frac{(By + my^2)^{\frac{5}{3}}}{[B + 2y(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]^{2/3}} \qquad 7.57$$

Sustituyamos la ecuación 7.51 en 7.57

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = \frac{[2y(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 2my^2 + my]^{\frac{5}{3}}}{[2y(m+1)^{\frac{1}{2}} - 2my + 2y(m + 1)^{\frac{1}{2}}]^{2/3}} \qquad 7.58$$

$$\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} = \frac{[2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m]\, y^{\frac{8}{3}}}{2} \qquad 7.59$$

Despejando y de la ecuación 7.59

$$y = 2^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m}\right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{8}} \qquad 7.60$$

La ecuación 7.60 nos permite calcular el tirante de la sección óptima en función del talud, gasto, pendiente y rugosidad. Una vez obtenido el tirante hidráulico óptimo del canal con la ecuación 7.51 , obtenemos el ancho de la plantilla.

Obtención del ángulo óptimo conociendo el área y tirande hi - dráulico.

$$m = \cot \phi \qquad 7.61$$

Al sustituir la ecuación 7.66 en 7.65, tenemos:

$$P = \frac{A}{y} + 2(\cot^2\phi + 1)^{\frac{1}{2}} y - \cot\phi \qquad 7.62$$

$$\cot^2\phi = \frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} \qquad 7.63$$

Ahora, se sustituye la ecuación 7.66 en 7.65

$$Pm = \frac{A}{y} + 2\left(\frac{\cos^2\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} + 1\right)^{\frac{1}{2}} y - \cot\phi \qquad 7.64$$

$$Pm = \frac{A}{y} + 2\left[\frac{(\cos^2 + \operatorname{sen}^2\phi)}{\operatorname{sen}^2}\right]^{\frac{1}{2}} y - \cot\phi \qquad 7.65$$

$$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1 \qquad 7.66$$

La ecuación Pm se sustituye en 7.65

$$Pm = \frac{A}{y} \mp \frac{2y}{\operatorname{sen}\phi} - y\cot\phi \qquad 7.67$$

Al derivar Pm con respecto a ϕ se obtiene:

$$\frac{d\,Pm}{d\phi} = \frac{2y\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi} + y\csc^2\phi \qquad 7.68$$

$$\csc^2\phi = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi} \qquad 7.69$$

Al sustituir la ecuación 7.69 en 7.68 resulta:

$$\frac{d\,Pm}{d\phi} = -2y\cos\phi\,\csc^2\phi + y\csc^2\phi \qquad 7.70$$

Igualando a cero la derivada de la ecuación 7.70 para obtener un mínimo

$$\frac{d\,Pm}{d\,\phi} = -2y\cos\phi\ \csc^2\phi + y\csc^2\phi = 0 \qquad 7.71$$

Dividiendo 7.71 por $y\csc^2\phi$

$$0 = -2\cos^2\phi + 1 \qquad 7.72$$

$$\cos\phi = \frac{1}{2} \qquad 7.73$$

$$\phi = \text{Arc cos } 0.5 \qquad 7.74$$

$$\phi = 60°$$

Cuando se conoce el área para obtener la sección óptima, el talud debe de tener un ángulo de 60° ó 0.5773:1

Ejemplo 7.4 Determinar la sección óptima de un canal de forma trapecial para que conduzca un gasto de 50 m^3/seg con una pendiente de -0.00026 y un talud igual a 1.5. Si el canal se va a revestir de concreto (n = 0.017), determine si la velocidad se encuentra entre la mínima de ensolvamiento y máxima erosiva si tiene en suspensión arena fina.

Solución

D A T O S

Q = 50 m^3/seg

S = 0.00026

n = 0.017

m = 1.5

Igualando a cero la derivada de la ecuación 7.70 para obtener un mínimo

$$0 = -2y \cos^2\phi \quad \csc^2\phi + \quad y.\csc^2\phi \qquad 7.71$$

Dividiendo 7.71 por $y \csc^2\phi$:

$$0 = -2 \cos\phi \quad + 1 \qquad 7.72$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \qquad 7.73$$

$$\phi = \text{Arc cos } 0.5 \qquad 7.74$$

$$\phi = 60° \qquad 7.75$$

Cuando se conoce el área para obtener la sección óptima, el talud debe de tener un ángulo de 60° ó 0.5773:1

Ejemplo 7.4 Determinar la sección óptima de un canal de forma trapecial para que conduzca un gasto de 50 m^3/seg con una pendiente de - 0.00026 y un talud igual a 1.5. Si el canal se va a revestir - de concreto (n = 0.017), determine si la velocidad se encuentra entre la mínima de ensolvamiento y máxima erosiva si tiene en - suspensión arena fina.

Solución

D A T O S

Q = 50 m^3/seg

S = 0.00026

n = 0.017

m = 1.5

$$y = 2^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{3}{8}} \left(\frac{nQ}{S^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{3}{8}}$$

$$y = 2^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2(1.5)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{3}{8}} \left[\frac{(0.017)(50)}{(0.00026)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{3}{8}}$$

$$y = 3.98 \text{ m}$$

$$B = 2y[(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - m] = 1(3.98)([(1.5)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - 1.5]$$

$$B = 2.41 \text{ m}$$

La velocidad de dicho canal será:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} + \frac{Q}{By + my^2} = \frac{50}{2.41(3.98) + (1.5)(3.98)^2}$$

$$\bar{V} = 1.5 \text{ m/seg}$$

$$0.45 \text{ m/seg} < 1.5 \text{ m/seg} < 4.5 \text{ m/seg}$$

Por lo tanto, la velocidad es permisible.

Muchas veces no es posible poner el talud óptimo en ciertos canales como los construidos en tierra, debido a que el ángulo de las paredes laterales del canal cuyo valor es 60°, resulta demasiado elevado, ocasionando derrumbes en la mayorái de los suelos. Debido a esto se utilizan otros ángulos menores. En la Tabla 7.4 se muestran algunos valores recomendables del ángulo para diferentes materiales en las paredes del piso del canal.

TABLA 7.4 VALOR DE ϕ PARA DIFERENTE MATERIAL DE CONSTRUCCION DEL CANAL

Naturaleza de paredes y piso del canal	ϕ
Canales de tierra en general	21°48' a 11°19'
Arena, tierra porosa	16°34'
Canto rodado	29°46'
Tierra compacta	33°41'
Tierra muy compacta, paredes rocosas	38°40'
Rocas estratificadas, mampostería de piedra bruta	63°20'
Rocas compactas, mampostería acabada, concreto	90°

PROFUNDIDAD DONDE SE LOCALIZA LA VELOCIDAD MEDIA EN CANALES

La distribución de velocidades en una misma sección transversal de un canal, se debe al rozamiento que existe entre las capas del líquido y el piso y paredes del canal, como además el rozamiento de la superficie del agua y el aire.

En la Figura 7.10 se ilustra una sección transversal de un canal trapecial con sus curvas típicas de igual velocidad. El perfil de velocidades en un canal se muestra en la Figura 7.11

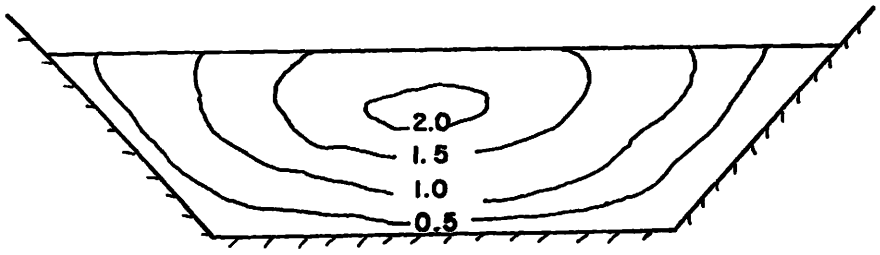


Fig. 7.10 Curvas de igual velocidad

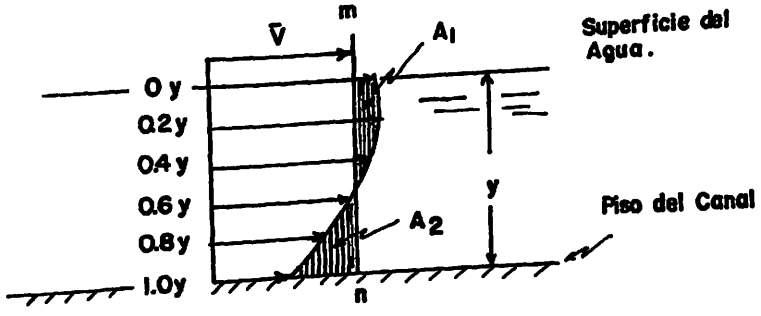


Fig. 7.11 Perfil de vlocidades de un canal

La forma más simple de saber la velocidad media es cuando se mide al 60% del tirante.

7.76

$$\bar{V} \cong \bar{V}\ (0.6y)$$

Una aproximación mejor es:

$$\bar{V} \cong \frac{V_0(0.2y) + V_0(0.6y)}{2} \qquad 7.77$$

Una forma más precisa a la anterior es:

$$\bar{V} \cong \frac{V_0(0.2y) + V_0(0.8y) + 2V_0(0.6y)}{4} \qquad 7.78$$

La forma más precisa para determinar la velocidad media es - cuando se traza una línea m-n (Figura 7.11) en un perfil de velocidades de una manera tal que $A_1 = A_2$

ENERGIA ESPECIFICA Y PROFUNDIDAD CRITICA, EN CANALES RECTANGULARES

Se denomina energía específica E de un líquido que fluye por un canal, a la energía total por unidad de peso del líquido medida verticalmente desde el fondo del canal hasta la línea de energía - total. Observando la Figura 7.1 tenemos que:

$$E = y \cos\theta + \alpha \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 7.79$$

Como normalmente las pendientes en canales son muy pequeñas ($\theta \cong 0$), entonces el $\cos\theta$ es aproximadamente unitario; como el régimen de flujo es turbulento, el coeficiente α también es aproximadamente igual a uno.

$$E = y + \frac{\bar{V}^2}{2g} \qquad 7.80$$

Para conocer los principios de la energía específica en canales, se considerará una sección transversal rectangular con el objeto de que se comprendan mejor los conceptos que a continuación se

analizarán.

En un canal rectangular el gasto unitario q se define como el gasto que circula por el canal por unidad de ancho de plantilla.

$$q = \frac{Q}{B} \qquad 7.81$$

Teniendo en función del gasto la ecuación 7.80:

$$E = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{A}\right)^2 \qquad 7.82$$

En un canal rectangular:

$$A = By \qquad 7.83$$

Sustituimos la ecuación 7.83 en 7.82 y obtenemos:

$$E = y + \frac{1}{2y}\left(\frac{Q}{By}\right)^2 \qquad 7.84$$

Al reagrupar términos del paréntesis en la ecuación 7.84 resulta:

$$E = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{Q/B}{y}\right)^2 \qquad 7.85$$

$$E = y + \frac{1}{2g}\left(\frac{q}{y}\right)^2 \qquad 7.86$$

Graficando la ecuación 8.76; haciendo variar E, y , y mantenien do q constante (Figura 7.12).

En un flujo permanente (Q = cte) en un canal rectangular, q permanece constante si el ancho de la plantilla B no varía.

Las observaciones de la gráfica de la Figura 7.12 son las siguientes:

a) El gasto unitario q puede circular con diversos contenidos de energía específica, dependiendo del tirante y la velo -

cidad dados un gasto Q y el ancho de la plantilla B.

b) Con el mismo contenido de energía específica, un gasto unitario puede circular con dos tirantes hidráulicos diferentes llamados conjugados (El tirante mayor tendrá una flujo subcrítico, y el menor un flujo supercrítico).

c) Cuando el gasto unitario circula con una energía específica mínima (E_{min}), solamente lo puede hacer con un tirante hidráulico, llamado tirante crítico (yc).

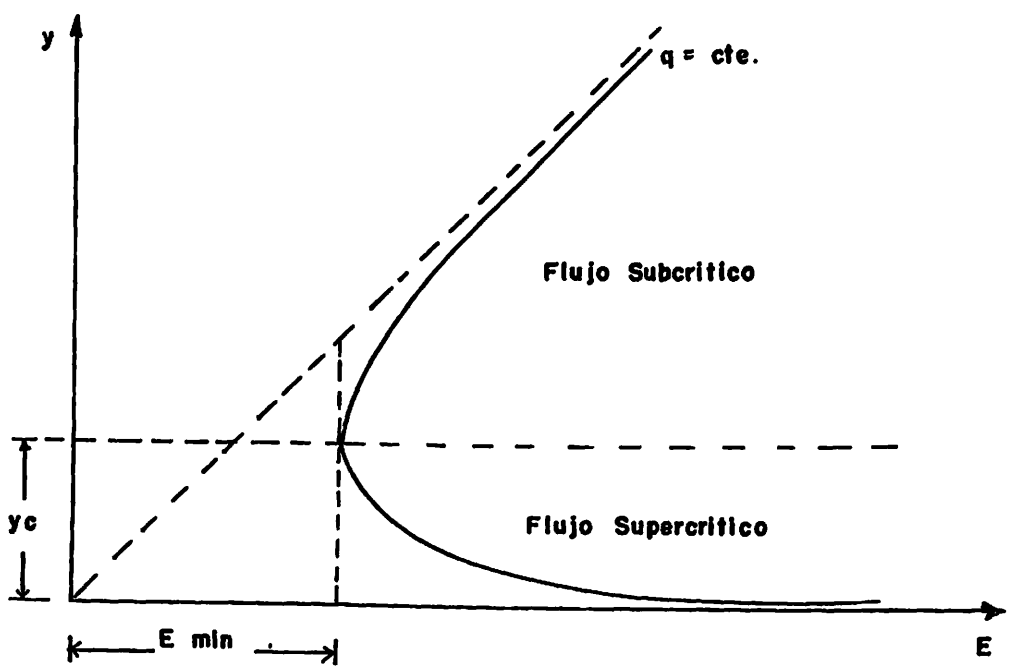


Fig. 7.12 Gráfica de E contra y a q constante

Despejando q de la ecuación

$$q = [2g(y^2E - y)]^{\frac{1}{2}} \qquad 7.87$$

Si en la ecuación 7.87 se varía, el tirante hidráulico, el gasto unitario y la E permanecen constantes, en la Figura 7.13 se muestra la gráfica correspondiente a la ecuación 7.87 con las condiciones anteriores.

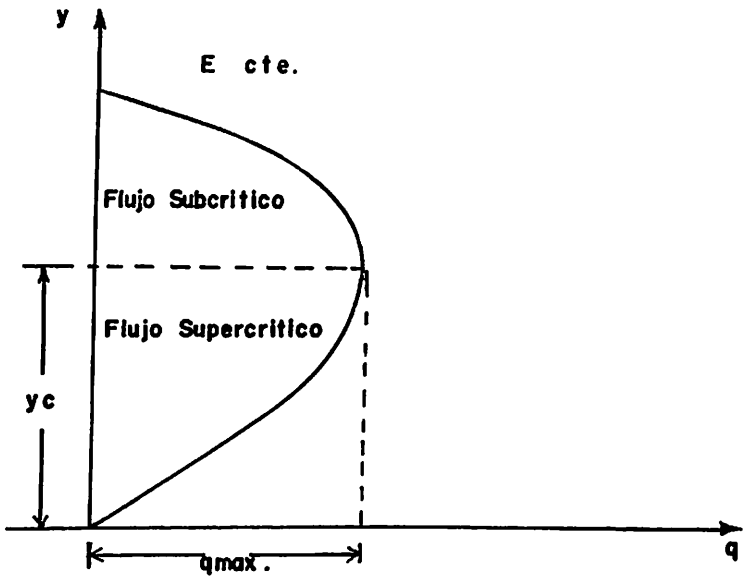


Fig. 7.13 Gráfica de q contra y a E constante

Las observaciones de la gráfica de la Figura 7.13 son las siguientes:

a) Un líquido que circula por un canal a una misma energía específica, lo puede hacer con diversos gastos unitarios dependiendo del tirante hidráulico y la velocidad dados un gasto Q y diferentes anchos de plantilla B.

b) Un gasto unitario de una energía específica dada, el flujo puede circular con dos tirantes conjugados.

c) Cuando el gasto unitario es máximo, el tirante hidráulico que tiene es el crítico.

De acuerdo con lo anterior, el tirante crítico ocurre cuando la energía específica es mínima, y para poder deducir la fórmula para obtener el tirante crítico, se derivará la ecuación 7.86 (derivando E con respecto a y), e igualando a cero para obtener un míni

mo.

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q_2}{gy^3} \qquad 7.88$$

La dE/dy es igual a cero si sólo si $y = y_c$

$$0 = 1 - \frac{q}{gy_c} \qquad 7.89$$

Si despejamos y_c de la ecuación 7.89, obtenemos:

$$y_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \qquad 7.90$$

Al derivar la ecuación 7.87 (derivando q con respecto a y) e igualar a cero para obtener un mínimo.

$$\frac{dq}{dy} = \frac{1}{2} (2g)^{\frac{1}{2}} (Ey^2 - y^3)^{-\frac{1}{2}} (2Ey - 3y^2) \qquad 7.91$$

La dq/dy es igual a cero si y sólo si $y = y_c$ y si $y = y_c$ - si sólo si $E = E_{min}$ (Energía específica mínima).

$$0 = \frac{1}{2} (2g)^{\frac{1}{2}} (E_{min}\, y_c^2 - y_c^3)^{-\frac{1}{2}} (2\, E_{min}\, y_c - 3y_c^2) \qquad 7.92$$

$$0 = 2E_{min}\, y_c - 3y_c \qquad 7.93$$

$$y_c = \frac{2}{3} E_{min} \qquad 7.94$$

Al despejar E_{min} de la ecuación 7.94, tenemos:

$$E_{min} = \frac{3}{2} y_c \qquad 7.95$$

Si $y = y_c$ si sólo si $q = q_{max}$ en la ecuación

$$y_c = \left(\frac{q_{max}}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \qquad 7.96$$

Si despejamos q_{max} de la ecuación 7.96, resulta:

$$q_{max} = (g\ y_c)^{\frac{1}{2}} \qquad 7.97$$

Se sustituye la ecuación de continuidad en la ecuación

$$q = \frac{\bar{V}A}{B} \qquad 7.98$$

La ecuación 7.83 es sustituída en 7.98

$$q = \bar{V}y \qquad 7.99$$

La sustitución de la ecuación 7.99 en 7.89 se efectúa siempre y cuando $y = y_c$

$$0 = 1 - \frac{\bar{V}^2}{g\ y_c} \qquad 7.100$$

$$1 = \frac{\bar{V}^2}{g\ y_c} \qquad 7.101$$

$$1 = \frac{\bar{V}}{(g\ y_c)^{\frac{1}{2}}} \qquad 7.102$$

El lado derecho de la ecuación 7.102 es igual a uno siempre y cuando se trate de una energía específica mínima o sea un flujo crítico ($y = y_c$). F se define como el número de Froude, siendo igual a:

$$F = \frac{V}{(g\ y_c)^{\frac{1}{2}}} \qquad 7.103$$

Si $F = 1$: el flujo del canal es crítico

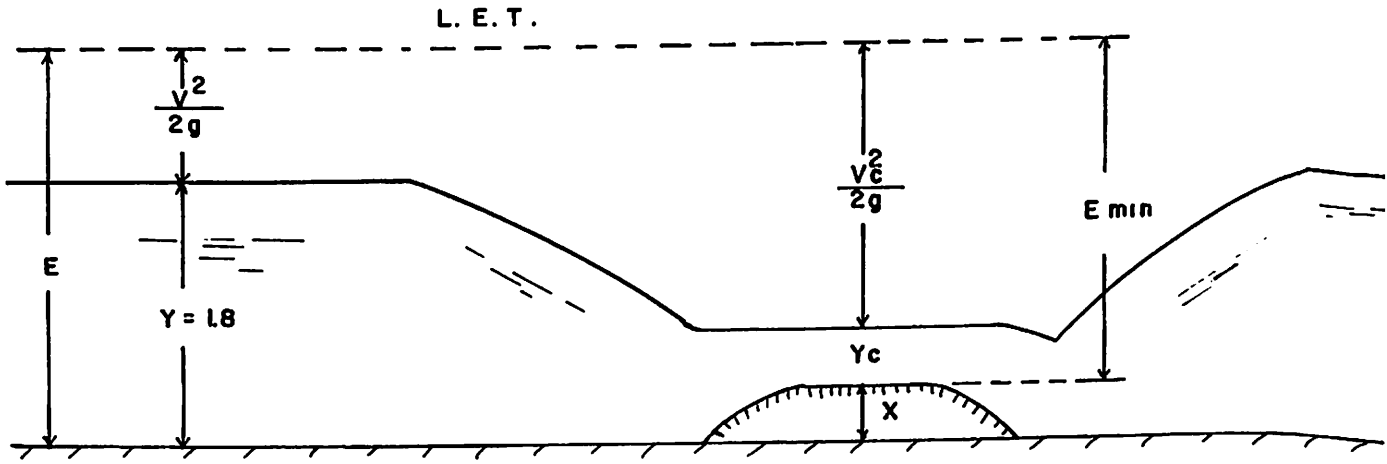
Si $F < 1$: el flujo del canal es subcrítico

Si $F > 1$: el flujo del canal es supercrítico

Ejemplo 7.5 Un canal rectangular que tiene un ancho de 2 m y un coeficiente de rugosidad de 0.015, tiene un flujo uniforme con un tirante hidráulico de 1.8 m y una pendiente de 0.0005.

a) Determinar la altura mínima de la protuberancia que se puede construir en el piso de éste canal para producir la profundidad crítica.

b) El ancho máximo de contracción que puede producir la profundidad crítica



Solución a) Tenemos que:

$$Q = \frac{1}{n} \quad A\ Rh^{\frac{2}{3}} \quad S^{\frac{1}{2}}$$

$$A = (1.8)(2) = 3.60\ m^2$$

$$Rh = \frac{A}{Pm} = \frac{3.60}{2 + 2(1.8)} = \frac{3.60}{5.60} = 0.643\ m$$

$$Q = \frac{1}{0.015}\ (3.60)(0.643)^{\frac{2}{3}}\ \ (0.0005)^{\frac{1}{2}} = 4.00\ m^3/seg$$

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{4.00}{2} = 2.00\ m^3/seg/m$$

$$E = y + \frac{\bar{V}^2}{2g} = y + \frac{q^2}{2g\ y^2} = 1.8 + \frac{(2)^2}{19.62(1.8)^2} = 1.863\ m$$

Tenemos que:

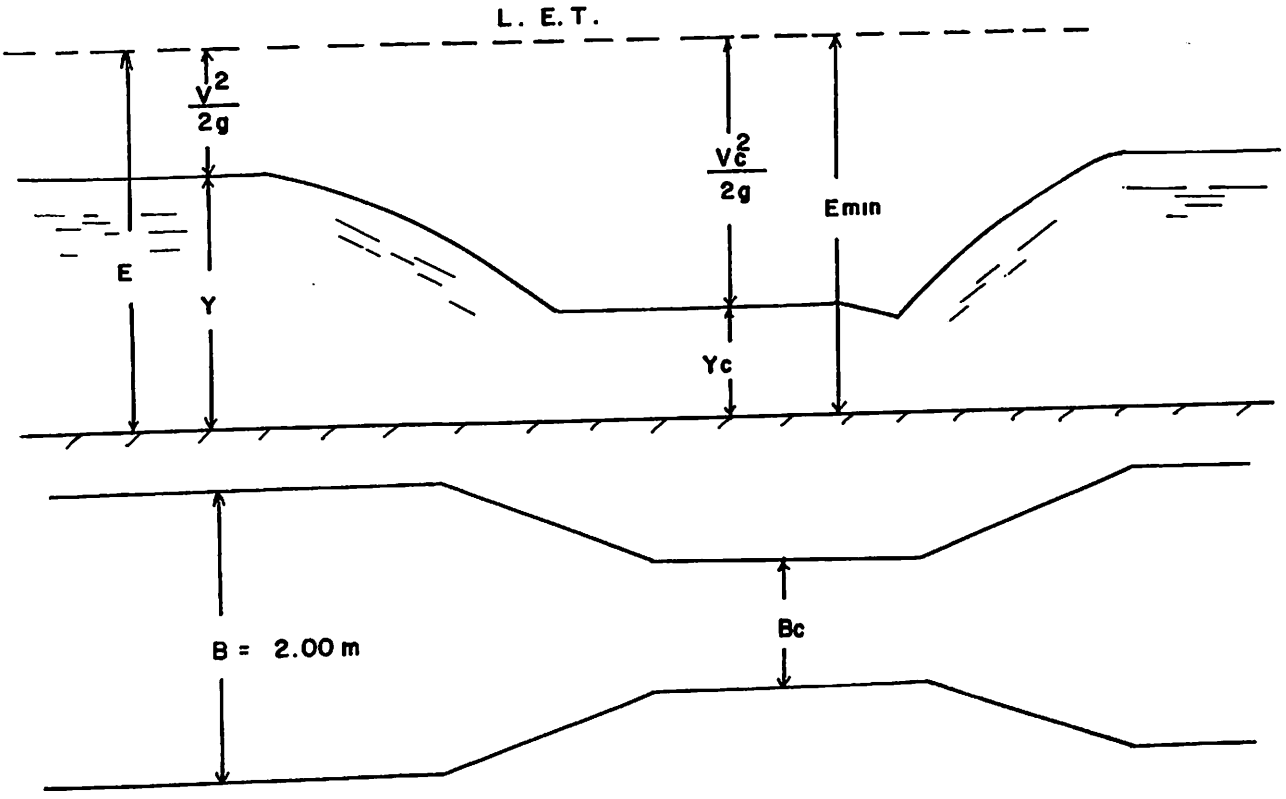
$$y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{(2)^2}{9.81}\right]^{\frac{1}{3}} = 0.74\ m$$

$$V_c = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{Y_c\ B} = \frac{4.00}{0.74(2)} = 2.7 \text{ m/seg}$$

$$E_{min} = Y_c + \frac{V_c^2}{2g} = 0.74 + \frac{(2.7)^2}{19.62} = 1.11 \text{ m}$$

$$E = E_{min} + X$$

$$X = E - E_{min} = 1.863 - 1.11 = 0.75 \text{ m}$$



VISTA EN PLANTA

Tenemos que:

$$Y_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{\left(\frac{Q}{B_c}\right)^2}{g}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Al despejar B de la ecuación anterior obtenemos:

$$B_c = \left(\frac{Q^2}{y_c^3\ g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y_c = \frac{2}{3} E = \frac{2}{3} (1.863) = 1.242 \text{ m}$$

$$B_c = \left[\frac{(4)^2}{(1.242)^3\ 9.81}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.92 \text{ m}$$

$$B_c = 0.92 \text{ m}$$

B I B L I O G R A F I A

Azevedo, Netto, J.M. de y Guillermo Acosta. 1976. Manual de Hidráulica. Sexta edición. Editorial Harla, México.

Beer, F.P. y E.R. Johnston. 1973. Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática, Tomo I. Segunda edición. Ed. Mc Graw-Hill. México. 422 pp.

Bird, R.B., W.E. Stewart y E.V. Lightfoot. 1964. Fenómenos de Transporte. Primera edición. Ed. Reverté, S.A.

Bueche, F.J. 1977. Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Tomo I. Segunda edición. Ed. Mc Graw-Hill. México, D.F. 318 pp.

Chow, Ven Te. 1959. Open-Channel Hydraulics. Mc Graw Hill Book Company Inc. New York.

Gurrelts, J.M. 1969. Enciclopedia Práctica Jackson. Tomo VIII. (Ingeniería Civil: Mecánica de los fluídos). Editor W.M. Jackson. México, D.F.

Hansen, A.G. 1979. Mecánica de Fluidos. Tercera edición. Ed. LIMUSA. México. 575 pp.

John, J.E.A. y W.L. Haberman. 1974. Introducción a la Mecánica de los fluidos. Primera edición. Ed. Prentice-Hall Internatio - nal. 449 pp.

King, H.W., C.O. Wisler and J.G. Woodburn. 1948. Hydraulics. Fifth edition. Ed. John Wiley and Sons. Inc. New York.

_____ y Ernest F. Brater. 1962. Manual de hidráulica. Edito - rial UTHEA. México.

Nekrasov, B. 1966. Hidráulica. Segunda edición. Ed. Mir, S.A.

Penny, J.H. 1980. Manual del Ingeniero Químic. Tomo I y II. Tercera edición. Ed. UTHEA. México, D.F.

Shames, I.H. 1967. La mecánica de los fluídos. Primera edición. Ed. Mc Graw-Hill.

_____. 1971. Estática. Tomo I. Segunda edición. Ed. Herrero Hermanos Sucesores, S.A. México. 312 pp.

Sotelo Avila, G. 1974. Hidráulica General. Volumen I. Primera edición. Ed. LIMUSA, México.

Resnick, R. y D. Halliday. 1966. Física. Parte I. Ed. CECSA. México.

Trueba, C.S. 1972. Hidráulica. Editorial CECSA. México.

APENDICE A

ANALISIS DIMENSIONAL Y UNIDADES DEL SISTEMA METRICO DECIMAL

El análisis dimensional nos proporciona información sobre la relación que existe entre las magnitudes que intervienen en cualquier sistema físico* para poderlo identificar y posteriormente medirlo, donde la únicas variables que intervienen son: masa, tiempo y longitud (M,T,L) conocido como sistema absoluto; y fuerza, tiempo y longitud (F,T,L) conocido como sistema gravitacional o sistema técnico de unidades.

La fuerza F se puede relacionar con la masa mediante la segunda ley de Newton, que nos expresa que la fuerza resultante que actúa sobre una masa se puede cuantificar mediante el producto de la masa, por la aceleración que produce.

$$F = m \cdot a \qquad \text{(i)}$$

Donde: a es la aceleración de la masa m debido a la acción de la fuerza F y se define como el cambio de velocidad v con respecto al tiempo T por lo que la ecuación (i) puede expresarse de la siguiente manera:

$$F = M \frac{dv}{dT} \qquad \text{(ii)}$$

Las dimensiones de la ecuación (ii) en el sistema absoluto serán, por lo tanto:

$$F = M \frac{\frac{L}{T}}{T} \qquad \text{(iii)}$$

---

* Se entiende como sistema físico cualquier sustancia que es medida en sus proporciones (peso, masa, volumen, etc) o en sus modificaciones sin alterar su naturaleza química (velocidad, aceleración, cambio de presión, camgio de temperatura, etc.)

Reduciendo términos de la ecuación (iii), tendremos:

$$F = M\frac{L}{T} \qquad \text{(iv)}$$

Al despejar la masa de la ecuación (iv), resulta:

$$M = \frac{FT}{L} \qquad \text{(v)}$$

Unidades de fuerza en el sistema métrico decimal son el kilogramo fuerza Kg_f o kilopondio Kp, y el newton Nt; las unidades de masa son el kilogramo masa Kg_m y la unidad técnica de masa U.T.M.

Un kilogramo fuerza se define como la atracción que ejerce la gravedad terrestre en cierto lugar de nuestro planeta (en donde la gravedad tiene un valor de 9.80665 m/seg^2) sobre una porción arbitraria de masa de platino denominada kilogramo masa. En otras palabras, el kilogramo fuerza es numéricamente[1] igual al kilogramo masa siempre y cuando la gravedad sea igual a 9.80665 m/seg^2

Si el peso W es la fuerza, y la gravedad g es aceleración, la ecuación (i) se puede modificar de la siguiente manera:

$$W = Mg \qquad \text{(vi)}$$

Cuando se quiera convertir de peso a masa o viceversa cualquier sustancia o materia, y la gravedad en el lugar sea diferente al valor de 9.80665 m/seg^2, entonces debe corregirse la ecuación (vi) por un factor g_c

$$F = \frac{1}{g_c} Mg \qquad \text{(vii)}$$

Si la ecuación (vii) se aplica a una masa que se encuentra en un lugar donde g es igual a 9.80665 m/seg^2 utilizando las unidades de kilogramo fuerza y kilogramo masa, tenemos que:

$$1\ Kg_f = \left(\frac{1}{g_c}\right)(1\ Kg_m)(9.8066\ m/seg^2)$$

---

[1] Al aclarar que el kilogramo fuerza y el kilogramo masa son numéricamente iguales, no significa que el $Kg_f = Kg_m$, sino que el valor numérico de cada uno de ellos es igual

Al despejar g_c de la ecuación anterior:

$$g_c = 9.80665 \frac{Kg_m - m}{Kg_f - seg^2} \qquad \text{(vii)}$$

El factor g_c sólo depende de las unidades usadas que en el sistema métrico decimal son: kilogramo fuerza, kilogramo masa, metro (unidad de longitud) y el segundo (unidad de tiempo). Hay que recordar que son medidas arbitrarias, o sea que son medidas fabricadas por el hombre con el propósito de cuantificar, y en el caso del peso y la masa, para poder medirlas se partió de un nivel referencial donde la gravedad tiene el valor de 9.80665 m/seg^2 nombrada gravedad normal. Cuando la gravedad es diferente a la normal, el kilogramo fuerza deja de ser numéricamente igual al kilogramo masa; por lo que el factor g_c nos va a servir para cuantificar a cualquiera de los dos Kg_f y Kg_m teniendo el valor de uno de ellos y la gravedad local, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo I. Si tenemos cierta cantidad de agua que pesa 10 Kg_f y se encuentra en un lugar donde la gravedad es de 9.73 m/seg^2 ¿Qué cantidad de masa tendrá en kilogramos masa?

Solución Se despeja la masa de la ecuación (vi)

$$M = \frac{Fg_c}{g}$$

Al sustituir la ecuación anterior tenemos:

$$M(\text{en } Kg_m) = \frac{(10\ Kg_f)\left(9.80665 \frac{Kg_m - m^2}{Kg_f - seg}\right)}{9.75 \frac{m^2}{seg}}$$

10 Kg_f tienen una masa de 10.0581 Kg_m

Como puede observarse del ejemplo anterior, el valor numérico del kilogramo fuerza y el kilogramo masa casi es el mismo, por lo que se puede generalizar teniendo un valor único de la gravedad para todos los puntos de nuestro planeta. Este valor único de g es de 9.81 m/seg^2. El valor de g_c se utiliza cuando se desea conocer la masa exacta de cualquier sustancia; en la hidráulica generalmente se trabaja con unidades de fuerza.

Otra unidad de fuerza es el Newton Nt que se define como la fuerza unitaria que produce una aceleración unitaria —en m/seg —, sobre una masa unitaria —en Kg_m—.

$$1\ Nt = 1\ Kg_m\ 1\ m/seg \qquad \text{(viii)}$$

O sea:

$$1\ Nt = 1\ Kg_m \frac{m}{seg^2} \qquad \text{(ix)}$$

Anteriormente se mencionó que 1 Kg_f es numéricamente igual a 1 Kg_m, siempre y cuando sea $g = 9.81\ m/seg^2$

$$1\ Kg_f = 1\ Kg_m \cdot 9.81\ m/seg^2 \qquad (x)$$

O sea:

$$1\ Kg_f = (9.81)(1\ Kg_m\ m/seg^2) \qquad \text{(xi)}$$

Sustituyendo la ecuación (ix) en (xi), tenemos que:

$$1\ Kg_f = (9.81)(1\ Kg_m\ m/seg^2) \qquad \text{(xii)}$$

Otra unidad de masa es la Unidad Técnica de Masa U.T.M, donde un U.T.M. se define como la cantidad de masa que tiene una acelera - ción unitaria —en m/seg^2— bajo la acción de una fuerza unitaria - —en Kg_f—.

$$1\ Kg_f = 1\ U.T.M.\quad 1\ m/seg^2 \qquad \text{(xiii)}$$

O sea:

$$1\ Kg_f = 1\ U.T.M.\quad m/seg^2 \qquad \text{(xiv)}$$

Dicho de otra manera, el Kg_f es numéricamente igual al Kg_m siempre y cuando la masa tenga una aceleración de $1\ m/seg^2$ como se puede ver en la ecuación (x) , el U.T.M. si puede cuantificar al Kg_f y ésto no sucede con el Kg_m como se ve en la ecuación viii. Ello se debe a que el U.T.M. se deriva del Kg_f. Lo mismo sucede con el Nt que es un derivado del Kg_m, como se puede apreciar en la ecuación viii.

Al igualar las ecuaciones (xiii) y (x) se obtiene:

$$1 \text{ U.T.M.} \quad 1 \frac{m}{seg^2} = 1 \text{ Kg}_m \cdot 9.81 \frac{m}{seg^2} \qquad \text{(xv)}$$

Si despejamos la ecuación (xv)

$$1 \text{ U.T.M.} = \frac{1 \text{ Kg}_m \quad 9.81 \text{ m/seg}^2}{1 \text{ m/seg}^2}$$

$$1 \text{ U.T.M.} = 9.81 \text{ Kg}_m \qquad \text{(xvi)}$$

Si el peso w de una masa tiene el valor de 1 Kg_f, la masa tiene una acelración de 9.81 m/seg^2 que es la gravedad normal, o sea 9.81 veces mayor que 1 m/seg^2, que es la aceleración a la que está expuesta la masa para definir 1 U.T.M, por lo que la ecuación que cuantifica al U.T.M. con respecto al peso —en Kg_f— será:

$$M(\text{U.T.M.}) = \frac{W(Kg_f)}{g(m/seg^2)} \qquad \text{(xvii)}$$

SISTEMA COMUN DE UNIDADES

SISTEMAS DE UNIDADES

ABSOLUTO	C.G.S. (Centímetro gramo segundo	Masa. . . .	Gramo masa (unidad fundamental)
		Longitud. .	Centímetro (unidad fundamental)
		Tiempo. . .	Segundo (unidad fundamental)
		Fuerza. . .	Dina (unidad derivada)
	M.K.S. (Metro Kilogramo segundo)	Masa. . . .	Kilogramo masa (unidad fundamental)
		Longitud. .	Metro (unidad fundamental)
		Tiempo. . .	Segundo (unidad fundamental)
		Fuerza. . .	Newton (unidad derivada)
GRAVITACIONAL	M.K.S. (Metro Kilogramo segundo)	Masa. . . .	Unidad técnica de masa (u. derivada)
		Longitud. .	Metro (unidad fundamental)
		Tiempo. . .	Segundo (unidad fundamental)
		Fuerza. . .	Kilogramo fuerza (u. fundamental)

EQUIVALENCIA ENTRE UNIDADES

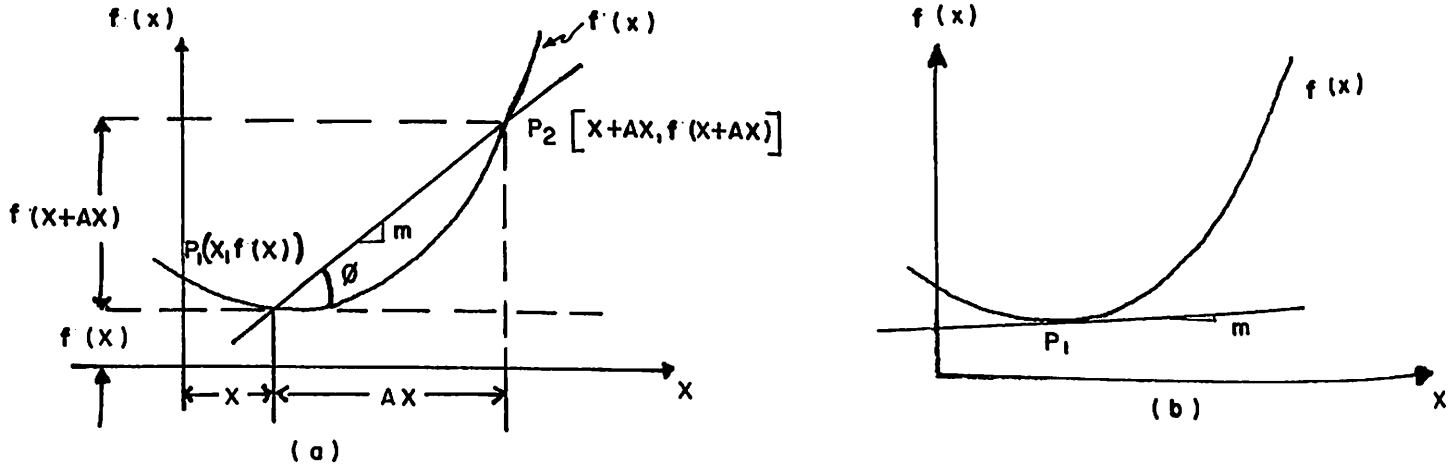
1 m = 100 cm	1 U.T.M. = 9.81 Kg_m	1 Kg_f = 9.81 Newton
	1 Kg_m = 1 000 gr_m	1 Nt = 10 000 Dinas
	1 U.T.M. = 9 810 gr_m	1 Kg_f = 981 000 Dinas

APENDICE B

TIPOS DE DERIVADA UTILIZADAS EN LA DEDUCCION DE LAS ECUACIONES

Si queremos obtener la pendiente de la secante (línea recta que pasa por dos puntos de una curva) de una función cualquiera (Figura a) se tiene que relacionar con la tangente del ángulo por lo que la pendiente de la secante será:

$$m_{sec} = \tan \qquad \text{(xviii)}$$



Gráfica de una f(x) cualquiera

a) Pendiente de la secante que pasa por P_1 y P_2 de f(x)
b) Pendiente de la tangente que pasa por P_1 de f(x)

$$\tan = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(xix)}$$

Al sustituir la ecuación xix en xviii tenemos:

$$m_{sec} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{(xx)}$$

Si el Δx se reduce hasta que tienda a ser cero, la secante pasará por un punto de la f(x) sin cruzarla, por lo que se convertirá en tangente, tal como se observa en la figura (b).

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] = \frac{d[f(x)]}{dx} = m_{tan} \qquad \text{(xxi)}$$

La derivada de una f(x) se define como la pendiente de la tangente de f(x) en un punto P cualquiera.

La derivada de una función puede ser total o parcial. Por ejemplo: si se tiene una función f(x,y,z) y se deriva en forma total con respecto a x (d f(x,y,z/dx), x, y y z son variables con respecto a x. Pero si se quiere derivar parcialmente con respecto a x ($\partial f(x,y,z)/\partial x$), y y z son constantes con respecto a x.

Para poder comprender mejor la aplicación de lo anterior, ilustraremos un ejemplo de un río al que se le quiere medir la densidad de peces c con respecto al tiempo t

$$c = \frac{\text{número de peces}}{\text{volumen de río}} \qquad \text{(xxii)}$$

Si utilizamos un dispositivo de manera que nos marque un volumen constante y tenga un contabilizador de los peces que entran en el volumen, el estudio lo podemos hacer de dos formas. Lo primero sería fijar el dispositivo y localizar cualquier vértice del volumen por medio de coordenadas rectangulares (fijas en algún lugar) y de acuerdo con esto, el estudio sería una derivada parcial de la densidad de peces con respecto al tiempo (c/ t) o sea que x, y y z son constantes. Este tipo de estudio está bien efectuado si se demuestra antes que la muestra que se va a medir es homogénea en todo el río o sea que no está en función de punto (cualquier parte localizada del río) o de lo contrario este estudio nada más servirá en el lugar que se efectuó.

La otra forma sería tomar una lancha con motor y movernos por todo el río y a la vez, ir cambiando de profundidad el dispositivo, entonces el estudio sería una derivada total de t con respecto a (dc /dt); y al tenerlo en función de derivadas parciales, sería:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad \text{(xxiii)}$$

donde dx/dt, dy/dt, dz/dt son las componentes de la velocidad lancha relativo a los tres ejes.

Si asumimos un estado estable o permanente de manera qu mismo número de peces que nacen son los que mueren, entonces riación que se tenga de concentración de peces en el río se rán al lugar (el punto) y no al tiempo, por lo que:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$dc = \frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial y}dy + \frac{\partial c}{\partial z}dz$$