

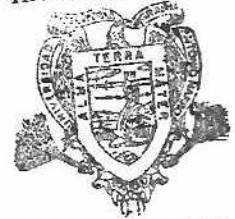
CONJUNCION DE MODELOS DE SIMULACION  
EN AGUA SUBTERRANEA

LUIS SAMANIEGO MORENO

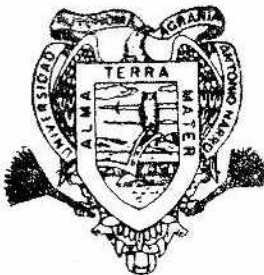
T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS  
EN RIEGO Y DRENAJE

Universidad Autónoma Agraria  
"ANTONIO NARRO"



BIBLIOTECA



Universidad Autónoma Agraria  
Antonio Narro

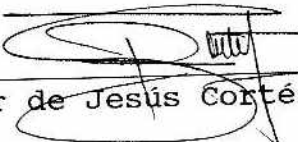
PROGRAMA DE GRADUADOS  
Buenavista, Saltillo, Coah.  
JUNIO DE 1997

Tesis elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y aprobada como requisito parcial, para optar al grado de

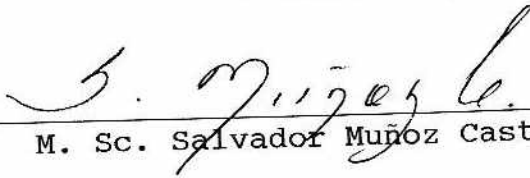
MAESTRO EN CIENCIAS  
EN RIEGO Y DRENAJE.

COMITE PARTICULAR

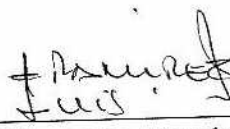
Asesor principal:


  
M. C. Javier de Jesús Cortés Bracho.

Asesor:

  
M. Sc. Salvador Muñoz Castro.

Asesor:

  
M. C. Luis Edmundo Ramírez Ramos.

  
Dr. Jesús M. Fuentes Rodríguez  
Subdirector de Postgrado

Buenavista, Saltillo, Coahuila. Junio de 1997

## AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por haber financiado mis estudios.

A la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro por darme la oportunidad de continuar mis estudios, y más que todo a mis Maestros por dar lo mejor de si.

Al Ing. M.C. Javier de Jesús Cortés Bracho por brindarme todo su apoyo para la realización de este trabajo.

Al M.Sc. Salvador Muñoz Castro por su valiosa colaboración y consejos para la realización de este trabajo.

Al Ing. M.C. Luis Edmundo Ramírez Ramos por sus consejos a lo largo de mi carrera.

Al Ing. Joaquín Méndez Borbolla por la gran ayuda que me brindó para la realización de este trabajo.

A mis compañeros de estudio, M.C. Héctor C. Cedillo, M.C. Gilberto Ramírez, Ing. J. Guadalupe Cortés Y. y al Ing. Fernando Baca por brindarme su amistad y conocimientos.

## DEDICATORIA

Con todo mi cariño, admiración y respeto para mi esposa Cristina E. de la que nunca me ha faltado su cariño, amor y apoyo. Gracias.

A mis señores padres, Dr. Elías Samaniego G. y Lic. Esperanza Moreno de S. por gran apoyo y amor que siempre me han dado. Muchas Gracias por velar por mi bienestar.

A mi hermano Ing. Carlos Samaniego M. y su familia por todo el cariño y consejos que siempre me han brindado.

Al Ing. M.C. Javier de Jesús Cortés B. por que más que un maestro se ha comportado como todo un buen amigo.

Al Lic. Hugo G. Aguilar G. por su apoyo y amistad.

Al Lic. Oscar Hernández A. y familia por todo su cariño y apoyo que he recibido.

A la memoria de mi abuelo Ing. Ernesto Moreno Monsiváis. En recuerdo a todos sus consejos. Gracias.

## COMPENDIO

Conjunción de Modelos de Simulación en Agua Subterránea.

POR

LUIS SAMANIEGO MORENO

MAESTRIA

RIEGO Y DRENAJE

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. JUNIO 1997

Ing. M. C. Javier de Jesús Cortés Bracho -Asesor-

Palabras clave: Geohidrología, flujo, programa, computadora, contaminación, acuífero.

El presente trabajo incorpora una herramienta para el estudio de los aspectos relacionados con la estimación de parámetros geohidrológicos, flujo del agua subterránea, intrusión de agua de mar y distribución de contaminantes.

Este trabajo consta básicamente en la recopilación de programas de modelos de simulación del agua subterránea, modificarlos y conjuntarlos en un solo paquete, así como dar la descripción teórica de los modelos y programas seleccionados. Esto es con el propósito de tener una herramienta que ayude al procesamiento de los datos en el estudio del agua subterránea. Los modelos y programas presentados han sido probados extensamente por sus autores.

ABSTRACT

Conjunction of Simulation Models in Ground Water.

BY

LUIS SAMANIEGO MORENO

MASTER OF SCIENCE

IRRIGATION AND DRAINAGE

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. JUNE 1997

Ing. M. C. Javier de Jesús Cortés Bracho -Advisor-

Key Words: Geohydrology, flow, program, computer,  
pollution, aquifer.

This work incorporates an instrument for the study of aspects regarding the estimation of aquifer parameters, groundwater flow, salt water intrusion and pollution distribution.

This work consists of the conjunction of programs dealing quite simulation models of ground water, modifying and coordinating them in one package, as well as giving the theoretical description of the models and programs selected. All of this with the purpose of having a tool which helps the processing of ground water data. The models and programs presented have been tested extensively by their authors.

## INDICE DE CONTENIDO.

Indice de Figuras. ....	ix
Indice de Cuadros. ....	xi
INTRODUCCION. ....	1
Objetivos. ....	1
REVISION DE LITERATURA. ....	3
Los acuíferos como sistema. ....	3
Parámetros geohidrológicos. ....	4
Modelación del agua subterránea. ....	7
Tipos de modelos. ....	7
Modelos Analógicos. ....	9
Modelos Analíticos. ....	10
Modelos Matemáticos. ....	10
Intrusión de agua de mar. ....	19
Transporte de contaminantes. ....	22
MATERIALES Y METODOS. ....	24
Descripción del material utilizado. ....	24
Equipo electrónico. ....	24
Modelos seleccionados. ....	24
Estimación de Parámetros	
Geohidrológicos. ....	26
Flujo Estable. ....	41
Flujo No Estable. ....	76
Contaminación del Agua Sub-	
terránea. ....	96
RESULTADOS. ....	117
MOSIAS_1. ....	117
Aplicación. ....	117
MOSIAS_2. ....	118
Aplicación. ....	118
MOSIAS_3. ....	121
Aplicación. ....	121
MOSIAS_4. ....	123
Aplicación. ....	123
MOSIAS_5. ....	126
Aplicación. ....	126
MOSIAS_6. ....	127
Aplicación. ....	127

MOSIAS_7. ....	129
Aplicación. ....	129
MOSIAS_8. ....	131
Aplicación. ....	131
MOSIAS_9. ....	132
Aplicación. ....	132
DISCUSION. ....	134
CONCLUSIONES. ....	135
RESUMEN. ....	136
LITERATURA CITADA. ....	138
APENDICES. ....	142
Apéndice A ....	143
Apéndice B ....	146
Apéndice C ....	150
Apéndice D ....	153
Apéndice E ....	156
Apéndice F ....	159
Apéndice G ....	162
Apéndice H ....	165
Apéndice I ....	169
Apéndice J ....	173



## INDICE DE FIGURAS.

Figura	Página
2.1. Interpretación física del coeficiente de almacenamiento. ....	6
2.2. Malla de cuadrados. ....	13
2.3. Región R cubierta con una cuadrícula de diferencias finitas con nodos centrados en block. ....	14
2.4. Región R cubierta con una cuadrícula de diferencias finitas con nodos centrados en la malla. ....	14
2.5. Dominio R dividido dentro de elementos triangulares. ....	18
2.6. Interpolación lineal de la carga sin elementos. ....	19
2.7. Cuña de agua salada en un acuífero costero. ....	20
2.8. Formación de conos invertidos de agua salada debajo de captaciones. ....	21
3.1. Pantalla de presentación del paquete MOSIAS. ....	27
3.2. Programas a ejecutar por el paquete MOSIAS. ....	27
3.3. Pantalla de presentación del programa MOSIAS_1. ....	32
3.4. Programa esquemático de una extracción variable para pruebas de bombeo. ....	34
3.5. Pantalla de presentación del programa MOSIAS_2. ....	40
3.6. Aproximación de la segunda derivada. ....	44
3.7. Pantalla de presentación del programa MOSIAS_3. ....	49
3.8. Acuífero freático con percolación. ....	52

3.9.	Una típica función de forma. ....	54
3.10.	Forma de entrada de datos para el programa MOSIAS_4. ....	70
3.11.	Formación de un elemento cuadrangular. ....	73
3.12.	Forma de entrada de datos para el programa MOSIAS_6. ....	81
3.13.	Malla de elementos en un problema de interfase. ....	89
3.14.	Forma de entrada de datos al programa MOSIAS_8. ....	93
3.15.	Movimiento de la interfase en un intervalo de tiempo. ....	95
3.16.	Desarrollo temporal de la distribución unidimensional de contaminante. ....	99
3.17.	Casos de campo donde soluciones unidimensionales se pueden aplicar. ....	102
3.18.	Distribución de concentración bidimensional debido a una inyección instantánea. ....	105
3.19.	Distribución de concentración bidimensional debido a una inyección permanente. ....	109
3.20.	Fuente distribuida de contaminante en dos dimensiones. ....	111
4.1.	Curva tipo y gráfica de abatimientos observados. ....	120
4.2.	Curva de abatimiento y recuperación durante la prueba de bombeo. ....	121
4.3.	Ejemplo del método de diferencias finitas. .	123
4.4.	Problema elemental para resolver por el programa MOSIAS_4. ....	125
4.5.	Problema resuelto con el programa MOSIAS_5. ....	126
4.6.	Ejemplo de resultados obtenidos por el programa MOSIAS_6. ....	129
4.7.	Resultados obtenidos con la ejecución del programa MOSIAS_8. ....	132

## INDICE DE CUADROS

Cuadro	Página
4.1. Datos de entrada de la prueba de bombeo para la aplicación del programa MOSIAS_1. ....	117
4.2. Resultados obtenidos por la ejecución del programa MOSIAS_1. ....	118
4.3. Abatimientos calculados con la ejecución del programa MOSIAS_2. ....	119
4.4. Resultados obtenidos con la ejecución del programa MOSIAS_4. ....	125
4.5. Resultados obtenidos con la ejecución del programa MOSIAS_5. ....	127
4.6. Resultados obtenidos por la ejecución del programa MOSIAS_7. ....	130
4.7. Resultados de la aplicación del programa MOSIAS_9. ....	133

## INTRODUCCION

El origen del agua subterránea siempre ha sido un misterio desde tiempos muy remotos, la mayoría de la gente ha considerado que el agua subterránea proviene de la filtración y percolación del agua de ríos, lluvia, o de la nieve.

El agua subterránea es de gran importancia debido a que en muchos lugares es la única fuente de abastecimiento, teniendo usos agrícolas, municipales e industriales.

Para el estudio del comportamiento del flujo del agua subterránea, movimiento de contaminantes e intrusión de agua de mar, se utilizan modelos analógicos, analíticos o matemáticos, los cuales son una representación de la realidad con variables de entrada y salida. En la actualidad muchos de estos modelos se pueden encontrar codificados en lenguajes de programación para computadora.

### Objetivos

A.- Recopilación de programas de modelos de simulación del flujo de agua subterránea, movimiento de contaminantes e intrusión de agua de mar, con el fin de integrarlos en un solo paquete.

B.- Dar los aspectos teóricos de los modelos, así como las características de los programas, además dar las instrucciones necesarias para la ejecución de cada programa.

## REVISION DE LITERATURA

### Los Acuíferos Como Sistema

De acuerdo con García (1982) sistema es un conjunto de principios coordinados para formar un todo científico, por otro lado Custodio y Llamas (1983) y Domenico (1972) señalan que matemáticamente, un sistema puede ser definido por una serie de parámetros y variables. Los parámetros pueden describir los componentes geométricos del acuífero, como lo son su forma o límites y los componentes físicos tales como la transmisividad o el coeficiente de almacenamiento. Las variables, indican la situación del sistema en todo momento y éstas pueden ser, las alturas piezométricas, concentración de contaminantes o velocidades del flujo. También se tiene que las acciones exteriores, que modifican de alguna manera a un sistema, se pueden clasificar como entradas y salidas. Las entradas pueden ser de dos tipos: a) controlables, que en general se denominan variables de decisión y pueden ser bombes, drenajes o recargas artificiales, y b) incontrolables, que dependen de los factores hidrológicos y climatológicos, como la recarga natural de un acuífero.

Custodio y Llamas (1983) mencionan que en todo sistema existen limitaciones que pueden ser del tipo físicas

(linderos del acuífero, alturas piezométricas) o impuestas artificialmente (para posiblemente evitar la intrusión de agua de mar). También existen limitaciones debidas a criterios de planificación (máximos o mínimos gastos de recarga o extracción). Con todos los elementos existentes de un sistema se pueden formular tres tipos de problemas. Los de optimización, los de simulación y los de identificación. Un problema de optimización es cuando se tiene que el objetivo en cuestión se puede plantear matemáticamente y el resultado que se obtendrá será un máximo o un mínimo, como es el caso de mínimo costo o una extracción máxima. Para un problema de simulación de algún sistema, se tiene que partir de sus componentes físicos, geométricos y de un estado inicial, al sistema se le aplicará una serie de acciones, de las que se quiere conocer su reacción, y se obtienen como resultado, las que alcanzaría el sistema en períodos sucesivos de tiempo. Cuando se conocen algunos parámetros o actitudes del acuífero de forma histórica, se tiene como resultado, situaciones del sistema que se pueden comparar con mediciones directas hechas en el pasado, y con ello se podrá conocer la calidad del método empleado. Este es un problema de identificación.

#### Parámetros Geohidrológicos

Muchos de los recientes estudios geohidrológicos, han sido dirigidos hacia la evolución de técnicas rápidas y económicas para la estimación de parámetros geohidrológicos representativos, que serán usados para la evaluación del po-

tencial regional del agua subterránea (Singh y Gupta, 1986). Estos parámetros son: el coeficiente de almacenamiento y la transmisividad. El coeficiente de almacenamiento ( $S$ ), es definido como el volumen de agua que el acuífero libera o que toma lugar en el almacenamiento por unidad de área superficial por unidad de caída o elevación de la carga. En la figura 2.1 se muestra la interpretación física del coeficiente de almacenamiento. Bajo condiciones de manto freático el coeficiente de almacenamiento es igual al rendimiento específico cuando el drenaje se ha completado. El rango de valores para este parámetro es del orden de 0.02 a 0.30 para acuíferos libres, mientras que para acuíferos artesianos el rango es de 0.00001 a 0.001, este parámetro es adimensional. La transmisividad ( $T$ ) indica la capacidad de un acuífero para transmitir agua a través de todo su espesor y también es igual al coeficiente de permeabilidad multiplicado por el espesor saturado del acuífero, y es definido como la velocidad de flujo de agua, en metros cúbicos por día, a través de una tira vertical del acuífero de un metro de ancho y extendiéndose por todo el espesor del acuífero bajo un gradiente hidráulico de un metro por metro a la temperatura predominante del agua (Walton, 1970).

Usualmente, las investigaciones de los acuíferos implican medir el abatimiento de los niveles piezométricos en los pozos bajo la influencia del bombeo. Estas mediciones, ayudan a la elección de un modelo apropiado del acuífero y a la estimación del coeficiente de almacenamiento y de la



transmisividad (Johns *et al.*, 1992). Para una evaluación de los recursos de agua subterránea, se requiere de una determinación exacta del almacenamiento del acuífero y de la transmisión del agua (Sen, 1984), estos parámetros son evaluados a través de pruebas de bombeo (Robson y Banta, 1990 y Aziz y Wong, 1992), en donde los datos obtenidos son analizados por procedimientos gráficos o analíticos (Sridharan *et al.*, 1987). El análisis básico de la hidráulica del pozo o acuífero, depende de la representación idealizada del acuífero y sus límites. Varias asunciones se hacen cuando métodos analíticos son aplicados al análisis de los datos de la prueba del acuífero (Aziz y Wong, 1992).

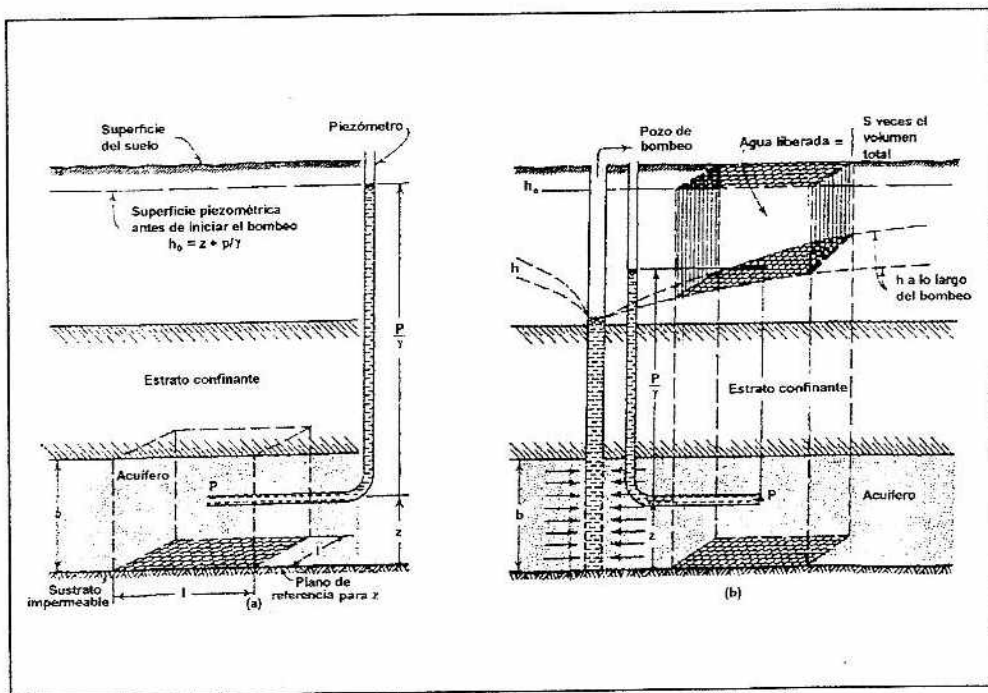


Figura 2.1. Interpretación física del coeficiente de almacenamiento (Tomado de Davis y De Wiest, 1971).

## Modelación del Agua Subterránea

El análisis del flujo del agua en un sistema de acuíferos, es un tema de gran interés (Cleveland *et al.*, 1992) para evaluar los costos, beneficios y riesgo de un plan de desarrollo de las fuentes de agua. Los modelos muchas veces son requeridos para simular los impactos de los escenarios sobre la recarga, niveles y rendimiento total del agua subterránea (Arnold *et al.*, 1993).

### Tipos de Modelos

La administración moderna de los acuíferos para propósitos de explotación o de prevención de contaminantes, se lleva a cabo por medio de modelos numéricos de flujo y transporte (Szekely, 1990). Estos modelos no son otra cosa, más que una pequeña representación de la realidad por medio de postulados e inferencias. Los modelos también pueden ser usados para conocer acerca del comportamiento de alguna variable dada dentro de algún sistema (Hanks y Ritchie, 1991).

Usualmente la información es necesaria para evaluar los recursos de agua en un área a estudiar, para calcular las tasas de extracción, y los efectos de éstas pueden ser datos de entrada para los modelos (Price, 1985). Los modelos se han utilizado para una gran gama de situaciones, tales como, la determinación de la descarga y abatimientos de los pozos

(Tarshish, 1992; 1993), también para la seguridad de los depósitos de contaminantes tóxicos y nucleares (Tsang, 1991), así como para la prevención del movimiento de virus (Udoyara y Mostaghimi, 1991), conos invertidos de agua salada en un acuífero (Motz, 1992), transporte de solutos (Gottardi y Venutelli, 1994), interpretación de bombeos (Rathod y Rushton, 1991), optimización de parámetros del agua subterránea (Olsthoorn, 1995), flujo de agua (Yeh et al., 1993), fluctuaciones diurnas de los niveles del agua subterránea (Johansson, 1986), flujo de agua en medios no saturados (Green et al., 1970) entre otros.

Para el estudio de los sistemas de agua subterránea, se han utilizado varios tipos de modelos, entre ellos están los modelos analógicos, matemáticos y analíticos (Custodio y Llamas, 1983; Linsley et al., 1949 y Wang y Anderson, 1982).

Según Custodio y Llamas (1983) en el estudio del flujo de agua subterránea, se deben de conocer, la geometría del acuífero, sus propiedades físicas, las leyes que rigen el movimiento del agua, los límites y condiciones del sistema en un tiempo inicial, y las acciones exteriores del sistema. Por lo general el movimiento del agua subterránea a través de un medio permeable, es descrito como una ecuación diferencial parcial.

## Modelos Analógicos

Los modelos analógicos, resuelven la ecuación diferencial parcial de flujo en una forma indirecta. Se utiliza un fenómeno físico que tenga una ecuación diferencial parecida a la del acuífero. Estos fenómenos físicos pueden ser una malla de resistencias y capacitores (Custodio y Llamas, 1983).

Hay modelos analógicos que consisten en el paso de un fluido mas viscoso que el agua a través de dos paredes de metal paralelas, que están orientadas vertical u horizontalmente (Wang y Anderson, 1982).

En una red análoga de resistencias y capacitores, las soluciones de la ecuación diferencial, reemplazada por la ecuación diferencial de flujo, puede ser visualizada en un osciloscopio. Estos modelos trabajan de acuerdo al principio de que el flujo de agua subterránea es análogo al flujo de electricidad. Esta analogía es expresada entre la ley matemática de Darcy para agua subterránea, y la ley de Ohm para el flujo de electricidad. Los nudos en un circuito eléctrico, se usan para simular las propiedades distribuidas de los estratos subsuperficiales (De Wiest, 1965).

## Modelos Analíticos

Este tipo de modelos dan la solución exacta de la ecuación diferencial por medio de funciones analíticas, y se resuelven para un tipo de problema en especial y relativamente simple (Custodio y Llamas, 1983).

Los modelos analíticos han sido en el pasado y continúan siendo, una potente herramienta en las investigaciones del agua subterránea. Aunque con algunas limitaciones en su aplicación, los modelos analíticos son muy útiles en los análisis de las pruebas de bombeo, en la evaluación de un sistema simple de acuíferos, diseño, calibración o verificación de modelos numéricos computacionales, y para el entendimiento de los principios básicos del flujo y transporte del agua subterránea (Walton, 1979).

## Modelos Matemáticos

Los modelos matemáticos, son aquellos que utilizan los métodos numéricos para la solución de la ecuación diferencial de flujo, y consisten en un grupo de ecuaciones diferenciales que son conocidas y gobiernan el flujo del agua subterránea. Este tipo de modelos han sido usados desde los fines del siglo pasado (Custodio y Llamas, 1983).

La veracidad de las soluciones de un modelo, depende de la exactitud que sean sus predicciones, así como de los

datos disponibles y las asunciones hechas, éstas son necesarias debido a que el hacer un modelo que comprenda todos los aspectos del acuífero sería demasiado complicado. Dos de los métodos que más se han utilizado para la solución de dichas ecuaciones son, el método de diferencias finitas y el método del elemento finito (Wang y Anderson, 1982).

Método de Diferencias Finitas. Bear y Verruijt (1987), Wang y Anderson (1982) y Custodio y Llamas (1983) explican que el método de las diferencias finitas, fue el primer método usado para la solución numérica sistemática de ecuaciones diferenciales parciales. Aunque las ideas fundamentales han sido establecidas y usadas por matemáticos en el siglo XVIII, tal como Taylor y Lagrange, la aplicación del método de diferencias finitas a la solución de problemas de ingeniería, es usualmente considerado como un hecho notable de los científicos del siglo XX.

La aplicación de técnicas estándar del método de diferencias finitas, en los problemas de transporte de solutos, movimiento de contaminantes, intrusión de agua marina, y flujo radial del agua subterránea, dependen de los resultados de las aproximaciones hechas por el método y de la formulación de algoritmos aplicados en el código del modelo. En algunos casos se tiene que un modelo simula realísticamente o tiene una pobre interpretación del sistema físico (Merrit, 1993).

Otro de los usos del método de diferencias finitas, es la comparación de métodos. Uno de ellos, es la comparación del método espectral y el de diferencias finitas en un modelo para evitar las inundaciones. Las soluciones espectrales de un problema hipotético son comparadas con las soluciones obtenidas por el método de diferencias finitas (Sinha *et al.*, 1995).

Bear y Verruijt (1987), Wang y Anderson (1982) y Custodio y Llamas (1983) mencionan que en general, el método consiste en una aproximación de derivadas parciales por expresiones algebraicas, involucrando los valores de la variable dependiente en un número limitado de puntos seleccionados. Como un resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema, es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas escritas en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados. Las ecuaciones son lineales si las ecuaciones diferenciales parciales originales también lo son. Los valores en los puntos seleccionados se hacen desconocidos y el sistema de ecuaciones algebraicas se puede resolver.

Lo anterior involucra un gran número de operaciones algebraicas que originalmente se ejecutaban manualmente o por el uso de aparatos mecánicos. Sin embargo, desde el uso de equipo de cómputo, las ecuaciones son usualmente ejecutadas por medio de programas (Bear y Verruijt, 1987).

La idea básica del método de diferencias finitas, es que una región  $R$  es cubierta con dos familias de líneas rectas paralelas, en las direcciones  $x$ - $y$  respectivamente, las cuales en conjunto forman una malla de rectángulos. El tipo más simple de malla es generado cuando todos los intervalos entre las líneas son iguales, y en este caso la malla consiste en cuadrados. (figuras 2.2., 2.3. y 2.4.) El valor de una variable  $\phi$  en un punto nodal de la malla (o nodo) es ahora denotado por  $\phi_{i,j}$ . Donde  $i$  indica la posición de la línea vertical de la malla (columna) y  $j$  la línea horizontal de la malla (fila). La serie de valores  $\phi_{i,j}$  se determinan aproximando la función continua  $\phi(x,y)$  en los puntos con coordenadas  $x = x_i$ ,  $y = y_j$  (Wang y Anderson, 1982).

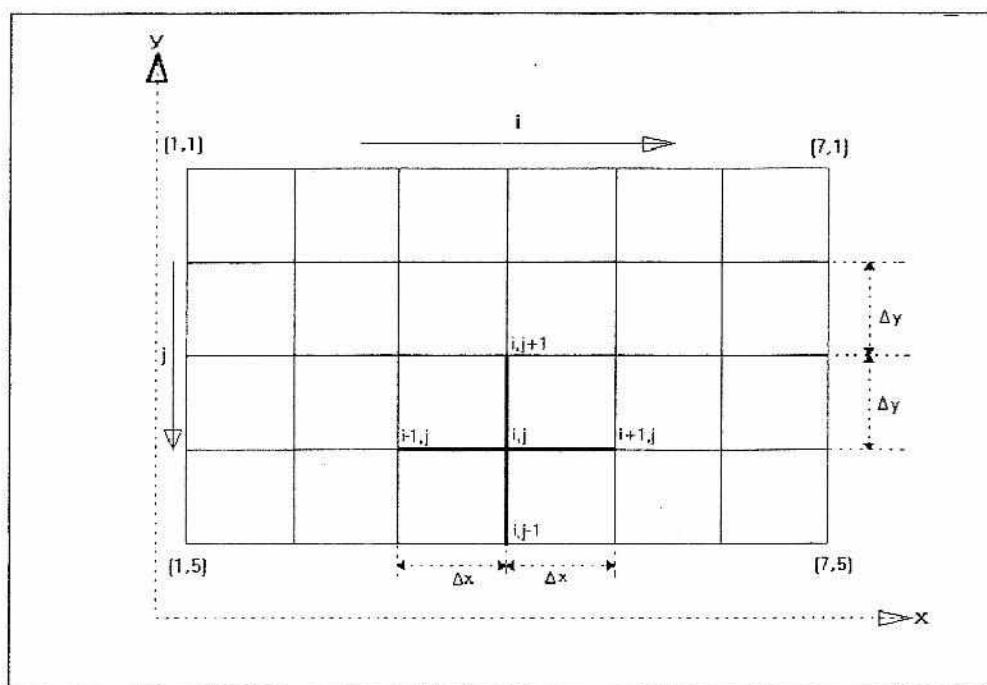


Figura 2.2. Malla de cuadrados (Tomado de Wang y Anderson, 1982).



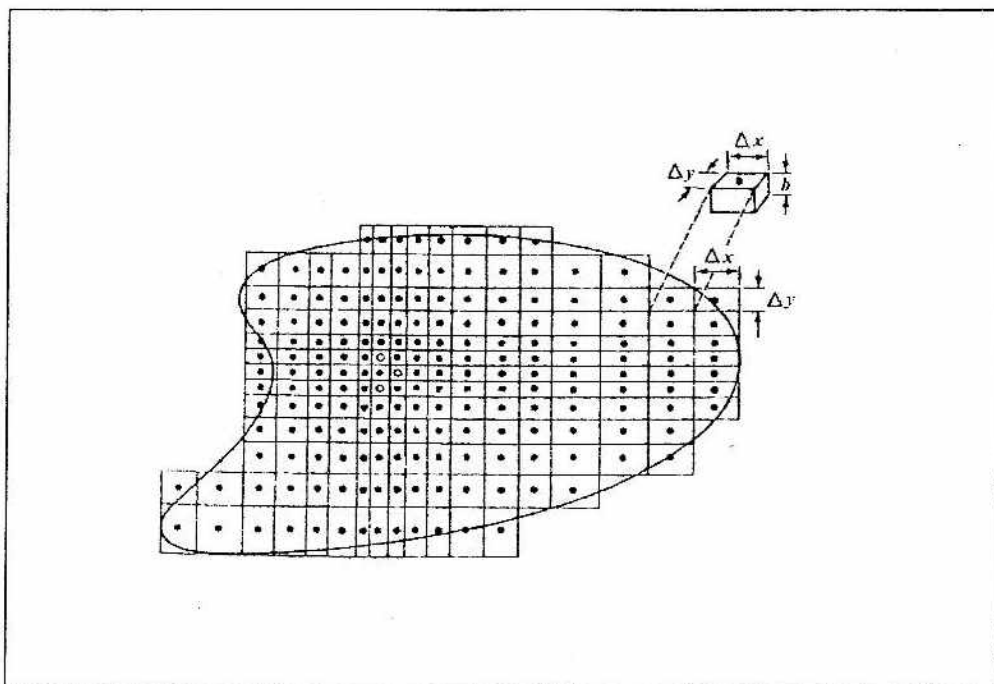


Figura 2.3. Región  $R$  cubierta con una cuadrícula de diferencias finitas con nodos centrados en block (Tomado de Wang y Anderson, 1982).

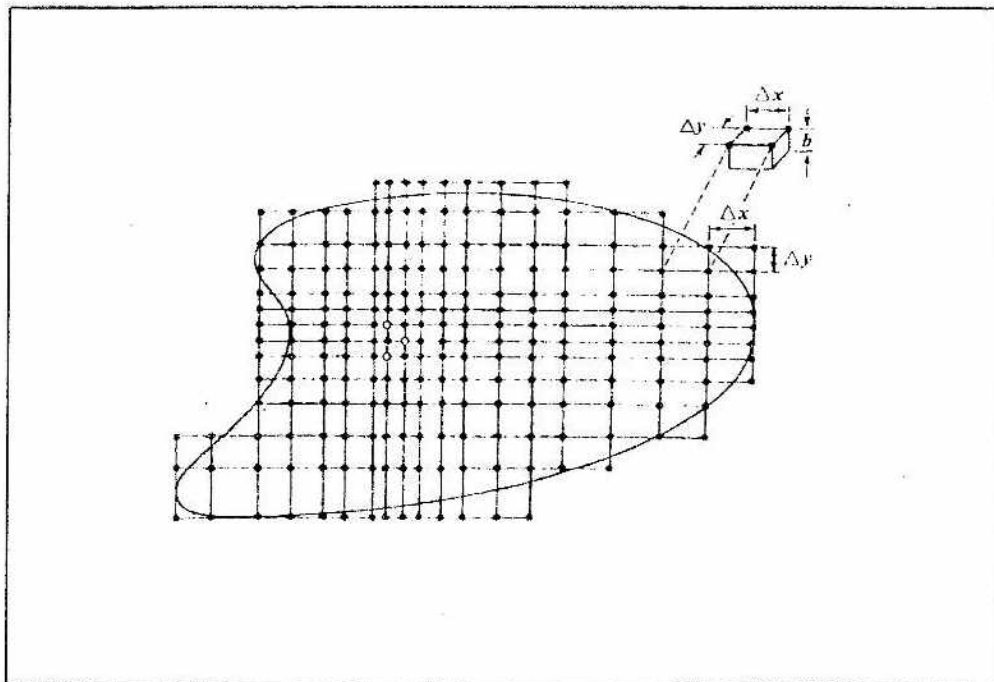


Figura 2.4. Región  $R$  cubierta con una cuadrícula de diferencias finitas con nodos centrados en la malla (Tomado de Wang y Anderson, 1982).

En la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, la condición que especifica los valores de la variable dependiente en todos los puntos de un segmento es referida como una condición de barrera de primera clase, o una condición Dirichlet, que declara que la carga piezométrica de agua subterránea ( $\phi$ ) se especifica a lo largo de cierta parte de los límites, en este caso, el valor de la carga en los nodos sobre la parte de los límites es conocido con anterioridad. Cuando esto se cumple a lo largo de todo el límite, se crea un sistema de ecuaciones lineales, las cuales son tantas ecuaciones como incógnitas, debido a que se puede escribir una ecuación para cada nodo en el interior del dominio. Por otro lado, cuando se tienen condiciones que especifican el gradiente de presión, el gradiente hidráulico o una combinación lineal de sus componentes como una función de localización y posiblemente el tiempo sobre la barrera, se tienen las características referidas a las condiciones de barrera de segunda clase o condición de Neumann. Cuando el dominio del medio poroso está en contacto con un cuerpo de agua continuo (u otro medio poroso dominante) a través de una capa semipermeable separando a los dos dominios, se tiene una condición mixta de límite o de barrera de tercera clase conocida como una condición de Cauchy (Bear y Verruijt, 1987).

Método del Elemento Finito. El método fue desarrollado en los años cincuentas, primero para problemas de ingeniería aeronáutica, ingeniería mecánica (reactores nucleares), e ingeniería civil (puentes). En años posteriores, el método

fue generalizado a prácticamente todas las áreas de la ingeniería incluyendo el flujo de agua subterránea, donde se requieren soluciones de campo (Bear y Verruijt, 1987).

El método tiene una amplia gama de aplicaciones, tal como es el caso de un modelo para simular una ola grande resultante de un colapso instantáneo de una presa. Este modelo predice la localización y altura de una ola inundante, así como los flujos subcríticos y supercríticos en diferentes partes de un canal en una secuencia de tiempo (Alam y Bhuiyan, 1995).

Es usual que para simulaciones de flujo con el método del elemento finito, las cargas piezométricas sean tratadas como incógnitas y se asuma que varían linealmente en elementos triangulares, y bilinealmente en elementos cuadrangulares. Esto resulta en un valor constante de descarga específica dentro de cada elemento (Yeh et al., 1993).

Bear y Verruijt (1987), Wang y Anderson (1982) y Custodio y Llamas (1983) explican que el método del elemento finito puede ser presentado de varias maneras. El problema matemático a resolver será formulado sobre la base de principios elementales de equilibrio de un simple elemento. Después se encontrará que los conceptos básicos serán convenientemente manejados usando una formulación variante del problema matemático original. Esto también para generalizar la aplicabilidad del método a una extensa clase de problemas de campo

en ingeniería. En el método del elemento finito, la región R, en que el flujo toma lugar, se subdivide en un gran número de pequeños elementos, en cada uno de los cuales la carga piezométrica de agua subterránea ( $\phi$ ) es aproximada por alguna función simple. Una manera sencilla de subdividir la región R es por el uso de elementos triangulares (figura 2.5.). Tales elementos hacen posible el seguir lo curvado de los límites, estas subdivisiones también facilitan el uso de una malla densa en subregiones de gran interés, y una malla ordinaria donde el flujo de agua no sea de utilidad. Un modo alternativo es el uso de elementos cuadrangulares sobre una forma arbitraria. Estos elementos son introducidos en una gran región por una combinación apropiada de triángulos.

Bear y Verruijt (1987) explican que una manera sencilla de aproximar la variación de la carga dentro de un elemento triangular, es por la asunción de que la carga varía linealmente dentro de cada elemento (figura 2.6.). La superficie piezométrica es de este modo aproximada por una en forma de diamante, tal que en cada elemento, la carga es representada por una superficie plana. La superficie generada por pequeños elementos planos, definidos por los valores en los puntos nodales es una superficie continua, las pendientes son discontinuas a través de los elementos de los límites. La carga de agua subterránea en un punto dentro de un elemento, es definido por una interpolación lineal entre los valores en los puntos de la malla, los nodos.

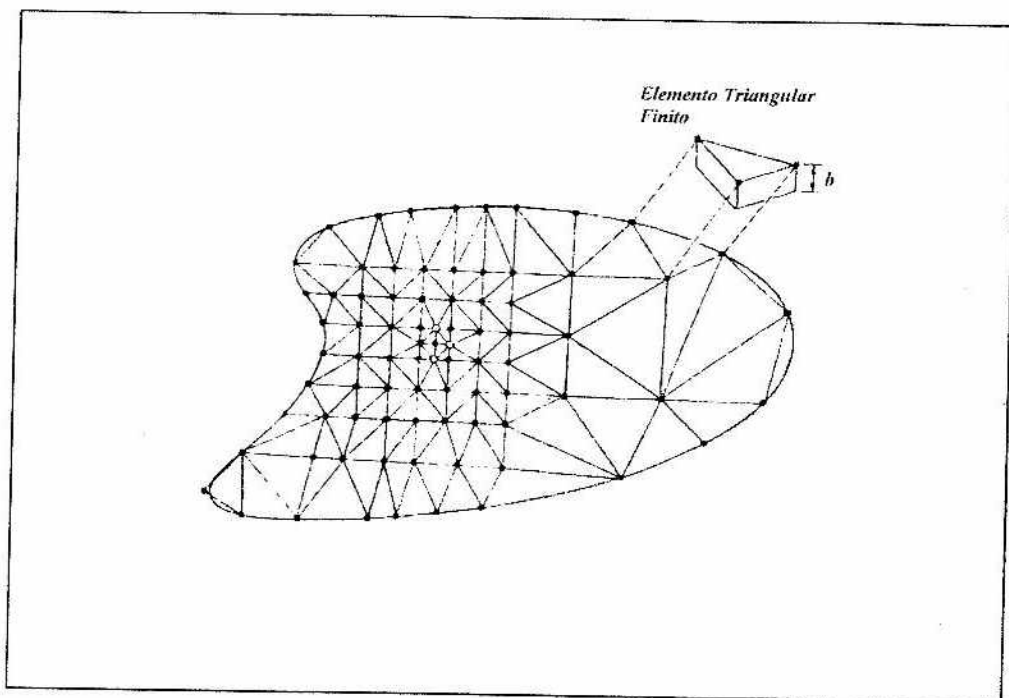


Figura 2.5. Dominio R dividido en elementos triangulares (Tomado de Wang y Anderson, 1982).

Wang y Anderson (1982) y Custodio y Llamas (1983) detallan que en el método de Gauss-Seidel se requiere de algunas estimaciones iniciales para los valores de las variables desconocidas. Si los cálculos se ejecutaran manualmente, probablemente sería costo efectivo para la prueba y se debería de usar una buena conjetura para las estimaciones iniciales. En un programa de computadora, lo anterior no es realmente necesario, debido a que el esfuerzo empleado para encontrar una buena conjetura inicial no puede ser balanceado por la ganancia en tiempo de cálculo. Similarmente, el número de iteraciones muchas veces no es determinado por el chequeo de los valores actuales de los residuos, porque éste en sí, usa tiempo de cálculo. Por lo que muchas veces el número de iteraciones es fijado a un valor predeterminado.

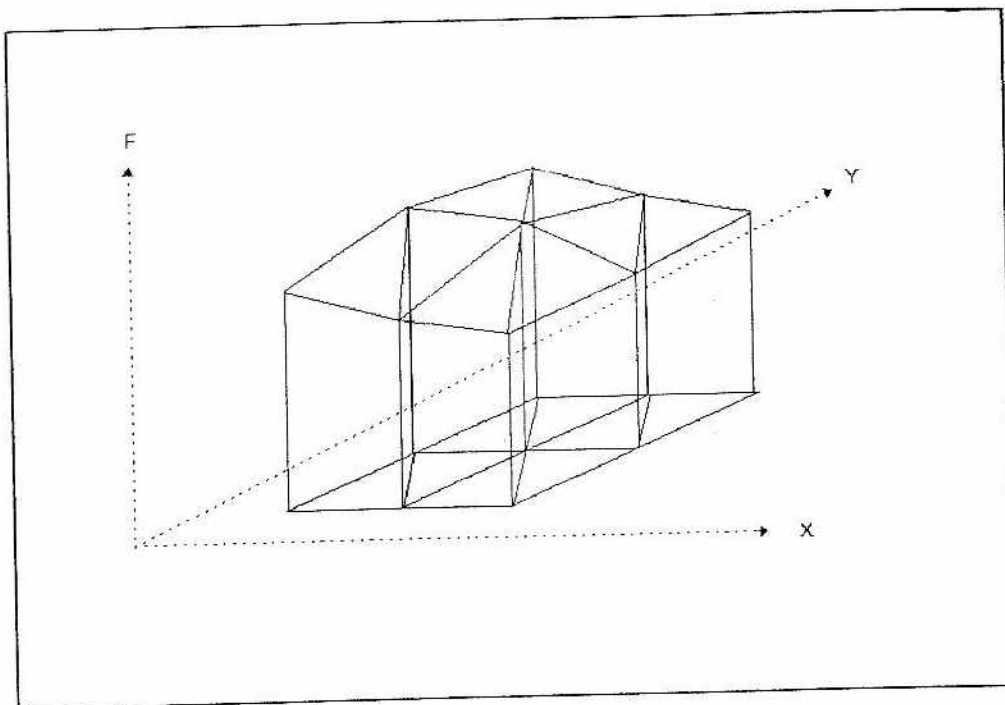


Figura 2.6. Interpolación lineal de la carga sin elementos (Tomado de Bear y Verruijt, 1987).

### Intrusión de Agua de Mar

La intrusión de agua de mar en un acuífero costero, puede ser definida como el incremento en la salinidad del agua en una localización dada y con una profundidad variable producida por los actos del hombre. La intrusión puede ser resultante de una variedad de influencias. Aquí un bombeo excesivo puede ocasionar movimiento lateral o hacia arriba del agua salina dentro de los pozos (Linsley *et al.*, 1949).

Los problemas de la intrusión de agua de mar, se acentúan en los lugares donde existen explotaciones de los acuíferos costeros. Cuando las extracciones de agua dulce son muy grandes, la altura del nivel freático en acuíferos libres

o altura piezométrica en los acuíferos confinados baja, iniciándose la intrusión de agua de mar (Keigth, 1973).

La cuña de agua salina, es una masa de gran longitud apoyada en la base del acuífero y con su vértice dirigido hacia tierra adentro (figura 2.7.), y es la forma normal de las masas de agua salada en los acuíferos a lo largo de la costa (Custodio y Llamas, 1983).

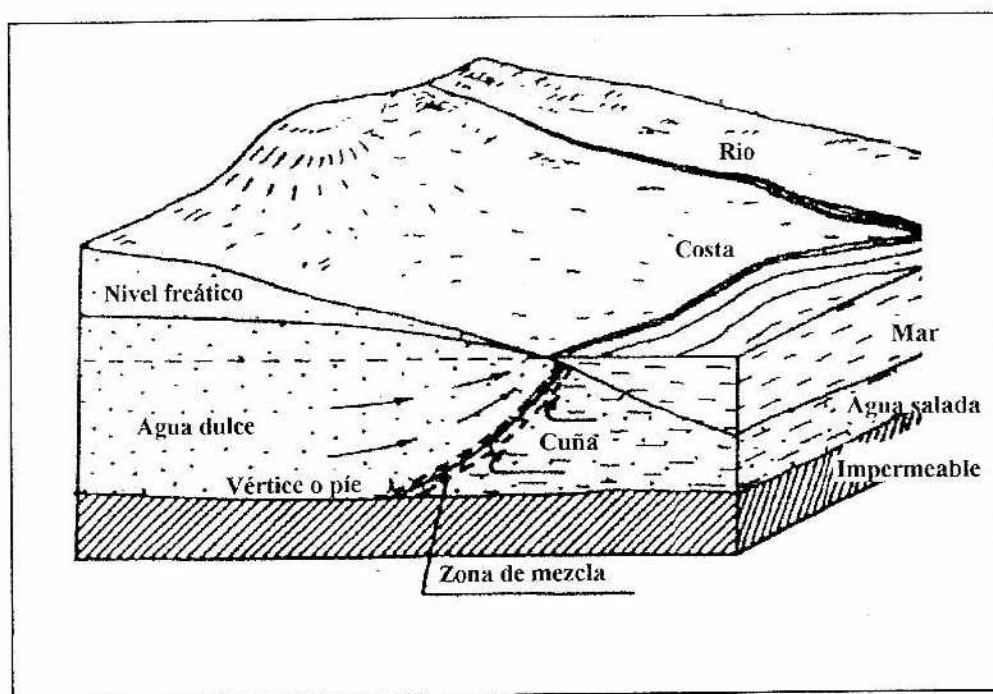


Figura 2.7. Cuña de agua salada en un acuífero costero (Tomado de Custodio y Llamas, 1983).

En muchas partes del mundo, el agua dulce en un acuífero costero está en contacto con agua salada. En respuesta al bombeo de un pozo en la zona de agua dulce, la interfase de agua dulce y salada se mueve verticalmente hacia el pozo que está bombeando (figura 2.8.). Bajo algunas condiciones, un cono estable se desarrollará en la interfase un poco más

abajo que el fondo del pozo, y éste seguiría descargando agua dulce, pero bajo otras condiciones, el cono está inestable, y la interfase asciende abruptamente al fondo del pozo en una forma semejante a un vértice, causando que la descarga se haga salada. El cono invertido de agua salada es una cuestión general y el problema se agudiza durante la estación de riego en áreas cultivadas (Motz, 1992).

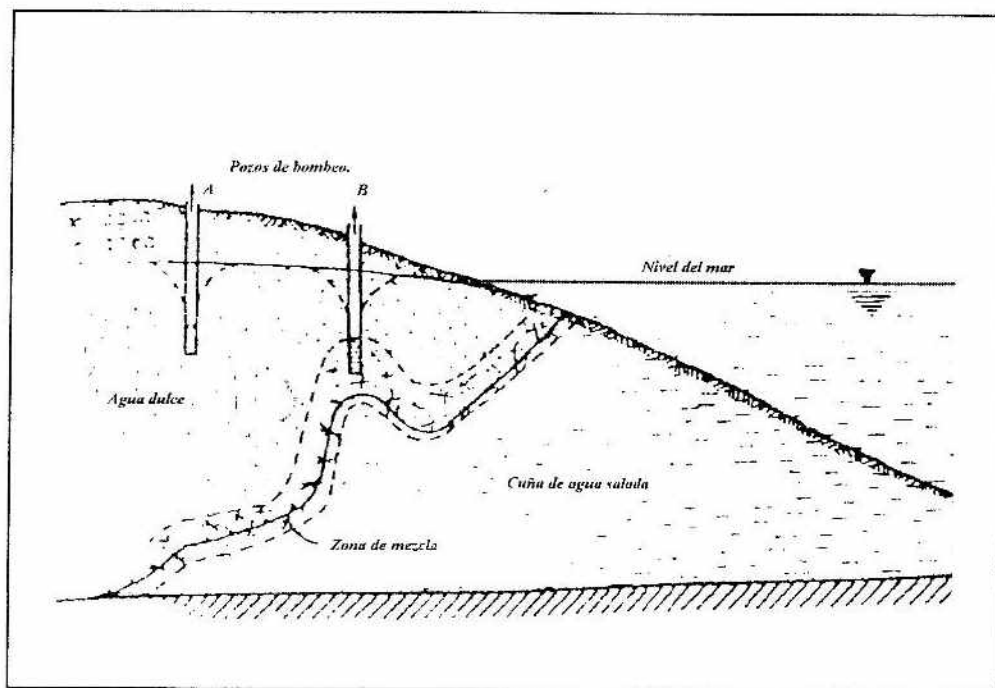


Figura 2.8. Formación de conos invertidos de agua salada debajo de captaciones (Tomado de Custodio y Llamas, 1983).

Muchos investigadores han hecho análisis cuantitativos de los sistemas de agua dulce y agua salada en un esfuerzo para describir matemáticamente el sistema físico y sus mecanismos. El agua dulce y salada son fluidos miscibles con una densidad diferente. Sin embargo, hay siempre una zona de contacto o de transición entre ellas causada por la dis-



persión hidrodinámica. Bajo ciertas condiciones, el espesor de esta zona es pequeña en comparación con el del acuífero, y así la zona de transición gradual de agua dulce y salada puede ser aproximada como una interfase aguda (Ledoux et al., 1990).

### Transporte de Contaminantes

En la evaluación de los recursos del agua subterránea, la calidad es de importancia casi igual a la cantidad. Las características químicas, físicas y bacteriales del agua subterránea, determinan su utilidad para proporcionar agua de uso municipal, comercial, industrial, agrícola y doméstico. El desarrollo social proporciona oportunidades para que el agua subterránea se contamine, una consideración debe de ser dada para la protección de la calidad. El estudio de la calidad del agua subterránea, implica una descripción de la ocurrencia de varios constituyentes y la relación de estos al uso del agua. Además, los datos de la calidad del agua del subsuelo dan importantes pistas de la historia geológica de las rocas e indicaciones de la recarga, descarga, movimiento y almacenamiento del agua subterránea (Walton, 1970).

El desarrollo de estrategias de manejo para la protección de los recursos de agua subterránea, deben ser basadas sobre un firme entendimiento del comportamiento de la contaminación natural del ambiente subsuperficial. Los escenarios realistas de contaminación comparten dos importantes

características. Primero, las reacciones químicas superficiales tal como adsorción son importantes debido a la enorme área interfacial sólido-agua de un medio poroso natural. Segundo, los acuíferos exhiben variabilidad espacial tridimensional en permeabilidad, por lo que la contaminación no es uniforme. (Valocchi, 1990).

Por ejemplo, desde hace varios años, un gran número de modelos han sido desarrollados para la simulación de procesos de transporte de varias especies químicas, que se unen a los procesos de reacción geoquímicos (Vogt y Herrling, 1990).

## MATERIALES Y METODOS

### Descripción del Material Utilizado

#### Equipo Electrónico

Para la ejecución de los programas de modelos de simulación en agua subterránea, se utilizó una computadora con un procesador 586, con una velocidad de 133 megahertz, y una capacidad de ocho megabytes de memoria RAM (Memoria de Acceso Aleatorio).

#### Modelos seleccionados

Los modelos fueron seleccionados para incorporar una herramienta útil en el estudio de los diferentes aspectos del agua subterránea, abarcando lo concerniente a, estimación de parámetros geohidrológicos, flujo del agua subterránea, intrusión de agua de mar, y cálculo de concentración de contaminantes.

Los programas han sido probados extensivamente por sus autores, a través de soluciones analíticas, y su forma de trabajar ha sido checada por medio de la ejecución de muchos problemas ejemplo. Sin embargo, los errores no pueden ser

totalmente excluidos. Hay que hacer notar que cada programa se utiliza solo para una cierta clase restringida de problemas, y que la ejecución de un programa puede depender de la combinación de los datos de entrada.

Los modelos seleccionados son:

- 1.- Estimación de parámetros geohidrológicos.
- 2.- Determinación de abatimientos en un pozo de bombeo.
- 3.- Flujo estable. Método de diferencias finitas, elementos cuadrangulares.
- 4.- Flujo estable. Método del elemento finito, elementos triangulares.
- 5.- Flujo estable con infiltración y percolación. Método del elemento finito.
- 6.- Flujo no estable. Método explícito de diferencias finitas.
- 7.- Flujo no estable. Método del elemento finito, elementos cuadrangulares.
- 8.- Flujo no estable en un plano vertical, agua salada y fresca con interfase aguda. Cono invertido debido a un solo pozo. Método del elemento finito.
- 9.- Cálculo de distribución de concentración de contaminantes en una y dos dimensiones.

Cada modelo seleccionado, cuenta con su respectivo programa para computadora, los cuales se le han llamado MOSIAS, (MODELos de SIMulación del Agua Subterránea) seguido del número respectivo en que aparecen, estos programas están

compilados en el lenguaje de programación de Turbo Basic versión 1.0 de 1987 y con un sistema operativo MS-DOS 6.22. Hay que hacer mención que el programa MOSIAS puede ser ejecutado desde cualquier unidad de disco flexible. Los requerimientos mínimos de equipo son: procesador 386, MS-DOS 3.0 o posterior y que la memoria mínima de RAM base debe de ser aproximadamente de 519 Kilobytes. A continuación se da una descripción teórica de cada modelo, así como la del programa para computadora. El paquete MOSIAS está integrado por un solo archivo ejecutable, en el cual están compilados los programas de los modelos. El listado del programa MOSIAS fuente (Mosias.bas) es mostrado en el apéndice A.

El programa inicia con dos pantallas. En la primera se da una portada con los editores del paquete MOSIAS (figura 3.1.) y en la segunda se muestra un menú de programas a ejecutar (figura 3.2.).

### Estimación de Parámetros Geohidrológicos

Pruebas de Bombeo. Un ejemplo sencillo de la estimación de los parámetros del acuífero desde cargas observadas por medio de un modelo, son las pruebas de bombeo. Considerando un acuífero confinado, el modelo es en este caso una fórmula analítica con parámetros desconocidos de coeficiente de almacenamiento  $S$  y transmisividad  $T$ . En la prueba, el pozo es bombeado a un gasto constante  $Q$ , iniciando a un tiempo  $t = 0$ . Durante la prueba, las cargas  $h_i$  o abatimientos  $s_i$  son regis-

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

DEPARTAMENTO DE RIEGO Y DRENAJE

PROGRAMA DE GRADUADOS

\*\*PROGRAMA PRINCIPAL DEL PAQUETE MOSIAS\*\*

\*\*(Modelos de Simulación del Agua Subterránea)\*\*

EDITADO POR:

Ing. Luis Samaniego Moreno.  
 M.C. Javier de Jesús Cortés Bracho.  
 Dr. Salvador Muñoz Castro.  
 M.C. Luis Edmundo Ramírez Ramos.

Maestría en Riego y Drenaje.

Figura 3.1.- Pantalla de presentación del Paquete MOSIAS.

El conjunto MOSIAS está integrado por los siguientes programas.

- 1.- MOSIAS\_1.- Estimación de parámetros geohidrológicos.
- 2.- MOSIAS\_2.- Determinación de abatimientos en un pozo de bombeo.
- 3.- MOSIAS\_3.- Flujo estable, método de diferencias finitas.
- 4.- MOSIAS\_4.- Flujo estable, método del elemento finito, elementos triangulares.
- 5.- MOSIAS\_5.- Flujo estable con infiltración y percolación, método del elemento finito.
- 6.- MOSIAS\_6.- Flujo no estable, método explícito de diferencias finitas.
- 7.- MOSIAS\_7.- Flujo no estable, método del elemento finito con elementos cuadrangulares.
- 8.- MOSIAS\_8.- Flujo no estable en un plano vertical, interfase agua entre agua salada y dulce (Upconing) como invertido debido a un solo pozo, método del elemento finito.
- 9.- MOSIAS\_9.- Cálculo de distribución de concentración de contaminantes en una y dos dimensiones.

Número de programa a ejecutar (1,...,9), (F) para Finalizar ?

Figura 3.2.- Programas a ejecutar por el paquete MOSIAS.

tradas a diferentes distancias  $r_i$  desde el pozo a tiempos  $t_i$ . Estas mediciones proveen un grupo de  $n$  datos del tipo  $(r_i, t_i, s_i)$ . Krusemann y de Ridder (1975) y Kinzelbach, (1986) mencionan que se necesita seleccionar los valores desconocidos de almacenamiento  $S$  y transmisividad  $T$  tal que la desviación global entre los valores medidos y calculados estén definidos por:

$$f(S, T) = \sum_{i=1}^n (s_i^{\text{observado}} - s_i^{\text{calculado}})^2 = \dots\dots\dots (1)$$

$$f(S, T) = \sum_{i=1}^n (s_i - s_i f(r_i, t_i, S, T))^2$$

que se hace mínimo.

Si el abatimiento  $s_i^{\text{calculado}}$  fuera una función lineal de  $S$  y  $T$ , se usaría una regresión lineal para resolver el problema de estimación, esto sin embargo, no es el caso, por lo que se selecciona un método de regresión no lineal.

En el método iterativo de Gauss-Newton, se linealiza la función  $s_i f(S, T)$  alrededor de valores inicialmente predecidos  $S_0, T_0$  y se ejecuta una regresión lineal múltiple. Entonces, se usa el resultante  $S, T$  en el lugar de  $S_0, T_0$  y el proceso de iteración continúa hasta que la convergencia se alcanza. Después de la linealización de  $s$  la función  $f$  está dada por:

$$f(S, T) = \sum_{i=1}^n (s_i - s_i(r_i, t_i, S_o, T_o) - D_{S,i}(S - S_o) - D_{T,i}(T - T_o))^2 \dots \quad (2)$$

con

$$D_{S,i} = \frac{\partial s(r_i, t_i, S, T)}{\partial S} \quad \text{con } S = S_o \text{ y } T = T_o$$

$$D_{T,i} = \frac{\partial s(r_i, t_i, S, T)}{\partial T} \quad \text{con } S = S_o \text{ y } T = T_o$$

El requerimiento para un mínimo de  $f$  es

$$\frac{\partial f}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = 0 \dots \dots \dots \quad (3)$$

Lo anterior produciría las ecuaciones normales para las  $S$  y  $T$  desconocidas:

$$(S - S_o) = \sum_{i=1}^n D_{S,i}^2 + (T - T_o) D_{T,i} D_{S,i}$$

$$(S - S_o) = \sum_{i=1}^n (s_i - s_i(r_i, t_i, S_o, T_o)) D_{S,i} \dots \dots \dots \quad (4)$$

$$(S - S_o) \sum_{i=1}^n D_{S,i} D_{T,i} + (T - T_o) \sum_{i=1}^n D_{T,i}^2 = \sum_{i=1}^n (s_i - s(r_i, t_i, S_o, T_o)) D_{T,i}$$

Después de la solución,  $S_o$  y  $T_o$  son reemplazados por  $S$  y  $T$  y el proceso se inicia otra vez. Un criterio para la



convergencia, sería la pequeñez del valor absoluto de los cambios en  $S$  y  $T$ . Se tiene que tomar con cuidado, que el método no tomará valores no razonables para  $S$  y  $T$ . Esto puede ser garantizado por la fijación de  $S$  y  $T$  igual a los límites de intervalo factibles.

El programa MOSIAS\_1 usa el método de Gauss-Newton para determinar  $S$  y  $T$  desde  $n$  grupos de datos consistentes de radio, tiempo y abatimiento,  $(r_i, t_i, s_i)$  obtenidos desde una prueba de bombeo.

#### Programa Para el Análisis de Datos de Pruebas de Bombeo.

Datos de entrada:

- Número de grupos de datos,  $NM$
- Gasto de bombeo,  $Q$ , en  $m^3/seg$
- Máximo numero de iteraciones,  $IM$

$NM$  grupos de datos consistentes de:

- Distancia desde el pozo,  $r(i)$ , en m
- Tiempo de observación,  $t(i)$ , en seg, y
- Abatimiento,  $s(i)$ , en m
- Tipo de acuífero,  $II$ , confinado ( $II=1$ ) o freático ( $II=2$ )
- Valores iniciales de los parámetros del acuífero:

En el caso de un acuífero freático:

- Valores iniciales de coeficiente de almacenamiento,  $PA(1)$  y permeabilidad,  $PA(2)$ , en m/seg
- Espesor saturado al tiempo  $t = 0$ ,  $ST$ , en m

En el caso de acuífero confinado:

- Valores iniciales de coeficiente de almacenamiento,

$PA(1)$  y transmisividad,  $PA(2)$ , en  $m^2/seg$

Datos de salida. En cada paso de iteración los valores de los dos parámetros  $PA(1)$  y  $PA(2)$ , con una buena desviación media  $DE$ , son mostrados. Los valores finales de  $S$  y  $T$  (Acuífero confinado) o de  $S$  y  $K$  (acuífero freático) son mostrados en el dispositivo de salida seleccionado.

El programa `MOSIAS_1` está estructurado de la siguiente manera.

- Pantalla de presentación del programa que es mostrada en la figura 3.3.
- Entrada del nombre de archivo de datos del tipo "\*.dat"
- Selección del dispositivo de salida.
- Datos de entrada e inicio de valores, y especificación de parámetros.
- Incrementos de parámetros usados en el cálculo del vector gradiente. Esto puede ser seleccionado de acuerdo con el posible resultado y el modelo usado.
- De acuerdo al modelo seleccionado (fórmula de Theis con o sin corrección freática) el inicio de valores de entrada es ejecutado por subrutinas apropiadas.
- Iteración de enlace del método de Gauss-Newton
- Inicialización de la matriz  $A$  y  $B$ , que representa los coeficientes del sistema normal de ecuaciones.
- Cálculo del vector gradiente  $FF$
- Cálculo de los coeficientes de las matrices  $A$  y  $B$  de las ecuaciones normales. La evaluación de la función de

Theis necesarios en estos pasos es ejecutada por:

- Subrutina que resuelve las ecuaciones normales
- Cálculo de la desviación media y salida de resultados del paso de iteración.
- Criterio de convergencia. La iteración es detenida si el cambio en los parámetros por lo menos de un milésimo de su valor.

El programa MOSIAS\_1, calcula los coeficientes de almacenamiento y transmisividad, a partir de un grupo de datos consistentes de:

Gasto de bombeo, en  $m^3/seg.$   
 Distancia desde el pozo, en m.  
 Tiempo de observación, en seg.  
 Datos de abatimiento, en m.  
 Tipo de acuífero: Freático o confinado.

La entrada de datos al programa, es por medio de un archivo generador, que es el que pide la información arriba citada.

- 1.- Generar archivo de datos.
- 2.- Leer datos de disco.
- 3.- Regresar al menú principal.

Elija opción?

Figura 3.3.- Pantalla de presentación del programa MOSIAS\_1.

- Subrutina para la salida de resultados finales.
- Subrutina para la evaluación de la ecuación del modelo (fórmula de Theis).
- Subrutina para la solución de ecuaciones normales.
- Determinación de los elementos mayores del sistema matriz.
- Normalización de ecuaciones para prevenir sobre-flujos que

- de otra manera pueden ocurrir en el primer paso de iteración si los valores iniciales son lejanos de la solución.
- Solución de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
  - Almacenamiento de los resultados dentro de los límites físicos permitidos.
  - Subrutina para la entrada de valores iniciales en el caso de un acuífero confinado.
  - Subrutina para la entrada de valores iniciales en el caso de un acuífero freático y transformación de abatimientos.
  - Subrutina para resultados finales, acuífero confinado.
  - Subrutina para resultados finales, acuífero libre.
  - Subrutina para la entrada del nombre del archivo de resultados, del tipo "\*.res".

En el apéndice B se muestra el listado del programa MOSIAS\_1.

Determinación de Abatimientos. Singh y Gupta (1986) explican que esencialmente, el método consiste en la separación del tiempo total de la prueba de bombeo, dentro de un número de pasos de tiempo iguales, (figura 3.4.) y calcular la respuesta del acuífero para cada intervalo de tiempo a través de circunvolución de la extracción, con la función respuesta impulso. La tasa de extracción durante cada intervalo de tiempo se asume constante, mientras esto tomará diferentes valores durante varios intervalos de tiempo. Los abatimientos se suponen pequeños en comparación al espesor saturado del acuífero. Consecuentemente, el problema de los flujos rema-

nentes lineales y de superposición son permitidos. En el pozo se asume que no hay resistencia.

Si  $Q_1$  es la tasa de extracción durante el primer intervalo de tiempo  $\Delta t$ , los abatimientos al final de este intervalo de tiempo puede ser escrito de acuerdo con Theis como:

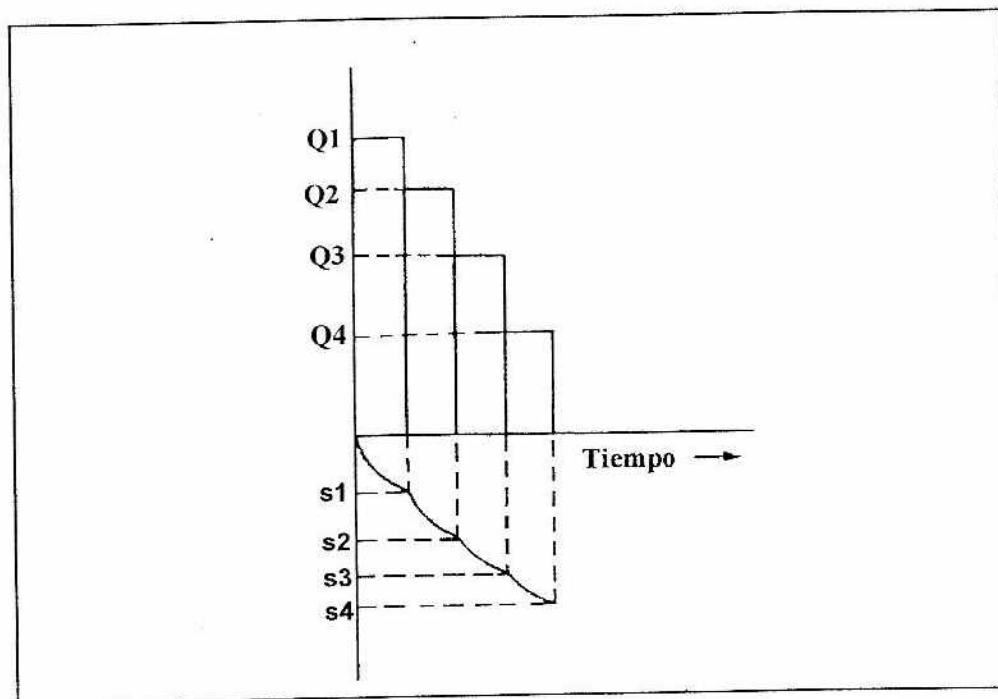


Figura 3.4. Programa esquemático de una extracción con gasto variable para pruebas de bombeo (Singh y Gupta, 1986).

$$s_1 = \frac{Q_1}{4\pi T} W(u) \dots\dots\dots (5)$$

donde:

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

$$u = \frac{r^2 S}{4T\Delta t}$$

donde las variables que intervienen son:

$W(u)$  es la función  $W$  de  $u$  del pozo,  $u$  es un parámetro adimensional que depende del tiempo, distancia, transmisividad y del coeficiente de almacenamiento y determina el radio de un cono de abatimiento.  $S$  y  $T$  son el coeficiente de almacenamiento y la transmisividad, respectivamente, y  $r = r_w$  es el radio del pozo.

Similarmente, el abatimiento  $s_2$ , al final del segundo intervalo de tiempo puede ser escrito como:  $s_2$  es igual al abatimiento debido al primer intervalo de extracción menos la recuperación durante el segundo intervalo de tiempo debido al abatimiento durante el primer intervalo de tiempo más el abatimiento debido a la extracción en el segundo intervalo de tiempo, es decir:

$$s_2 = \left( \frac{Q_1}{4\pi T} \right) W \left( \frac{r^2 S}{4T\Delta t} \right) - \left( \frac{Q_1}{4\pi T} \right) W \left( \frac{r^2 S}{4T\Delta t} \right) + \left( \frac{Q_2}{4\pi T} \right) W \left( \frac{r^2 S}{4T\Delta t} \right) \quad (6)$$

La ecuación utiliza el principio de superposición. Extendiendo la misma lógica, al abatimiento en el final del  $n$ -ésimo intervalo de tiempo puede ser escrito en general

como:

$$s_n = X \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j} \left[ W \left( \frac{Y}{(j+1) \Delta t} \right) - W \left( \frac{Y}{j \Delta t} \right) \right] \dots \dots \dots (7)$$

donde, para  $j = 0$ ,  $W[Y/j\Delta t] = 0$ , o:

$$s_n = X \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j} \Delta W(j) \dots \dots \dots (7A)$$

donde:

$$\Delta W(j) = W \left[ \frac{Y}{(j+1) \Delta t} \right] - W \left[ \frac{Y}{j \Delta t} \right] \dots \dots \dots (7B)$$

y

$$\Delta W(0) = W \left[ \frac{Y}{\Delta t} \right] \dots \dots \dots (7C)$$

Además se tiene que:

$$X = \frac{1}{(4\pi T)}, \quad Y = \frac{r^2 S}{(4T)}$$

La extracción  $Q$  desde un pozo de gran diámetro durante cada intervalo de tiempo comprende la extracción  $Q^*$  desde

el almacenamiento del pozo y la contribución  $Q^a$  desde el acuífero. De este modo, la tasa de extracción después de  $n$  intervalos de tiempo está dada como:

$$Q_n = Q_n^a + Q_n^w \dots \dots \dots (8)$$

siendo su total:

$$\sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j}^a + \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j}^w \dots \dots \dots (8A)$$

Si el abatimiento neto en el pozo es  $s_n^w$  esto puede ser expresado como:

$$s_n^w = \frac{\Delta t}{\pi R^2} \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j}^w = \frac{\Delta t}{\pi R^2} \left( Q_n^w + \sum_{j=1}^{n-1} Q_{n-j}^w \right) \dots \dots \dots (9)$$

además, el correspondiente abatimiento  $s^a$  en el acuífero puede ser expresado como:

$$s_n^a = X \sum_{j=0}^{n-1} Q_{n-j}^a \Delta W(j) = X Q_n^a \Delta W(0) + X \sum_{j=1}^{n-1} Q_{n-j}^w \Delta W(j) \dots \dots (10)$$

donde  $\Delta W(j)$  está dada por la ecuación (7B). Si no hay resistencia de entrada alrededor del pozo, y la respuesta del acuífero se asume instantánea, se puede escribir, cerca del



radio del pozo:

$$s_n^a = s_n^w = s_n \quad r = r_w$$

Para el primer intervalo de tiempo  $n=1$ , las ecuaciones (9) y (10) pueden ser combinadas como:

$$s_1 = \frac{\Delta t}{\pi r^2} Q_1^w = X Q_1^a \Delta W(0).$$

mientras que  $Q_1 = Q_1^w + Q_1^a$  son conocidos. Por lo tanto solo las incógnitas  $Q_1^w$ ,  $Q_1^a$  y  $s_1$  pueden ser fácilmente encontradas. Para los posteriores intervalos de tiempo, un razonamiento similar se dirige a:

$$s_n = \frac{\Delta t}{\pi r^2} \sum_{j=1}^{n-1} Q_{n-j}^w + \frac{\Delta t}{\pi r^2} Q_n^w = X \sum_{j=1}^{n-1} Q_{n-j}^a \Delta W(j) + X Q_n^a \Delta W(0) \quad (11)$$

mientras que  $Q_n = Q_n^w + Q_n^a$  es conocida. Por lo tanto solo las desconocidas  $Q_n^w$ ,  $Q_n^a$  y  $s_n$  pueden ser fácilmente calculadas por el sistema.

Una vez que las variaciones de los niveles del agua con el tiempo son calculadas para las faces de bombeo y de recuperación, la ecuación (7) puede ser usada para la estimación de los parámetros hidrogeológicos usando la modelación y comparación de los abatimientos calculados y observados para la mejor situación.

Programa Para la Determinación de Abatimientos. Descripción

del contenido del programa:

- Los datos de entrada para el programa son:
  - Incremento de tiempo en días ( $D7$ ).
  - Número de intervalos de tiempo ( $I1$ ).
  - Radio del pozo en m ( $R2$ ).
  - Período de bombeo en días ( $T1$ ).
  - Transmisividad  $m^2/\text{día}$  ( $T0$ ).
  - Coeficiente de almacenamiento ( $S0$ ).
- Los datos de salida en el programa son los abatimientos producidos por la extracción de un gasto variable en un pozo, o los niveles de recuperación cuando el gasto se ha terminado.

El programa MOSIAS\_2 está estructurado de la siguiente manera.

- El programa inicia con una pantalla de presentación la cual es mostrada en la figura 3.5.
- Fijación de valores de coeficientes para calcular los abatimientos adimensionales. Los coeficientes  $A0, A1, A2, A3, A4, A5$ , corresponden a la integral exponencial de la ecuación de la función de pozo ( $W(u)$ ).
- Lectura del archivo de datos.
- Dimensionamiento de las variables.
- Selección del dispositivo de salida. (pantalla, impresora o disco)
- Cálculo del tiempo adimensional.

- Cálculo del valor de  $u$  que en el programa es  $z$ .
- Cálculo de la función  $W$  de  $u$  del pozo, que en el programa es la variable  $Y(m)$ .
- Cálculo del gasto  $Q_4$ , para la estimación de abatimientos.
- Cálculo de los abatimientos.  $S_1$  en el programa.
- Subrutina para grabar resultados en archivo.

El programa MOSIAS\_2, calcula los abatimientos producidos por la extracción variable de un pozo de gran diámetro, a partir de datos consistentes de:

Número de intervalos de tiempo.  
Incremento de tiempo y tiempo total.  
Transmisividad. ( $m^2/d$ )  
Coeficiente de Almacenamiento. (Adimensional)  
Radio del pozo. (m)  
Período de bombeo. (d)  
Datos de gasto bombeado. ( $m^3/d$ )

La entrada de los datos al programa es por medio de un archivo generador que es el que pide la información arriba citada.

- 1.- Generar archivo de datos.
- 2.- Leer datos de disco.
- 3.- Regresar al menú principal.  
Elija opción?

Figura 3.5.- Pantalla de presentación del programa MOSIAS\_2.

En el apéndice C se muestra el listado del programa MOSIAS\_2.

## Flujo Estable

Método de Diferencias Finitas. El propósito de este programa es el cálculo del flujo estable por el método de diferencias finitas con área rectangular, malla irregular y elementos cuadrangulares.

Bear y Verruijt (1987) explican que considerando el caso de flujo bidimensional de un fluido sencillo en un acuífero confinado homogéneo o isotrópico, sin recarga o abatimientos. Para este caso el flujo es descrito por la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

Esta ecuación puede ser satisfecha para los puntos del acuífero considerado de dominio  $R$ . Sobre el límite de  $R$  y siendo  $\phi$  la carga piezométrica del agua subterránea, se satisface ciertamente para las condiciones de barrera. Se asumirá que las condiciones de barreras son:

$$\text{Sobre } L_1: \quad \phi = f, \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{Sobre } L_2: \quad Q_n = -T \frac{(\partial \phi)}{(\partial n)} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son partes desunidas del límite, que juntos

forman el límite entero del dominio  $R$ . La ecuación (13) declara que parte del límite es impermeable.

La serie de valores  $\phi_{i,j}$  se determinan aproximando la función continua  $\phi(x,y)$  en los puntos con coordenadas  $x = x_i$ ,  $y = y_j$ . Esto puede ser acompañado por una aproximación de derivadas parciales que aparecen en la ecuación (12).

En general, la aproximación de la primera derivada con respecto a  $x$  de una función  $F(x,y)$  es dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \dots\dots\dots (15)$$

Actualmente, esta es la definición clásica de la derivada, excepto que la condición que  $\Delta x \rightarrow 0$  ha sido omitida. La ecuación (15) es llamada diferencia finita hacia adelante, aproximación de la derivada parcial  $\partial F/\partial x$ . Si  $\Delta x$  es reemplazada por  $-\Delta x$ , la diferencia finita hacia atrás es obtenida en la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x, y) - F(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \dots\dots\dots (16)$$

Cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , ambas expresiones podrían ser iguales si la derivada existe. Sin embargo, cuando  $\Delta x \neq 0$ , entonces podría ser una diferencia pequeña entre las dos aproximaciones. Debido a que estas aproximaciones son influenciadas

al considerar a una u otra región, es decir derecha o izquierda del punto  $x, y$ , la diferencia finita central es frecuentemente más exacta:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x + (\frac{1}{2})\Delta x, y) - F(x - (\frac{1}{2})\Delta x, y)}{\Delta x} \dots\dots\dots (17)$$

La segunda derivada, es la derivada de la primer derivada. Si una aproximación de diferencia finita central es usada, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F(x + \Delta x, y) - 2 F(x, y) + F(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{i+1,j} - 2 F_{i,j} + F_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \dots\dots\dots (19)$$

Esta fórmula es ilustrada en la figura 3.6., la función muestra en esta figura, que tiene una segunda derivada positiva, como indica el incremento de la pendiente en la dirección  $x$ . La expresión de diferencia finita refleja esta propiedad, porque el valor en el nodo  $i$  es menor que el promedio de los dos valores en los nodos  $i-1$  e  $i+1$ . Si el valor en el nodo  $i$  fuese incrementado, el promedio de los dos valores vecinos se amplía y por lo tanto la aproximación de diferencia finita desaparece.

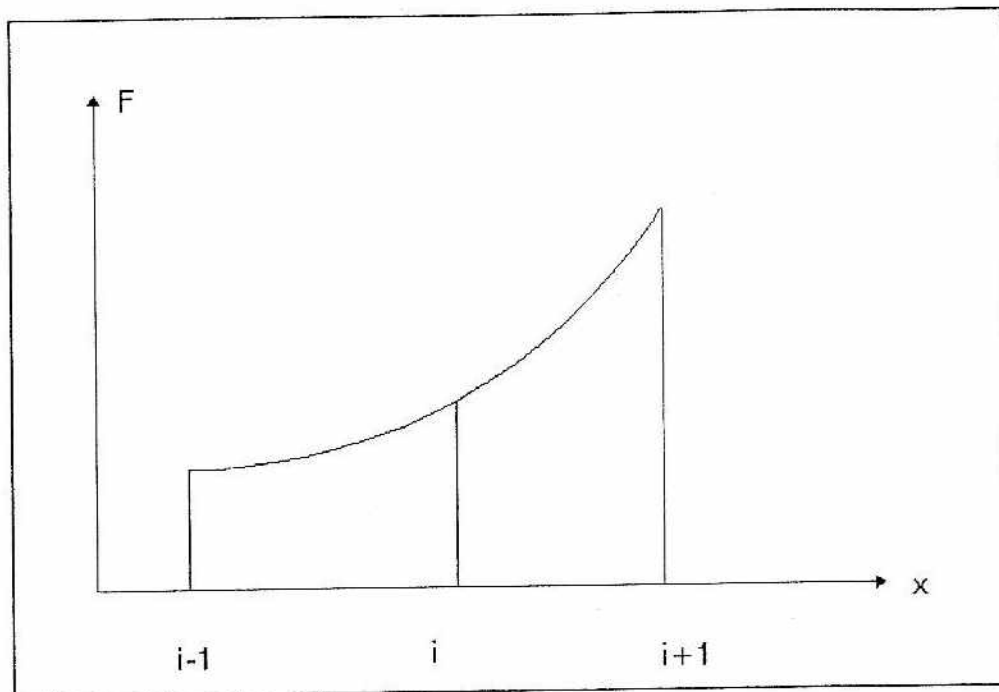


Figura 3.6. Aproximación de la segunda derivada (Tomado de Bear y Verruijt, 1987).

La aplicación de la ecuación (19) en la derivada parcial en la ecuación (12) da la siguiente aproximación del operador de Laplace. Por razones de simplicidad se asume que los intervalos en las direcciones  $x$  y  $y$  son iguales.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + 4\phi_{i,j}}{\Delta^2} \dots \dots \dots (20)$$

Ahora sigue la desaparición del lado izquierdo, por las necesidades de la ecuación diferencial básica (12), se puede aproximar por requerimiento que:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4} [\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}] \dots \dots \dots (21)$$

Esta es la ecuación básica del método de diferencias finitas en su forma más simple. Esto expresa que el valor de la carga piezométrica,  $\phi$ , en un cierto nodo debe ser igual al promedio de valores de los cuatro nodos vecinos.

La ecuación (21) es satisfecha en cada nodo interior del dominio  $R$ . De este modo el método conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, con un número de ecuaciones igual al número de puntos desconocidos. En esta parte, lo anterior no es completamente obvio, sin embargo, como la ecuación (21) no puede ser aplicada a los nodos sobre los límites, debido a que éstos requieren una atención especial para ajustar las condiciones de los límites.

En un nodo sobre el límite impermeable en que la condición límite Neumann (Ecuación (14)) se aplica, la carga es desconocida y la ecuación para este nodo refleja una condición de no flujo sobre el límite. Esto puede ser más simple por la necesidad de la aproximación de la diferencia central finita en que la derivada normal desaparece. En vista de la ecuación (17), el valor en un nodo (imaginario) a través del límite, sería igual al valor del nodo dentro del límite. Para un nodo sobre un límite vertical, esto puede ser expresado por la condición  $\phi_{i-1,j} = \phi_{i+1,j}$ . Sustituyendo dentro del algoritmo general ahora resulta:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4} (2 \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}) \dots \dots \dots (22)$$



La ecuación (22) muestra que para un nodo sobre un límite impermeable, la fórmula general (21) puede ser usada, cubriendo a los cuatro nodos que lo rodean. Para el valor del nodo del lado de afuera del límite, el valor en el nodo de adentro del límite lo sustituiría. Como un resultado, este valor en el interior del dominio cuenta dos veces en el algoritmo.

Presentando un programa de computadora el cual ejecuta los cálculos de diferencias finitas, el algoritmo básico puede ser generalizado al caso de una malla de intervalos variables. Esto puede hacerse más convenientemente por la aplicación de la expansión de la fórmula, mediante series de Taylor. Si el valor de la función  $F(x)$  en el punto  $x_i$  es denotado por  $F_i$ , los valores de los puntos vecinos  $x_{i+1}$  y  $x_{i-1}$  pueden ser expresados en términos de los valores de la función y éstas derivadas al punto  $x_i$ , como sigue:

$$F_{i+1} = F_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} [x_{i+1} - x_i]^2 \frac{d^2F}{dx^2} + \dots \quad (22-A)$$

$$F_{i-1} = F_i + (x_i - x_{i-1}) \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} [x_i - x_{i-1}]^2 \frac{d^2F}{dx^2} + \dots \quad (23)$$

La eliminación de la primer derivada  $dF/dx$  de éstas ecuaciones resulta:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = A_i F_{i+1} B_i F_{i-1} - (A_i + B_i) F_i + \dots \quad (24)$$

Donde:

$$A_i = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)} \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{2} \dots \quad (25)$$

$$B_i = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})} \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{2} \dots \quad (26)$$

La ecuación (24) es la generalización de la ecuación (19) para distancias variables entre puntos sucesivos de la malla. Si  $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x$ , la ecuación (24) se reduce a la ecuación (19).

La aproximación de la ecuación (24) puede ser directamente usada para aproximar a la derivada parcial  $\partial^2 F / \partial x^2$ , y una fórmula similar puede ser derivada para  $\partial^2 F / \partial y^2$ . De esta forma la siguiente generalización de la ecuación (21) se obtiene:

$$(A_i + B_i + C_j + D_j) \phi_{i,j} = A_i \phi_{i+1,j} + B_i \phi_{i-1,j} + C_j \phi_{i,j+1} + D_j \phi_{i,j-1} \dots \quad (27)$$

y donde  $A_i$  y  $B_i$  son dados por las ecuaciones (25) y (26), y en donde:

$$C_j = \frac{1}{(y_{j+1}-y_j)} \frac{(y_{j+1}-y_{j-1})}{2} \dots\dots\dots (28)$$

$$D_j = \frac{1}{(y_j-y_{j-1})} \frac{(y_{j+1}-y_{j-1})}{2} \dots\dots\dots (29)$$

Si todo el tamaño de la malla es igual, los coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_j$ ,  $D_j$  son iguales y la ecuación (27) se reduce a la ecuación (21).

Programa Para el Cálculo del Flujo Estable Método de Diferencias Finitas. Un programa basado en el algoritmo de la ecuación (27) es presentado en el programa MOSIAS\_3.

Los datos necesarios para la ejecución del programa MOSIAS\_3 son:

- Número de líneas en la dirección x. (NX)
- Número de líneas en la dirección y. (NY)
- Coordenada en X de la primera, segunda, ..., NX línea (X(I))
- Coordenada en Y de la primera, segunda, ..., NY línea (Y(I))
- Cuando hay que reportar alguna carga de algún nodo:
  - Localización en X del nodo. (I)
  - Localización en Y del nodo. (J)
  - Carga de agua en ese punto. (F)
- Datos de salida:
  - Coordenada en X. X(I)
  - Coordenada en Y. Y(J)
  - Carga en ese nodo. F(I,J)

El programa MOSIAS\_3 está estructurado de la siguiente manera.

- El programa inicia con una pantalla de presentación, que es mostrada en la figura 3.7.
- Lectura del número de líneas en X y Y.
- Selección de dispositivo de salida.
- Dimensionamiento de variables.
- Lectura de las coordenadas de las líneas en X y Y.
- Introducción de los nodos imagen, fuera de los límites.
- Entrada de los valores dados, donde:
  - $i$  = coordenada en X.
  - $j$  = coordenada en Y.
  - $F(i, j)$  = Carga en ese punto.

El programa MOSIAS\_3, calcula el flujo estable por el método de diferencias finitas, en un área rectangular y malla irregular, los datos necesarios para la ejecución del programa son:

- Número de líneas de la malla tanto en la dirección X como en Y
  - Coordenada en X de la línea 1,2,3,...,nx
  - Coordenada en Y de la línea 1,2,3,...,ny
- Para la entrada de la carga se necesita:
- Coordenada en X y en Y del punto, así como proporcionar la carga respectiva en ese punto.

La entrada de datos al programa es por medio de un archivo de datos, conteniendo los arriba citados.

- 1.- Generar archivo de datos.
- 2.- Leer datos de disco.
- 3.- Regresar al menú principal.  
Elija opción?

Figura 3.7.- Pantalla de presentación del programa MOSIAS\_3.

- Asignación del valor de 1 a los puntos en los que la carga es dada.
- Fijación del valor promedio de las cargas a los nodos que la tienen.
- Cálculo de los coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ . Ecuaciones 25, 26, 27 y 28 respectivamente.
- Fijación del factor de relajación,  $RX$  que en este caso es de 1.4. Este valor fluctua entre 1 y 2.
- El programa continúa con dos dobles ciclos en los cuales en cada uno de ellos se lleva a cabo lo siguiente:
  - Asignación de valores a los nodos imagen.
  - Solución de la ecuación 27.
  - Cálculo de la carga en los nodos que no la tengan.
  - Actualización de la carga en los nodos imagen.
- Doble ciclo para la salida de resultados.
- Subrutina que abre archivo para grabar resultados.

El listado del programa MOSIAS\_3 es mostrado en el apéndice D.

Método del Elemento Finito. El propósito de este modelo es el cálculo del flujo estable por medio del elemento finito.

Considerando el flujo estable del agua subterránea en un acuífero permeable de transmisividad  $T$ , mostrado en la figura 3.8. El acuífero es freático con percolación tomando lugar desde la parte inferior del acuífero, en que la carga se asume ser dada. La ecuación básica para flujo estable

puede ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + I - \frac{\phi - \phi'}{c} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

donde  $I$  es la infiltración neta o reabastecimiento (se asume conocido),  $\phi$  es la carga piezométrica en el acuífero,  $\phi'$  es la carga (dada) en la parte baja del acuífero, y  $c$  es la resistencia del acuicludo que está separando los dos acuíferos. El último término del lado izquierdo de la ecuación (30) representa la percolación dentro del acuífero. La transmisividad en la parte de arriba del acuífero es  $T = Kh$ , donde  $h$  es el espesor variable de la capa de agua que puede ser identificada con la carga de agua subterránea y  $K$  la conductividad hidráulica. Por el momento se asumirá que las variaciones en el nivel del agua subterránea en el acuífero freático son pequeñas y que la transmisividad  $T$  puede ser considerada con anterioridad conocida al final como una primera aproximación. Esto es dependiente del tiempo, el valor de la transmisividad de un acuífero freático puede ser incorporado iterativamente dentro de los cálculos por la actualización del valor de  $T$ , de este modo la ecuación (30) puede ser considerada válida, para un acuífero freático, como también para un acuífero confinado.

La ecuación (30) puede ser satisfecha a través de una región  $R$  en el plano  $x - y$ . Las condiciones de los límites pueden ser especificados sobre los límites de esa región.

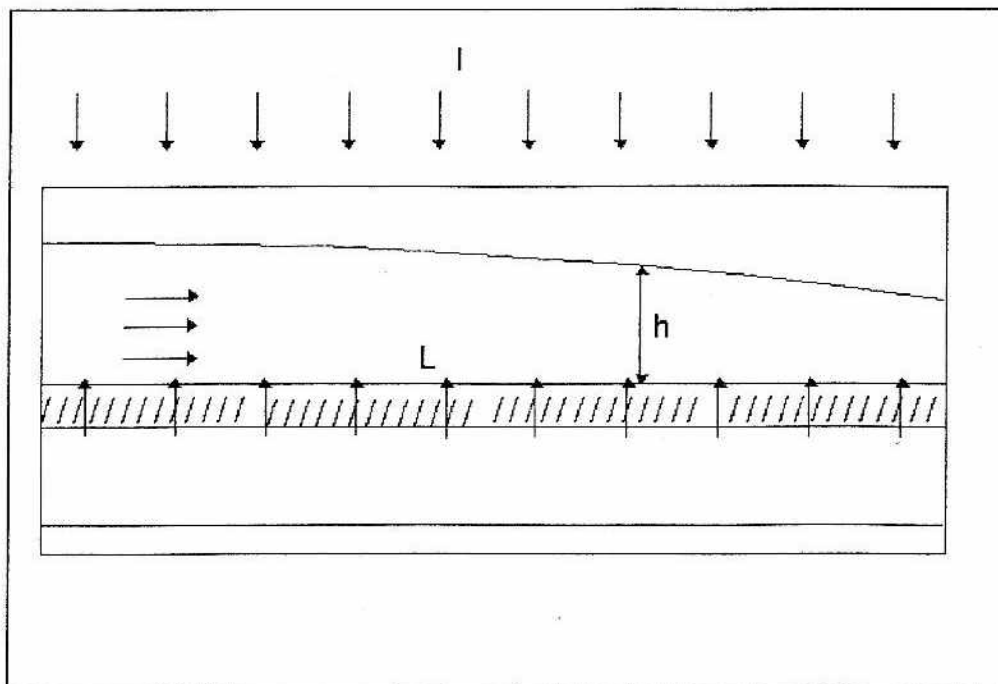


Figura 3.8. Acuífero freático con percolación (Tomado de Bear y Verruijt, 1987).

Una formulación general de las condiciones de los límites son:

$$\text{Sobre } L_1 \quad \phi = f \dots\dots\dots (31)$$

$$\text{Sobre } L_2 \quad T = \frac{(\partial\phi)}{(\partial n)} = qh \dots\dots\dots (32)$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son los segmentos del límite, que juntos constituyen el límite entero de la región  $R$ . Sobre  $L_1$  la carga es dada, mientras que sobre  $L_2$  el flujo normal del agua subterránea al límite es dado.

Formalmente, la carga piezométrica  $\phi$  a través de la región entera puede ser expresada por:

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \phi_i, \dots \dots \dots (33)$$

donde  $\phi_i$  es la carga en el nodo  $i$ , y  $N_i$  es la función de forma o función base definida por:

$$N_i = 1, \text{ si } j = i, \quad N_i = 0, \text{ si } j \neq i \dots \dots \dots (34)$$

con interpolación lineal dentro de cada elemento. Una típica función de forma es mostrada en la figura 3.9.

En la ecuación (33) los valores de  $\phi_i$  son desconocidos cuando  $i$  denota un nodo interior, o cuando el nodo  $i$  es localizado en un segmento de límite del tipo  $L_2$ . Si el nodo  $i$  es localizado en un segmento de límite del tipo de  $L_1$  el valor de  $\phi$  es conocido.

La función de interpolación de la ecuación (33) puede también ser usada para el conocimiento de la carga en la parte baja del acuífero, que también puede ser escrita como:



$$\phi' = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \phi'_i \dots\dots\dots (35)$$

donde  $\phi'_i$  es el valor conocido de la carga piezométrica en la parte baja del acuífero en el nodo  $i$ .

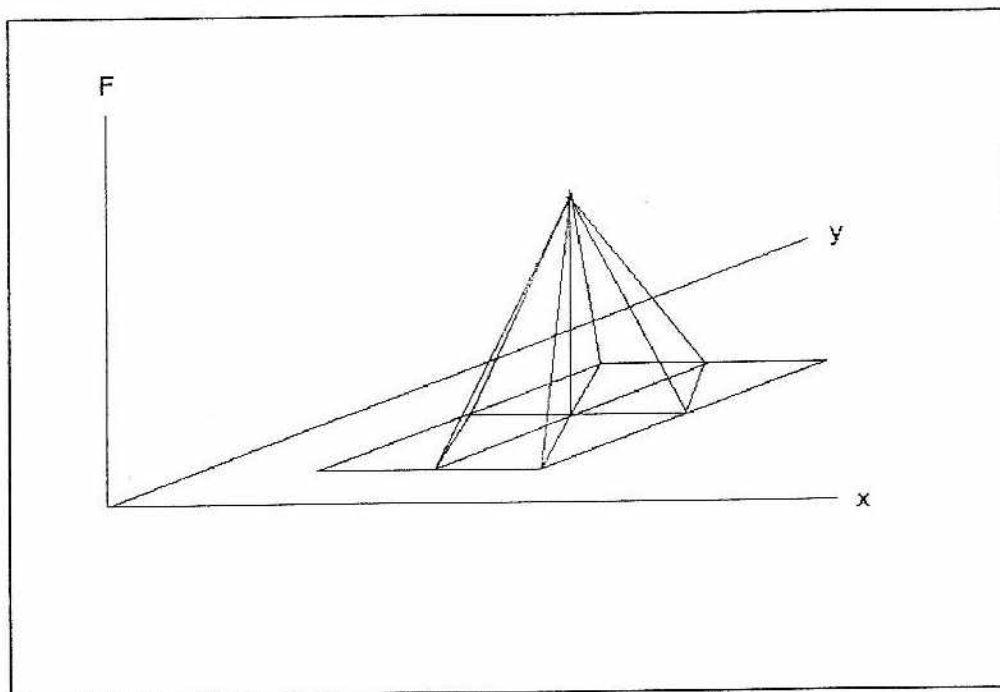


Figura 3.9. Una típica función de forma (Tomado de Bear y Verruijt, 1987).

En general, la aproximación de la ecuación (33) no puede satisfacer exactamente a la ecuación diferencial parcial (30). Además, esta condición refleja que la ecuación diferencial es satisfecha solo sobre la media, usando un número de funciones de ponderación igual al número de incógnitas. Esto es llamado el método de ponderación residual. Esto es más conveniente al usar las funciones de forma  $N_i$  como

funciones de ponderación. Esto conduce a las condiciones:

$$\int_R \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + I - \frac{\varphi - \varphi'}{c} \right] N_i \right\} dx dy = 0 \dots\dots\dots (36)$$

para ser satisfechas para cada valor de  $i$  en que  $\varphi_i$  es desconocida. Los valores de  $i$  constituyen una cierta clase, denotada por  $C$ . La satisfacción de la ecuación (36) para todos los  $i \in C$  conduce a tantas ecuaciones como incógnitas haya. La integral de la ecuación (36) puede ser separada dentro de dos partes por la notación que:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] N_i &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_i T \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ N_i T \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] - \dots \\ \dots - T \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - T \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &\dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (37) dentro de la ecuación (36), con las ecuaciones (33) y (35), resulta:

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0 \quad (i \in C) \dots\dots\dots (38)$$

Donde  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  son tres integrales definidas para todos los ( $i \in C$ ).

$$J_1 = \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_i T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ N_i T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \right\} dx dy, \quad (i \in C) \dots (39)$$

$$J_2 = - \int_R \left\{ T \sum_j \phi_j \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right\} dx dy, \quad (i \in C), \dots (40)$$

$$J_3 = \int_R \left\{ I N_i - \frac{1}{C} \sum_j N_i N_j (\phi_j - \phi'_j) \right\} dx dy, \quad (i \in C) \dots \dots \dots (41)$$

Las sumas en la segunda y tercera integral serían ejecutadas sobre todos los valores de  $j$  desde  $j = 1$  a  $j = n$  donde  $n$  es el número de nodos. La ecuación (38) es la ecuación básica del método del elemento finito. Cada una de las tres integrales será evaluada ahora por separado.

La primera integral  $J_1$  expresada por la ecuación (39), puede ser transformada dentro de una integral lineal a lo largo del límite  $L$  de la región  $R$  por el teorema de divergencia o teorema de Gauss. Esto da como resultado:

$$J_1 = \int_R \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_i T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ N_i T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \right) dx dy$$

$$J_1 = \int_L \left( N_i T \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dL \quad (i \in C) \dots \dots \dots (42)$$

Debido a que en la ecuación (42) los valores de  $i$  están restringidos a aquellos pertenecientes a la clase  $C$ ,

esto es, la clase del número de nodos en que el valor de la carga es desconocida, los valores de  $i$  para todos los puntos sobre el segmento del límite  $L_1$  están excluidos, (ver ecuación 31). De esta forma en la integral sobre el lado derecho de la ecuación (42) los valores de  $i$  son restringidos a los puntos localizados sobre el límite  $L_2$ . La correspondiente función de forma  $N_i$  es cero sobre  $L_1$  y además, solo una contribución de la integral a lo largo de  $L_2$  permanece. Sobre aquella parte del límite, el valor de  $T(\partial\phi/\partial n)$  es conocida, (ver ecuación 31). Dejando que el valor de la función de reposición de un elemento a lo largo de un segmento de límite típico este denotado por  $q_k * h$ , y la longitud de esa parte del límite por  $L_k$ . Contribuciones a la integral en la ecuación (42) pueden esperarse solo de aquellas partes del límite en que  $N_i$  es diferente de cero. Este es el caso solo a lo largo de dos elementos límite sobre los dos lados del nodo  $i$ . A lo largo de estos dos segmentos lineales el valor medio de  $N_i$  es 0.5 y de esta forma la integral sería la suma de dos valores  $0.5 * q_k * h * L_k$ , uno del lado izquierdo y otro del lado derecho del nodo  $i$ . Esta suma sería denotada por  $Q_i$ . Físicamente, esto significa que el agua total de reabastecimiento a lo largo del elemento límite es atribuido uniformemente a los dos nodos en su final. Por lo tanto:

$$J_1 = \int_R \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ N_i T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ N_i T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \right) dx dy = Q_i \quad (i \in C) \quad \dots (43)$$

donde  $Q_i$  es la cantidad de agua repuesta al sistema en el nodo  $i$ . El agua de reposición a lo largo de cualquier parte del segmento límite  $L_2$  un lado del elemento identificado por un número  $k$ , con una longitud de  $L_{0k}$ , es dividido uniformemente entre los nodos sobre sus dos límites. Esto significa que la correspondiente descarga  $Q_i$  en la ecuación (43) puede expresarse como:

$$Q_i = \frac{1}{2} q_k h L_{0k} \dots\dots\dots (44)$$

Se puede asumir que cualquier concentración de agua de reposición en un nodo sobre el límite puede ser adherido al valor de  $Q_i$ .

La segunda integral  $J_2$  está definida por la ecuación (40) y puede ser escrita formalmente como:

$$J_2 = -\int_R \left( T \sum_j \phi_i \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) dx dy$$

$$J_2 = -\sum_j P_{ij} \phi_j \dots\dots\dots (45)$$

donde la suma en el lado derecho significa la suma de todos los elementos  $R_p$  incluidos en el dominio  $R$ , y donde:

$$P_{ij} = \int_{R_p} \left( T \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) dx dy \quad (i \in C) \dots\dots\dots (46)$$

Para evaluar esta integral, primero hay que hacer notar que las contribuciones pueden esperarse solo si el elemento  $R_p$  contiene ambos nodos,  $i$  y  $j$ . Si cualquiera de los dos nodos  $i$  o  $j$  no pertenecen a este elemento, una de las funciones de forma es cero, y de esta manera no hay una contribución a la integral. Tal restricción puede hacerse a elementos que contengan ambos nodos  $i$  y  $j$ .

Debido a que las funciones de forma son lineales se puede escribir:

$$N_i(x, y) = p_{ix} + q_{iy} + r_i, \quad N_j(x, y) = p_{jx} + q_{jy} + r_j \quad \dots\dots (47)$$

donde los coeficientes  $p_i$ ,  $q_i$  son constantes. Dejando que los tres nodos de un elemento  $R_p$  sean denotados por  $j$ ,  $k$  y  $l$  (donde  $i$  puede ser cualquiera,  $j$ ,  $k$  o  $l$ ), entonces  $N_j$  debe ser uno en el nodo  $j$ , y cero en los nodos  $k$  y  $l$ , por lo tanto,

$$p_j x_j + q_j y_j + r_j = 1, \quad p_j x_k + q_j y_k = 0, \quad p_j x_l + q_j y_l + r_j = 0$$

Este es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas,  $p_j$ ,  $q_j$  y  $r_j$ . La solución de este sistema es:

$$p_j = \frac{b_j}{D}, \quad q_j = \frac{c_j}{D}, \quad r_j = \frac{d_j}{D} \dots\dots\dots (48)$$

donde:

$$\begin{aligned} b_j &= y_k - y_1, & b_k &= y_1 - y_j, & b_1 &= y_j - y_k \\ c_j &= x_1 - x_k, & c_k &= x_j - x_1, & c_1 &= x_k - x_j \\ d_j &= x_k y_1 - x_1 y_k, & d_k &= x_1 y_j - x_j y_1, & d_1 &= x_j y_k - x_k y_j \\ D &= x_j b_j + x_k b_k + x_1 b_1 \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

La cantidad D representa el determinante del sistema de ecuaciones. Las otras cantidades son subdeterminantes del sistema.

Para la evaluación de la integral de la ecuación (46) las cantidades necesarias son:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = p_i, \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} = p_j, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = q_i, \quad \frac{\partial N_j}{\partial x} = q_j$$

Esto asume que la transmisividad  $T$  es una constante,  $T_p$ , a través del elemento  $R_p$ . Esta asunción puede hacerse sin mucha pérdida de generalidad, debido a que la subdivisión de la región dentro de elementos puede siempre ser hecha, tal que en cada elemento la transmisividad es prácticamente constante. Entonces se obtiene:

$$P_{ij} = T_p A_p \frac{[b_i b_j + c_i c_j]}{D^2}$$

donde  $A_p$  es el área del elemento  $R_p$ . Esta área puede expresarse por coordenadas de los puntos nodales del elemento por varias fórmulas estándar. Una fórmula conveniente es  $A_p = \frac{1}{2}|D|$ . Esta fórmula es especialmente útil debido a que la cantidad  $D$  ya ha sido introducida en una etapa anterior, (ver ecuación 49) y de esta forma no hay que adicionar una expresión para el área del triángulo. La fórmula puede ser derivada por la transformación de la integral elemental superficial dentro de una integral lineal a lo largo de límite por la fórmula de integración de Gauss.

La expresión final para los coeficientes  $P_{ij}$  es:

$$P_{ij} = \frac{T_p}{2|D|} (b_i b_j + c_i c_j) \dots\dots\dots (50)$$

esto hace notar que los coeficientes pueden ser fácilmente calculados si las coordenadas de los vértices de un elemento y la transmisividad en ese elemento son conocidos.

Sustituyendo la ecuación (50) dentro de la ecuación (45) finalmente resulta, para la segunda integral:

$$J_2 = -\sum_j P_{ij} \phi_j \quad (i \in C) \dots\dots\dots (51)$$



donde los coeficientes  $P_{ij}$  están definidos por la ecuación (50). La suma sobre todos los elementos tendría que ser ejecutada.

La tercera integral  $J_3$  definida por la ecuación (41) puede considerarse que está conformada de dos partes. La primera parte es una integral de la función de infiltración  $I$ :

$$J_{3-1} = \int_R (I N_i) dx dy \quad (i \in C) \dots\dots\dots (52)$$

Para cualquier valor particular  $i$ , la función de forma  $N_i$  es diferente de cero solo en los elementos vecinos. Si en todos estos elementos la función de infiltración  $I$  se asume constante (lo cual es una restricción menor si los elementos son suficientemente pequeños), la integral sobre un elemento  $R_p$  actualmente expresa la media del producto  $I_p N_i$  sobre ese elemento, multiplicado por el área de ese elemento. Debido a que  $I_p$  es constante, el valor medio de  $N_i$  es  $\frac{1}{6}$ , y el área de un triángulo es  $\frac{1}{2} D$ . La primera parte de la tercera integral toma la forma:

$$J_{3-1} = \frac{I_p |D|}{6} \quad (i \in R_p) \dots\dots\dots (53)$$

Aquí la condición  $i \in R_p$  indica que, para un valor particular de  $p$  (esto es, para la infiltración sobre el elemento  $R_p$ ), una contribución es obtenida solo si el nodo  $i$  pertenece a ese

elemento. Físicamente esto significa que la infiltración total sobre un elemento,  $\frac{1}{2} I_p D$ , es distribuida uniformemente sobre los tres nodos de ese elemento triangular. Exactamente como en el caso de la primera integral, una superficie de provisión (límite) fue distribuida uniformemente sobre los dos nodos de un elemento superficial. En realidad, también se puede escribir:

$$J_{3-1} = Q_i \quad (i \in C) \quad \dots\dots\dots (54)$$

donde  $Q_i$  ahora representa aquella parte de la infiltración que es atribuida al nodo  $i$ . Para todos los elementos en los cuales el nodo  $i$  pertenece, se tiene:

$$Q_i = \frac{I_p |D|}{6} \quad (i \in R_p) \quad \dots\dots\dots (55)$$

De la ecuación (41), se obtiene que la segunda parte de la tercera integral es:

$$J_{3-2} = - \int_R \left[ \frac{1}{C} \sum_j N_i N_j (\phi_j - \phi_j') \right] dx dy \quad (i \in C) \quad \dots\dots\dots (56)$$

Otra vez se asume que el parámetro físico, en este caso la resistencia  $c$ , es constante en cada elemento, es decir  $c_p$  en el elemento  $R_p$ . Debido a que los valores de  $\phi_i$  y  $\phi_i'$  son también constantes en  $R_p$ , se puede escribir:

$$J_{3-2} = -\sum_j \frac{1}{C_p} (\phi_j - \phi_j') \int_{R_p} (N_i N_j) dx dy \quad (i \in C) \dots\dots\dots (57)$$

Usando la ecuación (47), las dos funciones de forma  $N_i$  y  $N_j$  pueden ser expresadas como:

$$N_i(x, y) = p_i x + q_i y + r_i, \quad N_j(x, y) = p_i x + q_i y + r_i$$

Empleando las ecuaciones (48) y (49), los coeficientes  $p_i \dots r_j$  pueden ser expresados en términos de los datos geométricos de los nodos. Como cada término contendrá un factor lineal o cuadrático en  $x$  y  $y$ , las integrales en la ecuación (57) da salida a las integrales de primera y segunda potencia sobre un elemento. Estas integrales toman una forma simple si el origen del sistema de coordenadas coincide con el centroide del elemento. Lo anterior puede mostrar que se puede asumir sin pérdida de generalidad. En ese caso, el momento de primer orden desaparece:

$$\int_{R_p} x dx dy = 0, \quad \int_{R_p} y dx dy = 0 \dots\dots\dots (58)$$

Los momentos de segundo orden pueden ahora expresarse como:

$$\int_{R_p} x^2 dx dy = \frac{(x_j^2 + x_k^2 + x_l^2) D}{24} = \frac{1}{2} |D| Z_{xx}$$

$$\int_{R_p} y^2 dx dy = \frac{(y_j^2 + y_k^2 + y_l^2) D}{24} = \frac{1}{2} |D| Z_{yy}$$

$$\int_{R_p} xy dx dy = \frac{(x_j y_j + x_k y_k + x_l y_l) |D|}{24} = \frac{1}{2} |D| Z_{xy} \dots \dots \dots (59)$$

donde  $Z_{xx}$ ,  $Z_{yy}$  y  $Z_{xy}$  son coeficientes definidos por las expresiones anteriores. Ellos pueden ser derivados por técnicas matemáticas elementales. Un método simple es por la transformación de integrales superficiales dentro de integrales lineales a lo largo del límite, usando el teorema de integración de Gauss.

Usando las ecuaciones (48), (58) y (59), la integral de la ecuación (57) puede ser escrita como:

$$J_{3-2} = -\sum_j R_{ij} (\phi_j - \phi_j') \dots \dots \dots (60)$$

donde el valor de  $R_{ij}$  puede calcularse con:

$$R_{ij} = \frac{(b_i b_j Z_{xx} + c_i c_j Z_{yy} + (b_i c_j + b_j c_i) Z_{xy} + d_i d_j)}{2 |D| C_p} \dots \dots \dots (61)$$

Esto completa la evaluación de la tercera integral.

Con las ecuaciones (43), (51), (53), y (60), la fórmula básica (38) se convierte a:

$$\sum_j [P_{ij}\phi_j + R_{ij}(\phi_j - \phi_j')] = Q_i \quad (i \in C) \dots\dots\dots (62)$$

donde los coeficientes  $P_{ij}$  y  $R_{ij}$  están dados por las ecuaciones (50) y (61). Todos estos coeficientes pueden ser fácilmente calculados para un elemento si los valores de la transmisividad  $T$ , la infiltración  $I$  y la resistencia  $c$  están dados, y si los datos geométricos son conocidos.

La ecuación (62) es la ecuación algebraica básica del método del elemento finito para flujo del agua subterránea en flujo estable. En vista de que las ecuaciones (44) y (55), pueden ser estimadas como una ecuación de continuidad para el flujo en los nodos alrededor del nodo  $i$ , con el lado derecho representando todas las posibles aportaciones de agua a este nodo, tanto por infiltración o por reposición de agua a lo largo del límite.

Programa Para Flujo Estable por el Método del Elemento Finito. Para mostrar el método de solución, se presenta un programa de computadora considerando el caso de flujo estable en un acuífero completamente confinado. Para tal caso, la ecuación diferencial básica (30) puede ser simplificada tomando  $I = 0$  y  $c = \infty$ . La ecuación resultante es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (63)$$

Para éste caso, el sistema de ecuaciones (62) se reduce a:

$$\sum_j [p_{ij} \phi_j] = Q_i \quad (i \in C) \quad \dots \dots \dots (64)$$

donde, de acuerdo a la ecuación (50), los coeficientes  $P_{ij}$  son compuestos de una suma sobre todos los elementos, cada uno de los cuales hace una contribución de la forma:

$$P_{ij} = \frac{T_p}{2|D|} (b_i b_j + c_i c_j) \quad \dots \dots \dots (65)$$

los coeficientes  $b_j$  y  $c_j$  y la determinante  $D$  son definidos por la ecuación (49).

Una vez que los coeficientes  $P_{ij}$  han sido calculados, los pasos siguientes son para resolver el sistema de ecuaciones lineales de la ecuación (64). Una manera simple para hacer esto, es por el método de Gauss-Seidel, en que la estimación inicial es gradualmente actualizada. Permitiendo que la estimación inicial de la solución sea  $\phi_i = f_i$  para todos los valores de  $i \in C$ . En general estos valores no satisfacen la ecuación (64). Sustituyendo la estimación inicial dentro de la ecuación (64) llevaría a los residuales  $R_i$ :

$$R_i = Q_i - \sum_j [P_{ij} f_j].$$

Los residuales  $i$  en la ecuación pueden ser reducidos a cero por la actualización del valor de  $f_i$  por una cantidad  $\Delta f_i$  tal que la  $i$ -ésima ecuación sería satisfecha, esto es,

$$Q_i - \sum_j (P_{ij} f_i) - P_{ij} \Delta f_i = 0$$

desde esta ecuación se sigue que el incremento  $\Delta f_i$  está dado por:

$$\Delta f_i = \frac{Q_i - \sum_j (P_{ij} f_i)}{P_{ij}} \dots \dots \dots (66)$$

Este es el algoritmo básico del método de Gauss-Seidel. Inicia desde una estimación inicial arbitraria para todos los valores desconocidos de  $\phi_i$ , estos valores son continuamente actualizados de acuerdo a la ecuación (66), hasta que los residuos son suficientemente pequeños. Los procesos son de un carácter iterativo, porque en cada paso, los residuos en los nodos de alrededor son influenciados, y si uno de estos ha sido reducido a cero, no influye cuando otros valores son actualizados. Sin embargo, para una cierta clase de matrices, llamadas matrices definitivas positivas, esto puede mostrar que el proceso iterativo siempre tiende a la

convergencia. La matriz  $P$  en el presente sistema verdaderamente pertenece a esa clase con tal de que la transmisividad no sea negativa, que es una necesidad física. Para el presente propósito esto puede bastar para asumir que el proceso de Gauss-Seidel tiende a converger.

Generalmente se encuentra que la convergencia del proceso de Gauss-Seidel puede ser mejorado en cada intervalo si el valor del parámetro desconocido es actualizado por una cantidad un poco más grande  $\Delta f_i$ , decir  $R * \Delta f_i$ , donde  $R$  es un factor un poco más grande que uno. Este procedimiento es llamado sobre-relajación y el factor  $R$  es llamado el factor de sobre-relajación. Esto puede mostrar que este factor puede ser más pequeño que dos, y el valor óptimo del factor de relajación depende sobre un valor de la matriz  $P$ . Usualmente, esto es determinado a prueba y error, valores tales como 1.5 o 1.6 han sido reportados que dan buenos resultados.

Un programa elemental que ejecuta los cálculos descritos arriba, es listado en el apéndice E como el programa MOSIAS\_4.

El programa empieza con una pantalla de presentación (figura 3.10.), continuando con la entrada de los datos. El programa primero pregunta por algunos datos generales: el número de nodos ( $n$ ), el número de elementos ( $m$ ), el numero de iteraciones ( $ni$ ), y el factor de relajación ( $rx$ ). Entonces los datos de todos los nodos pueden ser entrados: las



coordenadas en  $x$  y en  $y$  de cada nodo,  $x(i)$  y  $y(i)$  respectivamente. La carga  $IP1(i)$  o la tasa local de reposición de agua  $Q1(i)$ , expresada como una descarga. El programa pregunta si la carga en un cierto nodo es dada. Si este es el caso (para un nodo localizado sobre la parte del límite  $L_1$ ), el valor de un indicador tipo  $IP1(I)$  es fijado igual a uno y el programa pregunta por el valor de la carga, que es entonces conocida. Si la carga no es dada, el valor de  $IP1(I)$  es fijado igual a menos uno y el programa pregunta por la tasa de la reposición local de agua. Los datos de todos los elementos pueden ser dados y el número de nodos que comprende cada elemento, y la transmisividad  $T1$  en cada elemento.

```
Número de nodos ..... :?
Número de elementos ..... :?
Número de iteraciones ..... :?
Factor de relajación ..... :?
```

Nodo 1

x ..... ?

y ..... ?

Se da la carga? (S/N)?

(en caso de s) Carga ..... ?

(en caso de n) Reposición ... ?

Se continua con el nodo 2, 3, ..., n

Elemento 1

Nodo 1 ..... ?

Nodo 2 ..... ?

Nodo 3 ..... ?

Transmisividad ... ?

Se continua con el elemento 2, 3, ..., m

Figura 3.10.- Forma de entrada de datos para el programa MOSIAS\_4.

Generación del sistema de matriz. Cuando todos los datos de entrada han sido tecleados, el sistema matriz  $P$  puede ser generado. Para un elemento particular, como es indicado por la variable  $J$ , las coordenadas de los tres nodos es almacenado en las variables  $XJ(I)$  y  $YJ(I)$ . Entonces los coeficientes  $B(I)$ ,  $C(I)$ , y la determinante  $D$  son calculados, usando las fórmulas de (49). Esto permite calcular los nueve valores de la matriz  $P$  por elemento  $J$ , para almacenarlos en las posiciones apropiadas de la matriz, que están definidas por  $KK$  y  $LL$ . Esto hace ver que la suma sobre todos los elementos es ejecutado por la adición de las contribuciones para cada elemento consecutivamente a la matriz  $P$ , que fue inicialmente fijada en ceros.

Solución de ecuaciones. El sistema de ecuaciones es resuelto por el método de Gauss-Seidel. Los residuos son denotados por  $A$ . Esto sería notado que las restricciones de los valores de  $I$  a la clase  $C$ , indicando los valores desconocidos, es tomado en cuenta por un simple algoritmo de brinco si  $IP1(I)$  es positivo.

Después de la terminación de  $N$  iteraciones, los valores de  $Q1(I)$  son calculados, lo que permite verificar la convergencia, debido a que debe ser igual al valor prescrito en todos los puntos donde la carga es desconocida. La solución es finalmente presentada como una lista sobre el dispositivo de salida seleccionado.

Flujo Estable con Infiltración y Percolación. El propósito de este modelo es el cálculo del flujo estable con infiltración y percolación, con el método del elemento finito, usando elementos cuadrangulares.

Los elementos triangulares usados en MOSIAS\_4 conducen a una cierta asimetría en la mayoría de las mallas, debido a lo diagonal en un sistema de cuadrados. Esto puede ser evitado por la adición de una segunda diagonal, y un nodo adicional en el centro. Sin embargo lo anterior conduce a casi dos veces el número de nodos y elementos en la malla. Es más efectivo hacer un elemento cuadrangular considerándolo la suma de cuatro triangulares (figura 3.11.).

Debido a que el elemento cuadrangular se considera como la suma de dos triángulos, la transmisividad efectiva es duplicada en el proceso. Para la contabilización de este efecto, todas las transmisividades serán reducidas por un factor de dos en el programa.

Una red de elementos cuadrangulares parece menos flexible que un sistema de triángulos, ya que estos son más tratables para refinamientos locales. Sin embargo un triángulo también puede ser considerado un cuadrángulo, si se permite que el área de uno de los triángulos que lo componen sea cero. La incorporación de tales elementos en un programa requiere que cada elemento sea checado para la posibilidad de que su área sea cero. Si el área encontrada es cero, el

elemento puede simplemente ser pasado por alto en la parte en que el programa genera el sistema matriz.

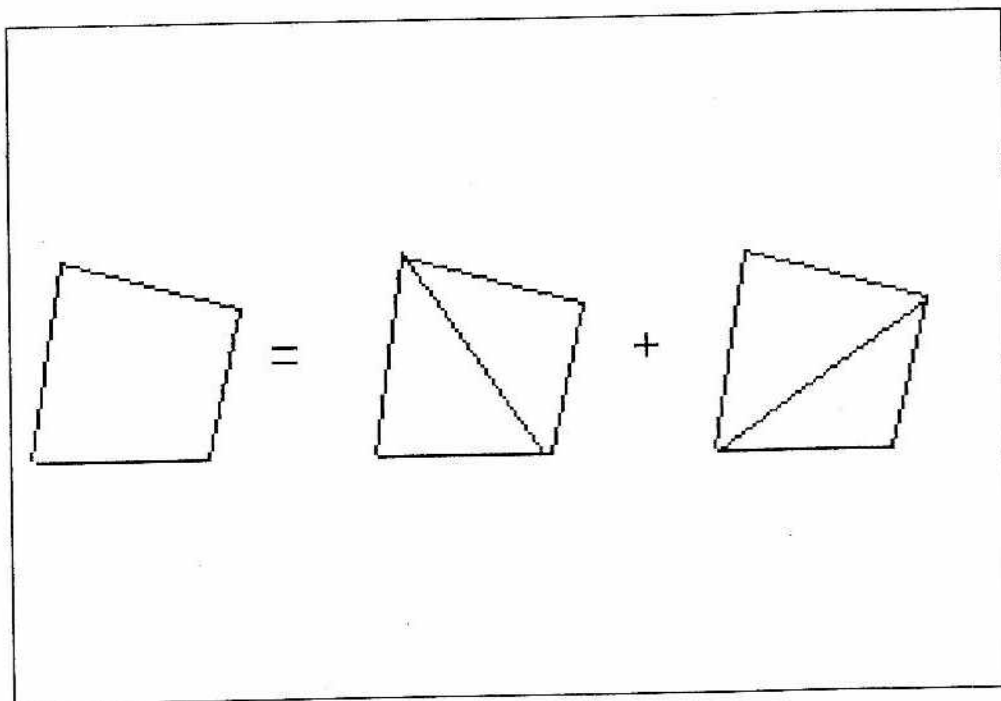


Figura 3.11.- Formación de un elemento cuadrangular  
(Tomado de Bear y Verruijt, 1987)

La ecuación algebraica básica para flujo estable con infiltración y percolación puede ser escrita como:

$$\sum_j [P_{ij} \phi_j + R_{ij} (\phi_j - \phi_j')] = Q_i, \quad (i \in C) \dots\dots\dots (67)$$

donde los coeficientes  $P_{ij}$  y  $R_{ij}$  son dados por las ecuaciones (50) y (61).

Estas expresiones dan las contribuciones de un elemento simple. Lo que implica una adición sobre todos los

elementos. Los coeficientes  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $Z_{xx}$  etcétera son dados por las ecuaciones (49) y (59).

Para tomar en cuenta la adición de términos debido a la matriz  $R$ , la parte del programa que genera el sistema matriz se puede modificar. Por supuesto que la solución del sistema de ecuaciones se modificaría también para contar con un nuevo sistema matriz  $(P+R)$  y para la adición de términos en las expresiones para la función de reposición  $Q$  sobre el lado derecho, tal como la contribución debida a la superficie de infiltración sobre los elementos.

Un programa de computadora para este tipo de problemas es listado en el apéndice F como el programa MOSIAS\_5.

#### Programa Para Flujo Estable con Infiltración y Percolación.

El significado de las variables de entrada es como sigue:

- $N$             Número de nodos
- $M$             Número de elementos
- $X(I)$         Coordenada en X del nodo I
- $Y(I)$         Coordenada en Y del nodo I
- $IP2(I)$      Tipo del indicador del nodo I
- $FA2(I)$      Carga en el acuífero adyacente en el nodo I, que es el dato calculado de salida del programa.
- $Q2(I)$        Reposición de agua en el nodo I
- $NP2(J,1)$     Nodo 1 del elemento J
- $NP2(J,2)$     Nodo 2 del elemento J
- $NP2(J,3)$     Nodo 3 del elemento J

- $NP2(J,4)$  Nodo 4 del elemento  $J$
- $T2(J)$  Transmisividad en el elemento  $J$  ( $m^2/día$ )
- $PP2(J)$  Infiltración en el elemento  $J$  ( $m/día$ )
- $CC(J)$  Resistencia del acuitardo en el elemento  $J$  ( $día$ )

Las variables de salida son: Localización del nodo  $i$  en la dirección  $X$ ,  $X(I)$ ; localización del nodo  $i$  en la dirección  $Y$ ,  $Y(I)$ ; carga de agua en el nodo  $i$ ,  $F2(I)$ .

El indicador tipo  $IP2(I)$  puede ser más grande que cero (esto es, uno) si la carga en el nodo  $I$  es dada. Para tales nodos el valor de  $F2(I)$  sería un valor dado. Si las cargas locales son desconocidas,  $IP2(I)$  puede ser menor que cero (esto es, menos uno). El valor de entrada de  $F2(I)$  es entonces usado como la primera estimación en el procedimiento de iteración. Esto puede tomarse como cero para un nodo interior si no hay fuente o abatimiento en ese nodo. Si la carga es dada en el nodo  $I$ , la instrucción pregunta por el valor de la descarga  $Q2(I)$ . Cualquier valor arbitrario puede ser asignado a  $Q2(I)$  para tales nodos (esto es, 0), debido a que el programa ignora el valor.

La solución exacta de este problema, puede ser fácilmente encontrada por la integración de la ecuación diferencial. La solución es:

$$e = Ic \left[ \frac{1 - \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{\lambda}\right)} \right]$$

donde  $\lambda$  es el factor de percolación,  $\lambda = (Tc)^{0.5}$ .

Flujo no Estable

Método Explícito de diferencias finitas. El propósito de este modelo es el cálculo del flujo no estable, por medio del método explícito de diferencias finitas.

Bear y Verruijt (1987) mencionan que la sencillez y poder del método de diferencias finitas viene a ser más evidente cuando se considera problemas de flujo no estable. Por razones de simplicidad, las consideraciones son restringidas a mallas de líneas equidistantes en ambas direcciones.

La ecuación diferencial parcial básica para un flujo no estable en un acuífero, con la posibilidad de suplir agua al acuífero por infiltración, puede ser escrita en la forma siguiente:

$$S \frac{\partial \phi}{\partial t} = T \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] + I \dots \dots \dots (68)$$

Donde  $I$  es una función original dada que representa la infiltración neta debido a la recarga natural o artificial del acuífero (negativa para evapotranspiración),  $T$  es la transmisividad y  $S$  el coeficiente de almacenamiento. La formulación completa del problema requiere la especificación de las condiciones límites, y en este caso de flujo no estable, de condiciones iniciales. Como en el caso de flujo estable, se asume que a lo largo de la parte del límite la carga es dada y que el resto del límite es impermeable.

$$\text{sobre } L_1: \quad \phi = f, \dots\dots\dots (69)$$

$$\text{sobre } L_2: \quad Q_n = -T \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (70)$$

Las condiciones iniciales asumidas son:

$$t = 0: \quad \phi = \phi^0 \dots\dots\dots (71)$$

Donde  $\phi^0$  es una función específica conocida en todo el dominio. Las derivadas espaciales en el lado derecho de la ecuación (68) puede ser aproximada por expresiones de forma parecida a la ecuación (19). Lo anterior parece más natural al aproximar la derivada del tiempo por una diferencia finita hacia adelante. Debido a que el problema actual es el predecir valores futuros de la carga hidráulica a partir de valores iniciales. Por lo tanto se introduce la siguiente aproximación:



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi'_{i,j} - \phi^0_{i,j}}{\Delta t} \dots \dots \dots (72)$$

donde  $\Delta t$  es la magnitud del intervalo de tiempo y  $\phi'$  es el valor de la carga en el final del intervalo de tiempo.

La ecuación (72) contiene dos valores de la carga en el nodo  $i, j$  de la malla, esto no es inmediatamente evidente, sin embargo cualquiera de estos valores pueden ser usados en la aproximación espacial.

La elección más simple para la aproximación de la derivadas espaciales, es la que asume que en la aproximación espacial de la ecuación (20) todos los valores de la carga van a ser considerados en un valor de tiempo inicial. Entonces después de la sustitución de varias aproximaciones en la ecuación (68) se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi'_{i,j} = & \phi^0_{i,j} + I \left( \frac{\Delta t}{S} \right) + \alpha (\phi^0_{i-1,j} + \phi^0_{i+1,j} - 2\phi^0_{i,j}) + \dots \\ & \dots + \beta (\phi^0_{i,j-1} + \phi^0_{i,j+1} - 2\phi^0_{i,j}) \dots \dots \dots (73) \end{aligned}$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes definidas por:

$$\alpha = \frac{T \Delta t}{(S(\Delta x)^2)} \dots \dots \dots (74)$$

$$\beta = \frac{T \Delta t}{(S(\Delta y)^2)} \dots\dots\dots (75)$$

Aquí  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son las distancias (constantes) entre las líneas de la malla en las dos direcciones.

La ecuación (73) expresa el nuevo valor de la carga en el punto  $i, j$ , en términos de los valores iniciales en los nodos y en los vecinos inmediatos. Como todos estos valores son conocidos, el proceso es llamado explícito. Especialmente para todos los nodos interiores, la ecuación (73) especifica cuando determinar nuevos valores de la carga.

Los valores a lo largo de los límites pueden ser determinados de la misma forma que en el caso de flujo estable. Los nodos en que la carga es dada no presentan dificultad, debido a que su valor es dado. Para nodos sobre un límite impermeable, la condición de no flujo otra vez puede ser expresada simplemente, por el uso de un nodo imagen a través del límite. Como tal, la carga es entonces fijada al valor en el nodo localizado a la misma distancia en el interior. Alternativamente esta condición puede ser satisfecha por el uso de la expresión de la forma de la ecuación (22) para la aproximación de Laplace en un nodo en el límite impermeable.

Programa Para Flujo no Estable, Método Explícito de Diferencias Finitas. Un algoritmo elemental que realiza el cálculo de diferencias finitas para el caso de un acuífero rectangular con una carga constante en el límite e infiltración uniforme es desarrollado con el programa MOSIAS\_6.

Nuevamente, el programa usa entrada interactiva, explicadas por sí mismas con entradas puntuales. El programa primero pregunta algunos datos geométricos, los cuales definen la malla, luego pregunta por los parámetros físicos: la carga inicial (antes de empezar el reemplazamiento) la tasa o velocidad de infiltración, la transmisividad y el coeficiente de almacenamiento. Todos estos parámetros son considerados constantes en toda la región. El programa entonces pregunta por un valor de intervalo de tiempo, después imprime una sugerencia para ese intervalo de tiempo y para el número deseado de intervalos de tiempo.

Las variables de entrada al programa son las siguientes, y la forma de entrada se muestra en la figura 3.12.

- Dimensión en la dirección X;  $X_T$  (m)
- Subdivisiones en la dirección X;  $N_X$
- Dimensión en la dirección Y;  $Y_T$  (m)
- Subdivisiones en la dirección Y;  $N_Y$
- Carga inicial;  $H$  (m)
- Tasa de infiltración;  $P$  (m/día)
- Transmisividad;  $T$  ( $m^2/día$ )
- Coeficiente de almacenamiento;  $S$

- Intervalo de tiempo;  $DT$  (días)
- Número de intervalos de tiempo;  $NS$

Los datos de salida son la carga (en m) en cada uno de los nodos, o solamente en el centro de la malla.  $FA(II, JJ)$  para los nodos en centro solamente y,  $FA(I, J)$  para todos los nodos de la malla.

```

Dimensión en la dirección X .....(m) :?
  Subdivisiones .....(m) :?
Dimensión en la dirección Y .....(m) :?
  Subdivisiones .....(m) :?
Carga inicial .....(m) :?
Tasa de infiltración .....(m/día) :?
Transmisividad .....(m^2/día) :?
Coeficiente de almacenamiento ..... :?

```

Sugerencia para el intervalo de tiempo:

```

Intervalo de tiempo ..... :?
Número de intervalos de tiempo ..... :?

```

```

  Los datos son correctos (S/N)... :?

```

Figura 3.12.- Forma de entrada de datos para el programa MOSIAS\_6.

El algoritmo de la ecuación (73) es ejecutado para todos los nodos en el interior de la región. Debido a que la carga se asume constante en tiempo y en todo el límite de la región rectangular, los valores en el límite permanecen sin cambio. Después ejecutando los cálculos, la carga en el centro o en todos los puntos de la región del acuífero son

impresos en el dispositivo de salida seleccionado.

Puede notarse que el programa MOSIAS\_6 puede ser usado para resolver problemas para una red muy grande. Las dimensiones de las declaraciones establece que la malla puede ser de  $((NX+1) * (NY+1))$  cuadrados elementales. Por ejemplo en el caso de que el número de puntos de la malla sea de  $50 * 50$  se tiene que el programa resuelve un sistema de 2601 ecuaciones con 2601 incógnitas, en cada intervalo de tiempo. En el apéndice G se muestra el listado del programa MOSIAS\_6.

Método del Elemento Finito. El propósito del presente modelo es el cálculo del flujo no estable por el método del elemento finito con elementos cuadrangulares.

Una importante generalización de los modelos es la introducción de conductas de almacenaje e inestabilidad que en ellos ocasionan. Los efectos de inestabilidad serán considerados para el caso de flujo horizontal en un acuífero con infiltración distribuida, fuentes puntuales de abatimientos y almacenamiento elástico o freático.

La ecuación diferencial básica es, para un acuífero isotrópico, de la forma:

$$S \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + I \dots \dots \dots (76)$$

donde  $S$  denota el almacenamiento, e  $I$  denota la infiltración neta.

Las condiciones de límite se asumen de primera o segunda clase. Además en todo el límite la carga o la tasa de agua de reposición es dada. A diferencia de el caso de flujo estable, las condiciones iniciales son ahora también necesarias. Esta condición inicial es escrita como:

$$t = 0: \quad \phi = \phi^0(x, y) \dots\dots\dots (77)$$

donde  $\phi^0(x, y)$  es una función conocida.

Aquí el problema a resolver es la integración en tiempo. El procedimiento desarrollado es aquel en que los valores al final del primer intervalo de tiempo puedan ser obtenidos, comenzando desde los valores iniciales. Un próximo intervalo de tiempo puede ser hecho por la consideración de los valores en el final del primer intervalo de tiempo como los valores iniciales para el segundo intervalo, etcétera.

Una simple manera de derivar las ecuaciones algebraicas básicas del método numérico, es integrar la ecuación diferencial (76) desde  $t = 0$  hasta  $t = \Delta t$ . Haciéndolo se obtiene la ecuación (78):

$$S \frac{\phi' - \phi^0}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + I \dots\dots\dots (78)$$

donde  $\phi'$  es el valor de la carga en el final del intervalo de tiempo considerado, hasta que los valores de  $\phi$  y  $I$  son promediados sobre el intervalo de tiempo. Ellos son obtenidos por integración sobre  $\Delta t$ , y dividiendo el resultado por  $\Delta t$ .

Ahora se asume que el valor promedio de la carga  $\phi$  durante el intervalo de tiempo puede ser expresado en términos de los valores en su inicio y su final en la forma:

$$\phi = \epsilon \phi^0 + (1 - \epsilon) \phi' \dots\dots\dots (79)$$

donde  $\epsilon$  es una constante de interpolación, con  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . La fórmula de la ecuación (77) declara que el valor medio es una combinación lineal del valor inicial y el final, posiblemente con diferente ponderación. Para  $\epsilon = 0$  el valor medio es igual al valor final, esto corresponde a una diferencia finita hacia atrás. Para  $\epsilon = 1$  la media es igual al valor inicial, correspondiente a una diferencia finita hacia adelante en tiempo. El valor imparcial de  $\epsilon = \frac{1}{2}$  corresponde a una diferencia finita central. En términos de diferencias finitas, esto conduciría al proceso de Crank-Nicholson. En muchos casos prácticos los procesos transitorios son de un decaimiento natural lento. Esto sugiere que el valor medio sería influenciado hacia el valor final, con  $\epsilon$  iniciando

algunas veces tan pequeño como 0.5. En este caso, se deja el valor de  $\epsilon$  no especificado. Esto sería un parámetro de entrada del programa.

De la ecuación (79) se obtiene:

$$\phi' - \phi^0 = \frac{\phi - \phi^0}{1 - \epsilon} \dots\dots\dots (80)$$

también la ecuación (78) puede ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + I - S \frac{\phi - \phi^0}{\Delta t (1 - \epsilon)} = 0 \dots\dots\dots (81)$$

Esta es la forma final de la ecuación diferencial después de la integración sobre el intervalo de tiempo. La derivada de tiempo ha sido eliminada por el proceso de integración sobre el intervalo de tiempo. Como un resultado, una ecuación en términos del valor medio  $\phi$  ha sido obtenida.

Por comparación de la ecuación (81) con la ecuación (30), se encuentra que ambas son formalmente idénticas, la sola diferencia es que en la última, el coeficiente  $1/c$  es reemplazado por  $S/\Delta t(1-\epsilon)$ , y que la variable dada  $\phi'$  es reemplazada por  $\phi^0$ . Hay solamente diferencias de notación. Esto sigue que las técnicas desarrolladas para la solución de la ecuación (30) pueden ser directamente aplicadas a la solución de la ecuación (81).



En suma, se puede concluir que un programa del elemento finito para la solución de flujo no estable en un acuífero puede ser basado sobre una pequeña modificación de la ecuación (67), esto es,

$$\sum_j [P_{ij} \phi_j + R_{ij}(\phi_j - \phi_j^0)] = Q_i \quad (i \in C) \dots\dots\dots (82)$$

donde ahora los coeficientes  $P_{ij}$  y  $R_{ij}$  son dados por:

$$P_{ij} = \left[ \frac{T_2}{2|D|} \right] [b_i b_j + c_i c_j] \dots\dots\dots (83)$$

$$R_{ij} = \frac{[b_i b_j Z_{xx} + c_i c_j Z_{yy} + (b_i c_j + b_j c_i) Z_{xy} + d_i d_j] S_p}{[2|D|\Delta t(1-\epsilon)]} \dots\dots (84)$$

#### Programa Para Flujo No Estable Método del Elemento Finito.

Un programa de computadora para este sistema de ecuaciones puede ser derivada desde el programa MOSIAS\_7 por una apropiada modificación de los coeficientes. La sola complicación es que en general esto no es deseable para asumir que el valor de  $\Delta t$  permanece constante durante el proceso. Un valor variable de  $\Delta t$  parece significar que la matriz  $R$  tiene que ser recalculada en cada intervalo de tiempo. Sin embargo, como  $\Delta t$  es el mismo para todos los elementos, esto puede ser considerado como un factor de multiplicación variable de una matriz constante, de este modo salvando mucho tiempo de cálculo.

Los datos de entrada requeridos por el programa son:

- Número de nodos;  $N$
- Número de elementos;  $M$
- Coordenada en X del nodo  $1, 2, \dots, n$ ;  $X(I)$
- Coordenada en Y del nodo  $1, 2, \dots, n$ ;  $Y(I)$
- Carga en el acuífero adyacente en el nodo  $1, 2, \dots, n$ ;  $FA4(I)$  (m)
- Reposición de agua en el nodo  $1, 2, \dots, n$ ;  $Q4(I)$
- Nodo 1 del elemento  $J$ ;  $NP4(J, 1)$
- Nodo 2 del elemento  $J$ ;  $NP4(J, 2)$
- Nodo 3 del elemento  $J$ ;  $NP4(J, 3)$
- Nodo 4 del elemento  $J$ ;  $NP4(J, 4)$
- Transmisividad del elemento  $J$ ;  $T4(J)$  ( $m^2/día$ )
- Coeficiente de almacenamiento del elemento  $J$ ;  $S(J)$
- Infiltración del elemento  $J$ ;  $PP(J)$  (m/día)

Los datos de salida son la localización en X,  $X(I)$  y en Y,  $Y(I)$  del nodo y su carga calculada ( $F(I)$ ).

El programa de computadora para flujo no estable es listado en el apéndice H como el programa MOSIAS\_7.

Cálculo del flujo no estable del agua subterránea con una interfase aguda entre agua dulce y salada en un plano vertical. El objetivo de este modelo es el de permitir la predicción de la intrusión del agua de mar dentro de acuíferos costeros, en respuesta a variaciones en los componentes del balance de agua dulce. Esta información es requerida

para el manejo de acuíferos costeros.

El modelo se aplica al flujo en un plano vertical, en que la localización de la interfase es dependiente del tiempo debido a las condiciones de barrera, pozos de bombeo, etcétera. En este modelo, el dominio del flujo (en el plano vertical) es subdividido dentro de pequeños elementos, tal que la interfase es representada por una serie de elementos, conectando cientos de nodos en la malla. Debido a que la interfase se mueve, la localización de los nodos es cambiante en función del tiempo. En un modelo numérico para flujo en un plano vertical, el dominio puede ser subdividido dentro de un gran número de pequeños elementos (figura 3.13.). Usualmente, la interfase se asume que consiste en una serie de elementos límite, tal que los elementos de arriba contienen agua dulce, y los de abajo agua salada. De esta manera el comportamiento no permanente de la interfase puede ser simulada, para permitir que los nodos sobre la interfase se muevan, también que la configuración actual de la red es una función del tiempo.

Para concentrarse sobre la facción principal del problema, (el movimiento de la interfase) otras posibles complicaciones, tales como el almacenamiento elástico o almacenamiento debido al movimiento de la superficie freática, no fueron considerados en este modelo. La justificación física para esta asunción es que el almacenamiento debido al movimiento de la interfase obscurece grandemente los efectos del almacenamiento elástico y almacenamiento freático.

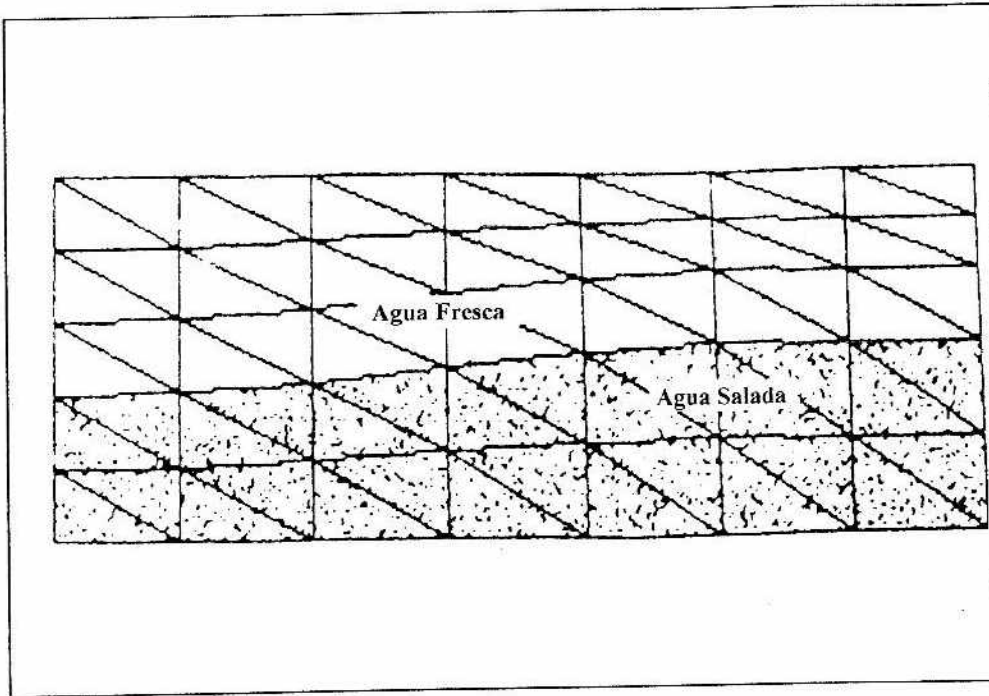


Figura 3.13. Malla de elementos en un problema de interfase (Tomado de Bear y Verruijt, 1987).

La ecuación básica de la ley de Darcy aplicada a un medio isotrópico y poroso es escrita como:

$$q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad q_y = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \right) \dots\dots\dots (85)$$

donde  $k$  es la permeabilidad del medio poroso,  $\mu$  es la viscosidad del fluido, y  $\gamma$  su peso volumétrico ( $\gamma = \rho g$ ). El eje  $y$  se asume puntual en una dirección hacia arriba, que es opuesto a la acción de la gravedad. La ley de Darcy ha sido expresada en términos de la presión del fluido, mejor dicho, en términos de cargas de presión de agua dulce y salada, además esto es una función sencilla valorada en todo el

dominio.

La ecuación de conservación en ausencia de funciones distribuidas, almacenamiento elástico, y asumiendo que el fluido es incompresible puede ser escrita como:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (86)$$

sustituyendo la ecuación (85) dentro de la ecuación (86) queda la siguiente ecuación diferencial, válida a través de todo el dominio.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\mu} \gamma \right) \dots\dots\dots (87)$$

Para la completa descripción del problema, unas condiciones de barrera fijas serán añadidas a esta ecuación diferencial. Por el bien de simplificar, se asume que en toda la longitud de la barrera la presión  $p$  es descrita, o el flujo de agua es cero (barrera impermeable). Se tendría que asumir que todas las barreras son verticales u horizontales. Finalmente, la permeabilidad,  $k$ , y la viscosidad,  $\mu$ , son considerados constantes a través del dominio.

La mayor y única complicación del problema definido por la ecuación (87) y las condiciones de barrera, es la aparición del término conteniendo el peso volumétrico  $\gamma$ . En

el caso de una interfase bien definida entre el agua dulce y salada, el peso volumétrico es constante por todas partes, así también como su derivada, excepto sobre la interfase donde  $\gamma$  a través de la interfase no existe. Sin embargo, una interfase aguda puede ser considerada como un caso limitante de una zona de transición de filtración  $d$ , en que el peso volumétrico cambia desde  $\gamma_s$  hasta  $\gamma_f$ . De este modo dentro de la zona de transición se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta \gamma}{d} \dots\dots\dots (88)$$

donde  $\Delta \gamma = \gamma_s - \gamma_f$ . La misma ecuación diferencial se aplica en todos los lados, a excepción de que el lado derecho sea cero.

El lado derecho de la ecuación (88) representa la fuente distribuida, con una fuerza inversamente proporcional al espesor de la zona de transición. Una fuente distribuida puede ser fácilmente introducida en un modelo de elemento finito. Si la zona de transición se supone ser representada por una serie de segmentos lineales, la contribución de las fuentes a lo largo del segmento lineal desde el nodo  $i$  hasta el nodo  $j$ , están dirigidos hacia la fuente de los términos en el nodo  $i$  y el nodo  $j$  de una fuerza total, igual a la fuerza de la fuente distribuida multiplicada por el área, que es el espesor  $d$  veces la distancia horizontal  $L_{ij}$ , de dos nodos. Además, en cada uno de estos dos nodos, un término de la fuente puede ser introducida.

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \Delta\gamma L_{ij} \dots\dots\dots (89)$$

Lo anterior es independiente del espesor de la zona de transición, además se puede considerar como cero.

Programa para flujo no estable del agua subterránea con una interfase aguda entre agua dulce y salada en un plano vertical. Un algoritmo para la solución del problema de interfase descrito arriba es listado en el apéndice I como el programa MOSIAS\_8.

El programa usa el método del gradiente conjugado para resolver el sistema de ecuaciones, con un vector puntero para indicar los coeficientes diferentes de cero del sistema matriz. Todos los coeficientes que no son cero son almacenados en un arreglo de una sola dimensión  $P$ , y el vector puntero es establecido en el programa.

El programa genera una malla de elementos, basado sobre un pequeño número de datos de entrada (ver figura 3.14) tales como, la longitud del acuífero  $WW$  (m), espesor del acuífero  $HT$  (m), la posición original de la interfase  $H1$  (m), la localización del abatimiento  $H2$  (m), el número de elementos en las direcciones horizontal y vertical  $NV$  y  $N6$  respectivamente, y algunos datos físicos para el medio poroso tales como la permeabilidad  $PM$  (m/día), coeficiente de almacenamiento  $PR$ , y del fluido como lo son, la densidad del agua

fresca  $GF$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ) y densidad del agua salada  $GS$  ( $\text{gr}/\text{cm}^3$ ), así como la descarga del pozo  $QQ$  ( $\text{m}^3/\text{día}$ ).

```

Longitud del acuífero (m) .....?
Espesor del acuífero (m) .....?
Nivel de la interfase (m).....?
Nivel del pozo (m).....?
Elementos horizontales (3...20).....?
Elementos verticales (4...16).....?
Densidad del agua fresca ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )...?
Densidad del agua salada ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )...?
Permeabilidad / viscosidad ( $\text{m}/\text{día}$ )..?
Almacenamiento.....?
Descarga del pozo ( $\text{m}^3/\text{día}$ ).....?

Sugerencia para intervalo de tiempo
Intervalo de tiempo (días).....?
Número de intervalos de tiempo.....?

```

Figura 3.14. Forma de entrada de datos al programa MOSIAS\_8.

El programa genera automáticamente una malla tal que, la interfase y la línea horizontal a través del punto del pozo son elementos de barrera. La altura de los elementos abajo del pozo pueden cambiar como una función del tiempo, dependiendo sobre el movimiento de la interfase. Las dimensiones de los elementos en la dirección horizontal son pequeños en la vecindad del pozo, y se incrementan gradualmente en magnitud hacia el lado derecho de la barrera del acuífero. La máxima capacidad del programa es de 320 elementos de la red. Las condiciones de barrera a lo largo de los límites superior e inferior (impermeables) son las



derivadas normales de la presión ( $\gamma_f$  o  $\gamma_s$ ). Esto es análogo para un flujo dado en la formulación estándar del elemento finito en términos de cargas de agua subterránea. Estas condiciones de barrera pueden entonces ser incorporadas por la adición de un término sobre el lado derecho del sistema de ecuaciones. La condición de interfase representada por la ecuación (89) puede ser tomada dentro del programa de una manera similar, como fue explicado anteriormente.

Para determinar el movimiento de la interfase durante un intervalo de tiempo, los flujos en los elementos inmediatamente abajo y arriba de la interfase son transformados dentro de unas velocidades medias en los nodos a lo largo de la interfase. En el programa, esto se hizo por una simple media aritmética, usando la matriz  $NK$  para indicar el número de los elementos circundantes al nodo. Un método mas sofisticado puede hacerse, usando ciertas funciones de ponderación que serían menos influenciadas que una simple media.

El movimiento de los nodos sobre la interfase han sido restringidos para la dirección vertical, para evitar demasiada distorsión de la malla. De esta manera los componentes de  $x$  y de  $y$  de la velocidad en un nodo puede ser transformada dentro de un movimiento vertical de la interfase. El desplazamiento vertical de la interfase depende de la pendiente de la interfase (figura 3.15.). Se sigue desde esta figura que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y - v_x * \frac{y_n}{x_n} \dots\dots\dots (90)$$

donde  $x_n$  y  $y_n$  son los componentes de un vector paralelo a la interfase. Esta expresión puede ser derivada desde la condición general de la interfase. La relación en la ecuación (90) es usada en el programa.

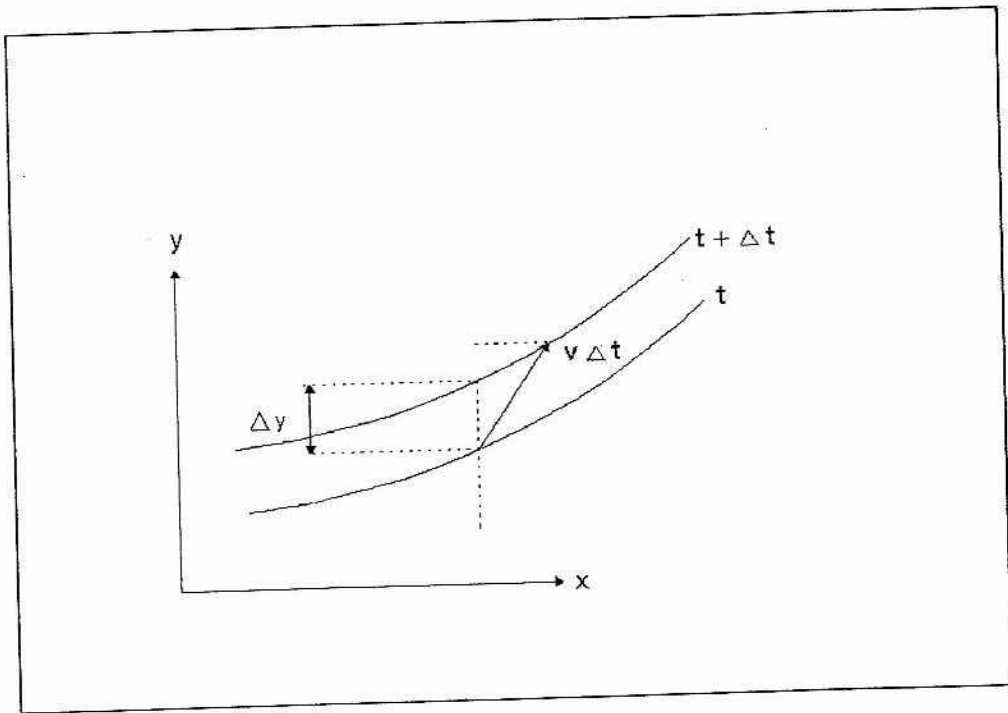


Figura 3.15.- Movimiento de la interfase en un intervalo de tiempo (Tomado de Bear y Verruijt, 1987)

La salida del programa consiste de una figura de la malla en la pantalla.

## Contaminación del Agua Subterránea

Cálculo de la distribución de concentración de contaminantes en una o dos dimensiones. Para algunos casos simples, la ecuación de transporte puede ser resuelta analíticamente, estas soluciones son de gran ayuda al hacer las primeras estimaciones y evaluaciones de una pluma de contaminación. Las especificaciones requeridas son homogeneidad del acuífero, flujo paralelo de velocidad constante, factor de retardación constante, tasa de reacción, y dispersibilidades. También, la entrada del contaminante no debe influenciar el flujo homogéneo de campo y la difusión molecular no es tomada en cuenta. Primero se verá dentro de un caso unidimensional. Considerando un acuífero de espesor  $m$  y ancho  $w$  extendido infinitamente en direcciones positivas y negativas de  $x$ , los gradientes de concentración en las direcciones  $y$  y  $z$  se asumen ser cero. En este caso la ecuación unidimensional de transporte aplicada es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{D_L}{R} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \lambda C \dots\dots\dots (91)$$

$$\text{con } D_L = \alpha_L u \quad \text{y} \quad u > 0$$

Primero se resuelve la ecuación para el caso de una inyección instantánea de una masa de contaminante  $\Delta M$  en la posición  $x=0$  (extendiéndose sobre el ancho  $w$  y la profundidad  $m$ ) en el tiempo  $t = 0$ . Este tipo de condición inicial puede

ser expresado por medio de la función de Dirac.

$$c_{\delta}(x, 0) = \frac{\Delta M}{n_e m w R} \delta(x) \dots\dots\dots (92)$$

La función de Dirac  $\delta(x)$  es definida por:

$$\delta(x) = 0 \text{ para } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \dots\dots\dots (93)$$

Por la condición de la ecuación (92),  $c_{\delta}(x, 0)$  es normalizada tal que la masa contenida en la inyección es  $\Delta M$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} w m n_e R c_{\delta}(x, 0) dx = \Delta M \dots\dots\dots (94)$$

El factor  $R$  es necesario para contabilizar la masa de contaminante disuelta y adsorvida, en el caso de adsorción. Permitiendo más demanda que la solución limitada, a esta media.

$$c(\pm\infty, t) = 0 \dots\dots\dots (95)$$

La solución de la ecuación (91) que satisface a las ecuaciones (92) y (95) es conocida como la función de Gauss:

$$c_{\delta}(x, t) = \frac{\Delta M}{2 w m n_e R \sqrt{\frac{\pi \alpha_L u t}{R}}} \exp \left( - \frac{\left( \frac{x - ut}{R} \right)^2}{\frac{4 \alpha_L u t}{R}} \right) \exp(-\lambda t)$$

(96)

Esta función es una distribución en forma de campana alrededor de  $x = ut/R$  con una anchura  $(2\alpha_L ut/R)^{0.5}$ . Esto se mueve a una velocidad de  $u/R$  en la dirección positiva de  $x$ . Debido al incremento de la anchura con el tiempo y debido a decaecimiento, la amplitud de la distribución es amortiguada hacia afuera (figura 3.16.). En algún tiempo  $t$ , la función satisface la condición de normalización.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w m n_e R c_{\delta}(x, t) dx = \Delta M \exp(-\lambda t) \dots\dots\dots (97)$$

El límite de  $c_{\delta}(x, t)$  para  $t \rightarrow 0$  es la expresión dada en la ecuación (92).

La solución para una inyección en  $x = \xi$  y  $t = \tau$  es obtenida desde la ecuación (96) por el reemplazo de  $t$  por  $t - \tau$ , y de  $x$  por  $x - \xi$ . Conociendo la respuesta del acuífero a una entrada instantánea, la respuesta para alguna entrada distribuida en tiempo y en espacio se puede calcular como una integral de circunvolución. Esto es debido al hecho de que la ecuación de transporte es lineal y las condiciones de límite dados por la ecuación (95) son homogéneos. Para el caso de

una fuente concentrada en  $x = 0$  con una tasa de descarga dependiente del tiempo  $M(t) = dM/dt$ , la solución es:

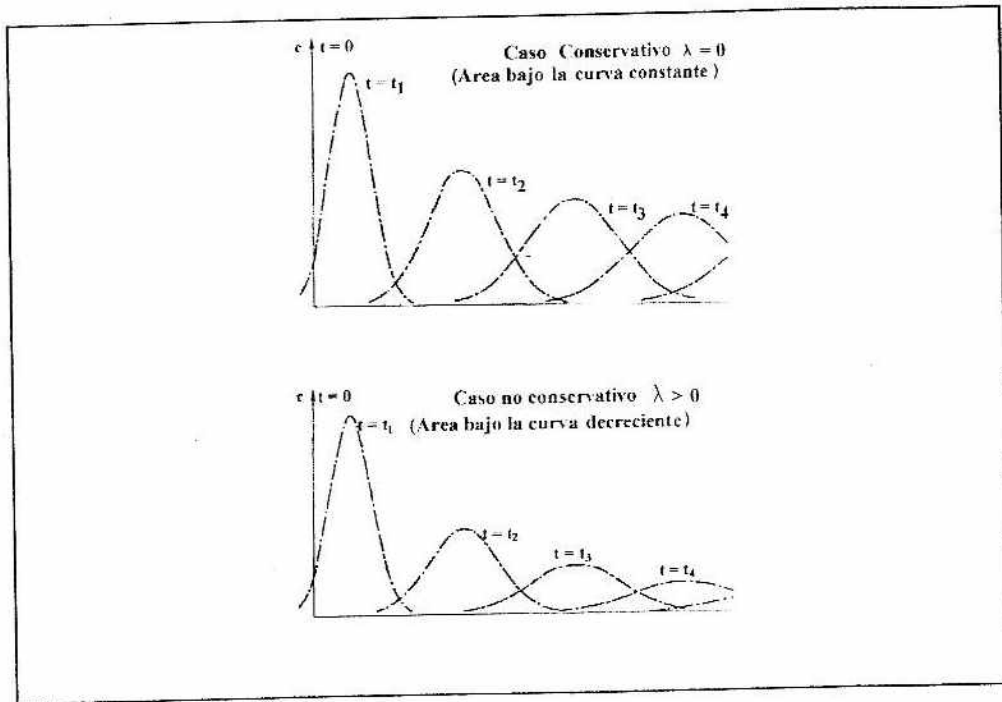


Figura 3.16. Desarrollo temporal de la distribución unidimensional de contaminante (Tomado de Kinzelbach, 1986).

$$c(x, t) = \int_0^t \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{c_\delta(x, t-\tau)}{\Delta\tau} d\tau \dots\dots\dots (98)$$

$$= \int_0^t \frac{M(\tau)}{2 * w * m * n_e R \sqrt{\pi \alpha_L u(t-\tau) / R}} * \exp\left(-\frac{\left(\frac{x-u(t-\tau)}{R}\right)^2}{\frac{4 \alpha_L u(t-\tau)}{R}}\right) * \exp(-\lambda(t-\tau)) d\tau$$

Para una fuente espacialmente distribuida con una tasa de inyección de  $\mu(x, t)$  por unidad de longitud, la distribución de concentración resultante en un tiempo  $t$  es:

$$c(x, t) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=0}^t \frac{\mu(\xi, \tau)}{2 w m n_e R \sqrt{\frac{\pi \alpha_L u (t-\tau)}{R}}} \exp \left( - \frac{\frac{(x-\xi-u-(t-\tau))^2}{R^2}}{\frac{4 \alpha_L u (t-\tau)}{R}} \right) *$$

$$* \exp(-\lambda(t-\tau)) dt d\xi \dots \dots \dots (99)$$

Para funciones simples  $M(t)$  (o  $\mu(x, t)$ ) las integrales se pueden evaluar analíticamente. Considerando el caso de una fuente concentrada en  $x = 0$  con una tasa de inyección constante  $M = \text{constante}$  iniciando en un tiempo  $t = 0$ . Se lleva a cabo la integral de la ecuación (99) usando la formula:

$$\int \exp \left( -a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} * \dots$$

$$\left( \exp(2ab) \operatorname{erf} \left( ax + \frac{b}{x} \right) + \exp(-2ab) \operatorname{erf} \left( ax - \frac{b}{x} \right) \right) \dots (100)$$

En la fórmula anterior la función de error aparece, la cual es definida por:

$$\operatorname{erf}(x) = \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \dots \dots \dots (101)$$

Una fórmula de aproximación para la función de error es dada en el programa MOSIAS\_9. Después integrando de la ecuación (99) se obtiene:

$$c(x, t) = \frac{C_0}{2} \exp\left(\frac{x}{2\alpha_L}\right) * \left(\exp\left(\frac{-x\gamma}{2\alpha_L}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \frac{u\gamma}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_L u t}{R}}}\right) - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \exp\left(\frac{x\gamma}{2\alpha_L}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{x+u\gamma}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_L u t}{R}}}\right) \dots \dots \dots (102)\right.$$

con  $C_0 = \frac{M}{(w m n_e u)}$   $\gamma = \sqrt{\frac{(1+4 \lambda \alpha_L R)}{u}}$

y  $\operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \operatorname{erfc}(\xi)$  (función complementaria de error)

Las soluciones unidimensionales se pueden aplicar para los casos de campo si se observan las concentraciones medias sobre la profundidad  $m$  y un ancho  $w$  que contenga la distribución de contaminantes. Las situaciones de campo que se pueden describir directamente por las soluciones unidimensionales son mostradas en la figura 3.17. Otra área importante de aplicación de las soluciones unidimensionales son los experimentos de columna. Las condiciones iniciales de los límites difieren significativamente de las usadas después. La columna es aproximada por un acuífero semi-infinito con condiciones iniciales de límite.

$$\begin{aligned} c(0, y) &= 0 \text{ para } t < 0 \text{ y } c_0 \text{ para } t \geq 0 \\ c(\infty, t) &= 0 \text{ para todos los } t \\ c(x, 0) &= 0 \text{ para todos los } x > 0 \dots \dots \dots (103) \end{aligned}$$



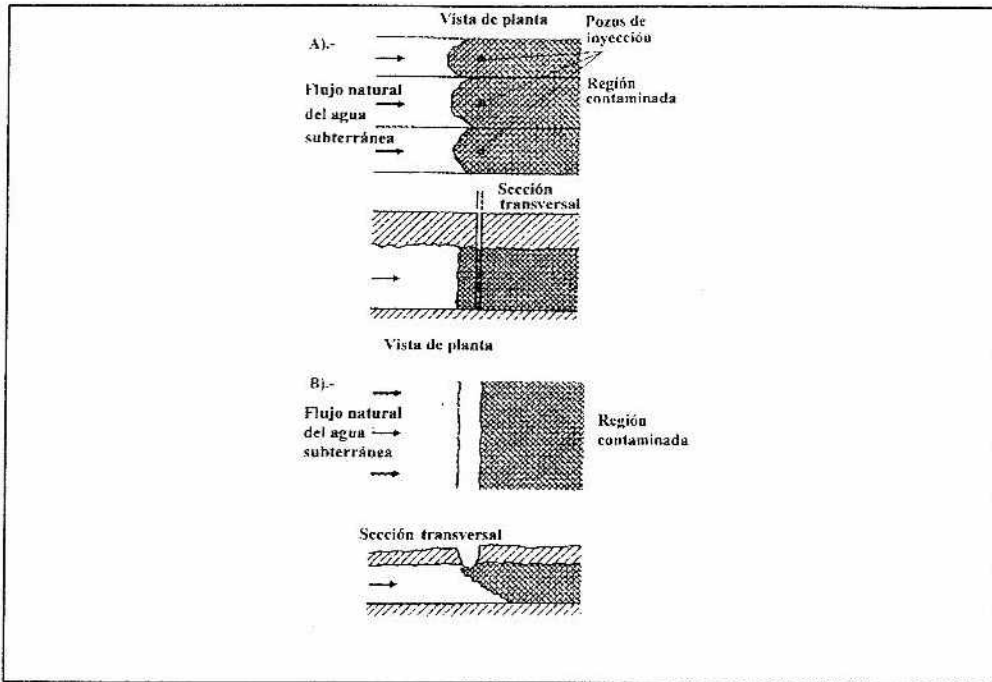


Figura 3.17. Casos de campo donde soluciones unidimensionales se pueden aplicar (Tomado de Kinzelbach, 1986).

La solución difiere de la ecuación (102) por un signo.

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \exp\left(\frac{x}{2\alpha_L}\right) * \left( \exp\left(\frac{-xy}{2\alpha_L}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \frac{uty}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_L ut}{R}}}\right) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \exp\left(\frac{xy}{2\alpha_L}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \frac{uty}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_L ut}{R}}}\right) \dots \dots \dots (104) \right.$$

Para un gran número de Peclet ( $Pe > 10$ ), definido por:

$$Pe = x / \alpha_L \dots \dots \dots (105)$$

las distribuciones de las ecuaciones (102) y (104) se pueden aproximar por:

$$c(x, y) = \frac{C_0}{2} \exp\left(\frac{x}{2\alpha_L} (1 - \gamma)\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \frac{ut\gamma}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_L ut}{R}}}\right) \dots\dots\dots (106)$$

Para un trazador ideal que no se absorba ( $R=1$ ) y no se descomponga ( $\lambda=0$ ) se da la siguiente fórmula:

$$c(x, t) = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{\alpha_L ut}}\right) \dots\dots\dots (107)$$

la función es mostrada en la figura 3.17.

En un caso bidimensional, por conveniencia el eje  $x$  es alineado con la dirección de la velocidad constante. La ecuación de transporte bajo condiciones idealizadas es entonces:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{D_L}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_T}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \gamma c \dots\dots\dots (108)$$

con  $D_L = \alpha_L u$  ,  $D_T = \alpha_T u$  ,  $u > 0$

El acuífero se asume que se extiende infinitamente en las direcciones  $x$  y  $y$ . Se ve otra vez el caso de una inyec-

ción instantánea de una masa trazadora  $\Delta M$  en un tiempo  $t = 0$ , este tiempo concentrado en  $(x=0, y=0)$ . Las condiciones iniciales y condiciones asintóticas de los límites correspondientes a la situación son:

$$\begin{aligned} c_s(x, y, 0) &= (\Delta M)/(n_e m R) \delta(x) \delta(y) \\ c_s(\pm\infty, \pm\infty, t) &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (109)$$

La solución (y la distribución inicial) debe cumplir la siguiente condición de normalización.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m n_e R c_y(x, y, t) dx dy = \Delta M \exp(-\lambda t) \quad \dots\dots\dots (110)$$

La solución bajo estas condiciones es la ecuación análoga bidimensional (96).

$$c_y(x, y, t) = \frac{\Delta M}{4\pi n_e m u \sqrt{\alpha_L \alpha_T} t} \exp\left(-\frac{x-ut}{R}\right)^2 - \frac{y^2}{\frac{4\alpha_L ut}{R} - \frac{4\alpha_T ut}{R}} \exp(-\lambda t) \quad (111)$$

Esta ecuación es la base para la interpretación de los experimentos con trazadores entre dos pozos muestra. Las distribuciones de concentración son ilustradas en la figura 3.18. La solución correspondiente para una inyección instan-

tánea en el lugar  $(\xi, \eta)$  en el tiempo  $t = \tau$  se obtiene, reemplazando  $x$  por  $x - \xi$ ,  $y$  por  $y - \eta$  y  $t$  por  $t - \tau$  en el lado derecho de la ecuación (111).

Como en un caso unidimensional, las soluciones para distribución de inyecciones y variaciones de tiempo se pueden construir por integrales de circunvolución. Primero se considera el caso de una fuente puntual permanente de tasa constante  $M$  iniciando en el tiempo  $t = 0$ . La solución se obtiene por la integración del tiempo desde  $t = 0$  al tiempo en que la distribución de concentración es deseada.

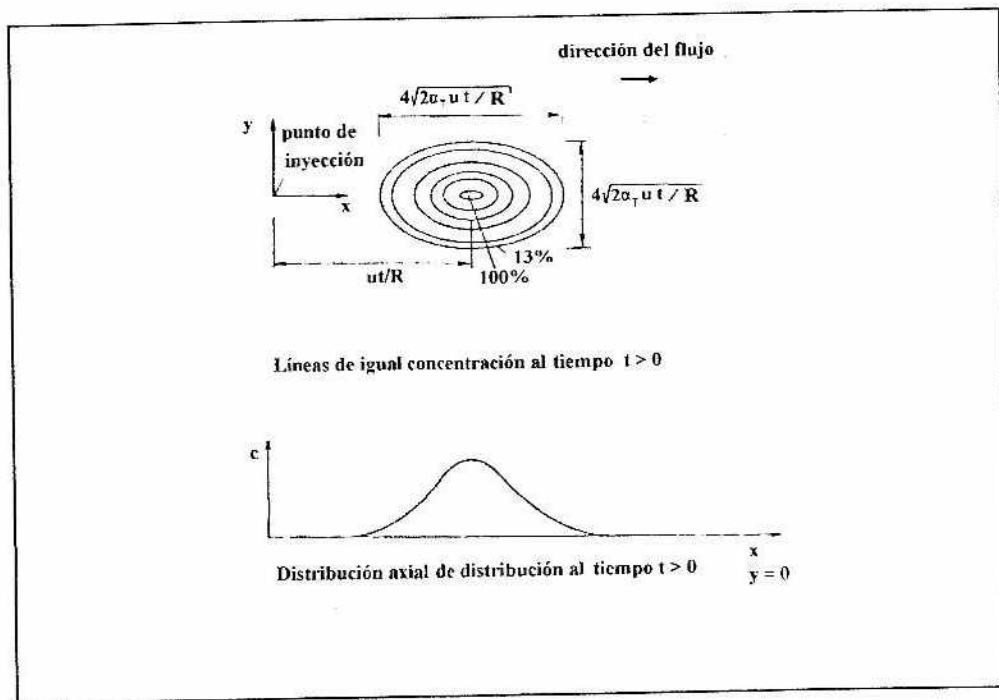


Figura 3.18.- Distribución de concentración bidimensional debido a una inyección instantánea (Tomado de Kinzelbach, 1986).

$$c(x, y, t) = \int_0^t \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{c_y(x, y, t-\tau)}{\Delta\tau} d\tau \dots\dots\dots (112)$$

$$= \frac{M}{4\pi n_e m u \sqrt{\alpha_L \alpha_T}} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \exp\left(-\frac{(x - \frac{u(t-\tau)}{R})^2}{4\alpha_L u(t-\tau)} - \frac{y^2}{4\alpha_T u(t-\tau)}\right) * \dots$$

$$\dots * \exp(-\lambda(t-\tau)) d\tau$$

$$= \frac{M}{4\pi n_e m u \sqrt{\alpha_L \alpha_T}} \int_0^{\frac{4\alpha_L u t}{Rr^2}} \frac{1}{\zeta} * \exp\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta}{4} \left(\frac{r}{2\alpha_L}\right)^2 \left(1 + \frac{4\lambda\alpha_L R}{u}\right)\right) d\zeta \exp\left(\frac{x}{2\alpha_L}\right)$$

$$\text{con } r^2 = x^2 + (\alpha_L/\alpha_T)y^2.$$

La integral llega a la función de Hantush, que es conocida desde la solución de la ecuación de flujo para el caso de un pozo perfecto en un acuífero semiconfinado.

$$W(a_1, a_2) = \int_0^{\frac{1}{a_1}} \frac{1}{\zeta} * \exp\left(-\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta}{4} a_2^2\right) d\zeta = \int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{\zeta} * \exp\left(-\zeta - \frac{a_2^2}{4\zeta}\right) d\zeta \quad . \quad (113)$$

La evaluación numérica de la integral es mostrada en el programa MOSIAS\_9. Insertando la ecuación (113) dentro de la ecuación (112), la distribución de concentración toma la forma de la siguiente ecuación:

$$c(x, y, t) = \frac{\bar{c}_0}{4\pi\sqrt{\alpha_L\alpha_T}} * \exp\left(\frac{x}{2\alpha_L}\right) * W\left(\frac{r^2R}{4\alpha_L ut} \quad \frac{r\lambda}{2\alpha_L}\right) \dots\dots\dots (114)$$

con  $\bar{c}_c = \frac{M}{(n_e \mu)}$  y  $\gamma = \sqrt{\left(1 + \frac{4\alpha_L\lambda R}{u}\right)}$

La función de Hantush se puede aproximar por formulación analítica, usando las técnicas de aproximación de Laplace.

$$W(a_1, a_2) = \sqrt{\frac{\pi}{2a_2}} * \exp(-a_2) \operatorname{erfc}\left(-\frac{a_2 - 2a_1}{2\sqrt{a_1}}\right) \dots\dots\dots (115)$$

Insertando este resultado dentro de la ecuación (114) se obtiene:

$$c(x, y, t) = \frac{\bar{c}_0}{4\sqrt{\pi\alpha_T}} * \exp\left(\frac{x - r\gamma}{2\alpha_L}\right) \frac{1}{\sqrt{r\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r - \frac{uty}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_L ut}{R}}}\right) \dots (116)$$

Esta aproximación da buenos resultados (90 por ciento de exactitud) para  $r/(2\alpha_L) > 1$  y muy buenos resultados (99 por ciento de exactitud) para  $r/(2\alpha_L) > 10$ .

La forma de la pluma es ilustrada en la figura 3.19. Para grandes valores de tiempo  $t$ , la pluma alcanza una forma asintótica, que es caracterizada por un equilibrio entre el transporte disperso lateral y transporte convectivo disperso longitudinal. La pluma asintótica está dada por:

$$c(x, y, \infty) = \frac{\bar{c}_0}{2\pi\sqrt{\alpha_L\alpha_T}} * \exp\left(\frac{x}{2\alpha_L}\right) K_0\left(\frac{r\gamma}{2\alpha_L}\right) \dots\dots\dots (117)$$

$$\approx \frac{\bar{c}_0}{2\sqrt{\pi\alpha_T}} \frac{1}{\sqrt{r\gamma}} * \exp\left(\frac{x-r\gamma}{2\alpha_L}\right)$$

donde  $K_0$  es la función modificada de Bessel de segunda clase. La aproximación dada en la segunda línea de la ecuación (117) es válida para  $r/(2\alpha_L) > 1$ . Esto corresponde a la aproximación de la ecuación (114) por la ecuación (116).

Observando en la figura 3.19. se puede ver que en la dirección axial las concentraciones declinan paso a paso cerca de la fuente. Esto es causado por la dilución debido a la dispersión lateral que es importante cerca de la fuente donde una gran gradiente de concentración prevalece. En el otro curso de la pluma, el ensanchamiento es lento abajo. Por comparación con el caso unidimensional, un ancho  $B$  de la pluma puede ser definida.

$$B = 2\sqrt{\alpha_T X \pi} \dots\dots\dots (118)$$

Esta fórmula muestra que el crecimiento relativo de ancho  $(dB/dx)/B$  se hace pequeño para un gran  $x$ .

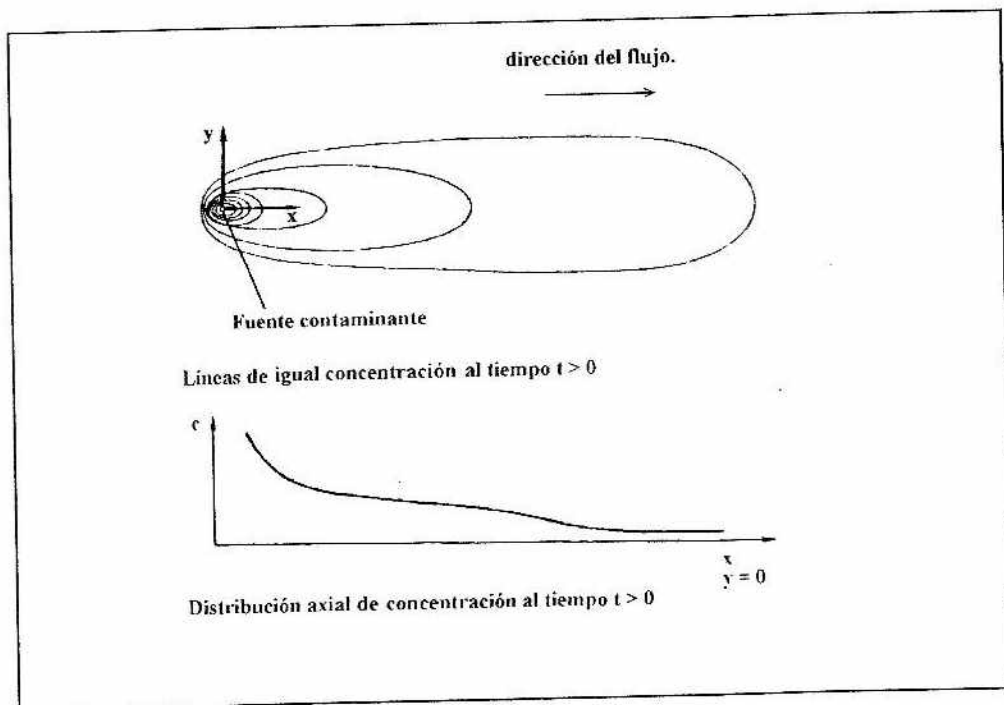


Figura 3.19. Distribución de concentración bidimensional debido a una inyección permanente (Tomado de Kinzelbach, 1986).

Se hace notar que la distribución de la ecuación (112) es singular en  $(x = 0, y = 0)$ . Además esto puede ser solo aplicado después de una distancia  $r_0$  que depende sobre las dimensiones reales de la fuente. Las distribuciones no singulares pueden ser determinadas por el uso de fuentes distribuidas. Como en el caso unidimensional se pueden superimponer soluciones del tipo de la ecuación (111), comparándolo-



las con la intensidad de la entrada de contaminante en una localización correspondiente.

$$c(x, y, t) = \int_{\xi=-\infty}^{\infty} \int_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=0}^t \frac{\mu(\xi, \eta, \tau)}{4 \pi n_g m u \sqrt{\alpha_L \alpha_T}} \frac{1}{(t-\tau)} * \dots$$

$$\dots \exp \left( - \frac{\left( x - \xi - \frac{u(t-\tau)}{R} \right)^2}{\frac{4 \alpha_L u(t-\tau)}{R}} - \frac{(y-\eta)^2}{\frac{4 \alpha_T u(t-\tau)}{R}} \right) d\xi d\eta d\tau \dots \quad (119)$$

donde  $\mu$  es la entrada de contaminante por unidad de área y unidad de tiempo. La distribución de concentración por una fuente permanente de que se propaga hacia afuera sobre una área rectangular de extensiones horizontales  $a_x$  y  $a_y$  se obtiene por la integración sobre el dominio rectangular (figura 3.20.) usando:

$$\mu(x, y, t) = \frac{M}{a_x a_y} \dots \dots \dots (120)$$

con una  $M$  constante para  $(x, y)$  dentro del rectángulo y  $t > 0$ . las integraciones espaciales son llevadas a cabo para dar:

$$c(x, y, t) = \frac{M}{4n_e m R a_x a_y} \int_0^t \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x - \frac{u(t-\tau)}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_T u(t-\tau)}{R}}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x - a_x - \frac{u(t-\tau)}{R}}{2\sqrt{\frac{\alpha_T u(t-\tau)}{R}}} \right) \right) * \left( \operatorname{erf} \left( \frac{y + \frac{a_y}{2}}{2\sqrt{\frac{\alpha_T u(t-\tau)}{R}}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y - \frac{a_y}{2}}{2\sqrt{\frac{\alpha_T u(t-\tau)}{R}}} \right) \right) \exp(-\lambda(t-\tau)) dt$$

(121)

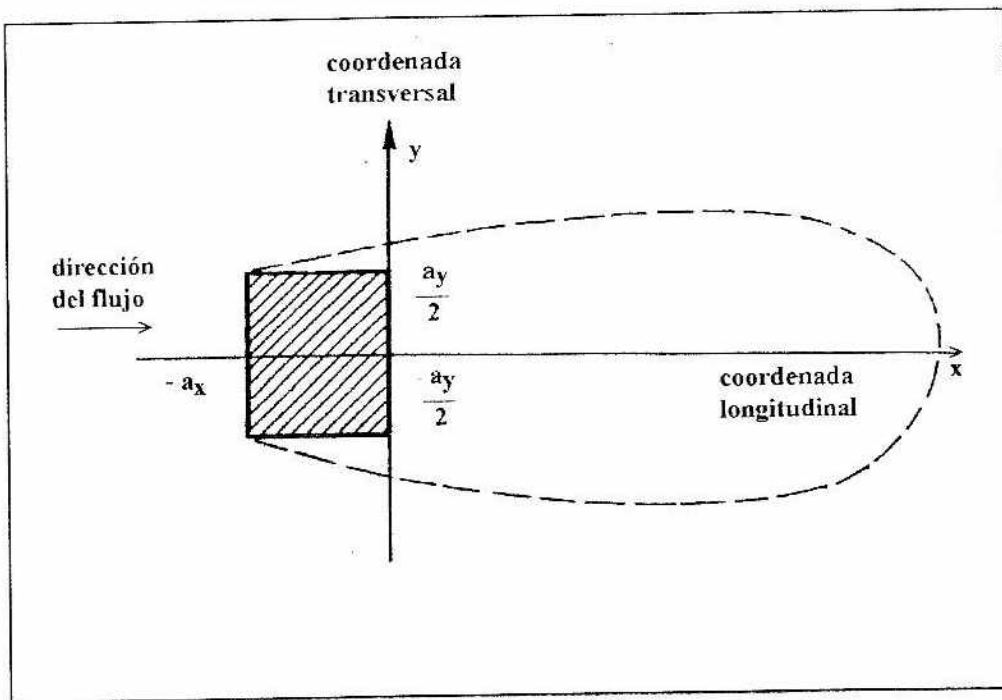


Figura 3.20. Fuente distribuida de contaminante en dos dimensiones (Tomado de Kinzelbach, 1986).

La integral remanente puede ser llevada a cabo numéricamente.

De todas las soluciones de inyecciones permanentes las soluciones correspondientes para el caso de una fuente descargando contaminantes con una tasa constante  $M$  desde un tiempo  $t = 0$  hasta  $t = t_1$  se pueden construir teniendo una inyección permanente de tasa negativa  $-M$  siguiendo una inyección permanente de tasa  $+M$  con un tiempo de retardo  $t_1$ .

$$c_{(0, t_1)}(x, y, t) = c(x, y, t) - \theta(t - t_1) c(x, y, t - t_1) \dots \dots (122)$$

donde  $\theta(t - t_1)$  es la función de intervalo

$$\theta(t - t_1) = 0 \text{ para } t < t_1 \text{ y } 1 \text{ para } t \geq t_1 \dots \dots (123)$$

Usando soluciones bidimensionales se puede conocer que la comparación con datos de campo en cualquier punto  $(x, y)$  son solo razonables si las concentraciones medias sobre la profundidad  $m$  del acuífero se conocen. Esto no es muchas veces el caso. Un contaminante es llevado dentro del acuífero por la zona no saturada y gradualmente dispersada hacia abajo debido a la dispersión vertical. Solo después de cierta distancia vertical procede la mezcla a un punto donde la distribución puede ser vista encima de una dirección  $z$  homogénea. Si se quiere comparar los datos de campo para pequeñas distancias desde la fuente con una solución analítica, se tiene que normalizar los valores medidos relacionándolos a la profundidad total. El perfil vertical de una distribución de contaminantes pueden ser exploradas retirando

muestras selectivamente de diferentes profundidades, por ejemplo muestras de varios niveles. Cuando se toman muestras, es importante conocer que la distancia hacia adelante desde la fuente se puede asumir una zona de mezcla sobre la profundidad total del acuífero. Esta distancia puede ser estimada por:

$$x_m = \frac{0.5 m^2 u}{D_z} \dots\dots\dots (124)$$

La utilidad de esta fórmula es sin embargo fuertemente reducida por el hecho de que no se conoce  $D_z$ .

La evaluación de trazadores en múltiples pozos usualmente usa la fórmula de la ecuación (111). Las soluciones unidimensionales y soluciones radiales se pueden también aplicar. Si los datos medidos de concentración  $c_1$  son disponibles en las localidades  $(x_j, y_j)$  y tiempos  $t_k$ , los parámetros de dispersión desconocidos como la velocidad del flujo, se pueden estimar en analogía completa.

Programa de distribución de contaminantes. El objetivo del presente programa es el cálculo de distribuciones de concentración uni y bidimensionales para inyecciones de contaminantes puntuales, instantáneas y permanentes, dentro de flujo constante paralelo. El listado del programa MOSIAS\_9 es presentado en el apéndice J.

Datos de entrada:

- Dimensionamiento del problema,  $DI$  (1 o 2)
- Tipo de inyección,  $TY\$,$  (instantánea M o permanente P)
  - Para inyección instantánea:
    - Masa de contaminante inyectada,  $MI$  en g
  - Para inyección permanente:
    - Fuente de la fuerza,  $MP$  en g/día
- Para soluciones uni o bidimensionales:
  - La fuente se asume estar localizada en el origen del sistema coordenado. La dirección del flujo se asume paralelo al eje  $x$  en la dirección  $x$  positiva.
- Velocidad del poro,  $u$  en m/día
- Factor de retardación,  $R$ , desde la adsorción de acuerdo a la adsorción lineal isoterma.
- Constante de decaimiento,  $LA$ , en 1/día
- Espesor saturado del acuífero,  $M$ , en m
- Porosidad efectiva,  $NE$
- Dispersión longitudinal,  $AL$ , en m
- Tiempo  $t$ , en d, y localización  $x$  en m, para que la concentración sea evaluada.
- Para distribuciones bidimensionales más datos son necesarios:
  - Dispersión transversal,  $AQ$ , en m
  - Coordenadas transversales  $y$ , en m, de localización para que la concentración sea evaluada.
- Para soluciones unidimensionales un acuífero de ancho de  $w=1$  m se asume.

Salida:

- Concentración,  $C$ , en el punto  $x$  o  $(x,y)$  y tiempo  $t$  en  $\text{mg/m}^3$

Descripción del programa:

- Datos de entrada. La entrada de  $t = 0$  conduce a la singularidad para todas las soluciones disponibles en este programa.
- Solución para inyección instantánea unidimensional.
- Solución para inyección permanente unidimensional. Esta solución usa la función complementaria de error dada en una subrutina.
- Solución para inyección instantánea bidimensional.
- Solución de inyección permanente bidimensional. Esta solución usa la función de Hantush dada en una subrutina.
- Salida de resultados
- Opción para calcular mas valores del mismo tipo de distribución con cambio en las coordenadas del espacio y tiempo o cambio de parámetros.
- La subrutina calcula la función complementaria del error.

Una fórmula de aproximación se usa:

$$\text{erfc}(x) = (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \exp(-x^2) + \epsilon(x)$$

Para  $x \geq 0$  con  $t = 1/(1+px)$ , los coeficientes son

$$p = 0.3275911, \quad a_1 = 0.254829592, \quad a_2 = -0.284496736,$$

$$a_3 = 1.421413741, \quad a_4 = -1.453152027, \quad a_5 = 1.061405429 \text{ y un}$$

$$\text{error } \epsilon(x) \leq 1.5 \cdot 10^{-7}$$

Para  $x < 0$  la identificación  $\text{erfc}(-x) = 2 - \text{erfc}(x)$  se

aplica.

- La subrutina calcula la función de Hantush, ejecutando la integración requerida (segunda línea en la ecuación (113) numéricamente usando la ley de Simpson. Después la integración de una variable de transformación es ejecutada.

$$\eta' = \log \eta, \quad d\eta/\eta = d\eta' \quad \text{La integración toma la forma}$$

$$\exp \left( - \exp (\eta') - a_2^2/4/\exp (\eta') \right) d\eta'$$

El intervalo de integración es entonces entre  $\log(a_1)$  e infinito. Por esto se llama integración logarítmica, el hecho es tomado dentro de la cuenta de la mayor contribución. En la integral se hace desde  $\eta$  valores cerca del límite inferior. La integral es detenida en el valor de 10 con contribuciones desde el valor de  $\eta$  tan grandes como  $\exp(10)$ .

## RESULTADOS

### MOSIAS\_1

#### Aplicación

El programa está aplicado a un ejemplo mostrado en Benítez (1972) que consiste en un grupo de datos obtenidos por de una prueba de bombeo con un gasto de  $Q = 0.008206$  m<sup>3</sup>/seg en un acuífero freático de 3.5 metros de espesor. Los datos de la prueba de bombeo, están dados en el Cuadro 4.1.

Cuadro 4.1. Datos de entrada de la prueba de bombeo para la aplicación del programa MOSIAS\_1 (Tomado de Benítez, 1972).

Distancia r (m)	Tiempo t (seg)	Abatimiento s (m)
15	388.80	0.02
15	483.84	0.04
15	552.96	0.05
15	648.00	0.06
15	864.00	0.08
15	1002.24	0.10
15	1209.60	0.12
15	1615.68	0.16
15	2160.00	0.20
15	2436.48	0.22
15	3240.00	0.26
15	5555.52	0.35
15	12139.20	0.48
15	21600.00	0.59
15	28512.00	0.64
15	43200.00	0.72
15	57024.00	0.77

Continúa...



Cuadro 4.1. ....Continuación

Distancia r (m)	Tiempo t (seg)	Abatimiento s (m)
15	71712.00	0.81
15	86400.00	0.84
15	129600.00	0.92
15	172800.00	0.98

Con los datos anteriores y con la ejecución del programa MOSIAS\_1 se obtienen los resultados mostrados en el Cuadro 4.2.

Cuadro 4.2. Resultados obtenidos por la ejecución del programa MOSIAS\_1.

Parámetro	Benítez (1972)	MOSIAS_1
Coefficiente de almacenamiento:	0.03200	0.03108
Permeabilidad (m/seg):	0.00102	0.00119
Transmisividad (m <sup>2</sup> /seg):	0.00355	0.00416

## MOSIAS\_2

Aplicación

Una prueba de bombeo se llevó a cabo en un pozo de 7.2 m de diámetro, situado en terreno granítico. La topografía es llana y no hay una barrera especial, tal como un dique cercano o una superficie de algún cuerpo de agua. El pozo se encuentra en un acuífero el cual está en una zona intensamente fracturada más allá de 12.5 metros de profundidad. El fondo del pozo es de roca compacta.

El pozo fue bombeado 0.1667 días (240 min) y la recuperación fue observada por un tiempo de 0.0333 días. La variación en la tasa de extracción es mostrada en el Cuadro 4.3. En el inicio de la prueba, el gasto fue de 340 m<sup>3</sup>/día y se redujo a 197 m<sup>3</sup>/día hacia el final del bombeo. La variación muy suave de la tasa de bombeo parece indicar que la reducción en la extracción es predominantemente debida al abatimiento progresivo y a la reducción gradual de la ejecución del bombeo, debido al decremento del nivel del agua.

Cuadro 4.3. Abatimientos calculados con la ejecución del programa MOSIAS\_2.

Intervalo	Tiempo (días)	Abatimiento Calculado (m)	Extracción (m <sup>3</sup> /día)
1	0.0083	0.0632	340.0
2	0.0167	0.1178	315.4
3	0.0250	0.1677	306.0
4	0.0333	0.2130	294.5
5	0.0417	0.2534	279.0
6	0.0500	0.2902	269.0
7	0.0583	0.3548	265.0
8	0.0667	0.3567	257.5
9	0.0750	0.3860	250.0
10	0.0833	0.4138	247.2
11	0.0917	0.4392	239.5
12	0.1000	0.4630	235.0
13	0.1083	0.4847	228.2
14	0.1167	0.5051	224.4
15	0.1250	0.5239	218.3
16	0.1333	0.5414	214.9
17	0.1417	0.5576	210.0
18	0.1500	0.5728	206.5
19	0.1583	0.5868	202.0
20	0.1667	0.5996	197.4
21	0.1750	0.5754	0.0
22	0.1833	0.5533	0.0
23	0.1917	0.5329	0.0
24	0.2000	0.5138	0.0
25	0.2083	0.5949	0.0

Al inicio de la prueba, una primera aproximación de los parámetros del acuífero fueron obtenidos usando el método analítico convencional. La curva tipo usada para el ajuste de los datos es mostrada en la figura 4.1. Los valores de transmisividad y coeficiente de almacenamiento fueron calculados respectivamente, del orden de  $167 \text{ m}^2 \text{ día}^{-1}$  y  $0.01$ . Las igualaciones observadas entre el abatimiento actual y la curva tipo es solo aparente y se tendría que cumplir el prerequisite de extracción constante.

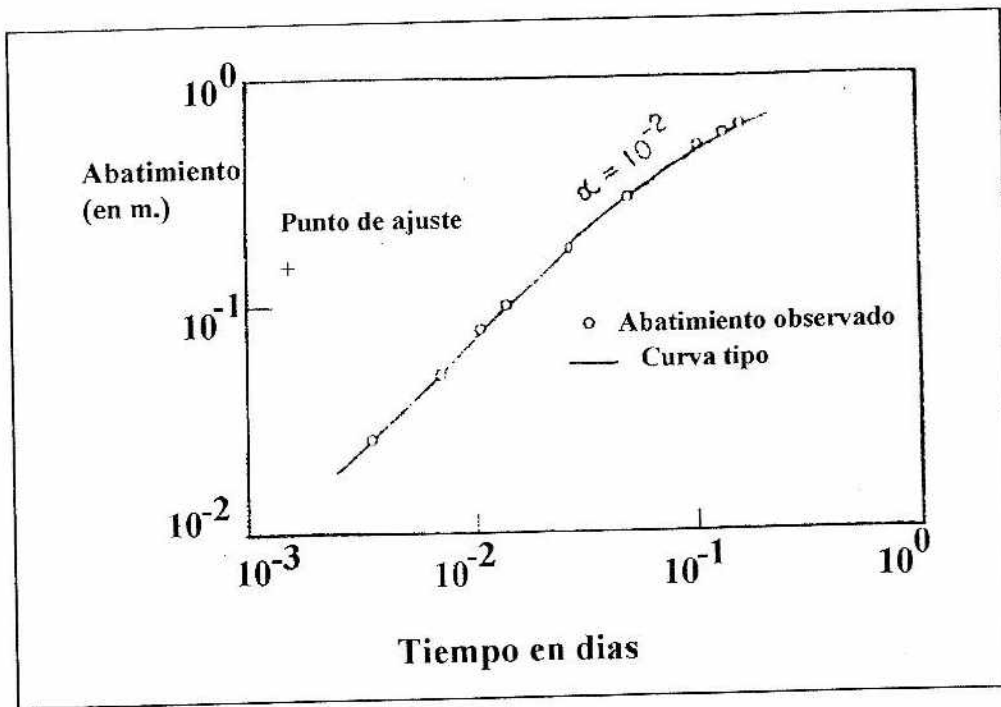


Figura 4.1. Curva tipo y gráfica de abatimientos observados (Tomado de Singh y Gupta, 1986).

En el proceso de modelación, el período total de bombeo fue dividido dentro de 20 intervalos de tiempo iguales a  $0.00833$  días de duración. La variación de los niveles del

agua en el pozo durante el bombeo y recuperación fueron calculados sustituyendo la estimación preliminar de T y S en la ecuación (7) y usando las ecuaciones (8) y (10). Aplicando el programa MOSIAS\_2, usado para cálculos numéricos, los valores de abatimiento calculados están dados en el Cuadro 4.3. La respuesta del acuífero durante las dos fases es presentada en la figura 4.2.

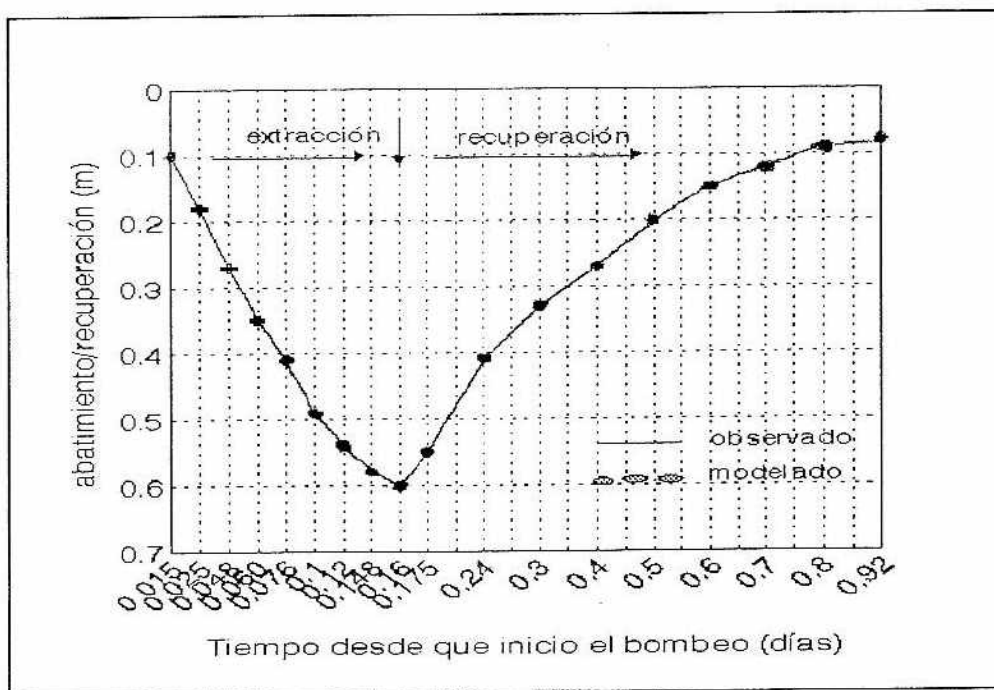


Figura 4.2. Curva de abatimiento y recuperación durante la prueba de bombeo.

MOSIAS\_3

### Aplicación

Un ejemplo simple, para una región rectangular, es mostrado en la figura 4.3. A lo largo del límite de la parte

de arriba, la carga dada es de 100 m. En la esquina inferior izquierda la carga es especificada como cero, todos los demás límites son impermeables. Una estimación inicial de todos los valores desconocidos son requeridos para resolver el problema. Para simplificar, todos se han asumido iguales a la media de los valores de los límites, esto es el de 50.

Dentro de la figura 4.3., la primer figura de izquierda a derecha muestra los datos iniciales. Por la examinación de estos valores se concluye que no satisfacen las condiciones de la ecuación (21). Sin embargo, se pueden corregir sucesivamente hasta que satisfagan la ecuación básica. En la parte central de la figura, el algoritmo de la ecuación (21) ha sido aplicado una vez a todos los nodos, iniciando en la esquina superior izquierda y redondeándolo hasta el próximo entero (figura del centro). Por supuesto, con correcciones subsecuentes en algunas partes, el acuerdo alcanza una corrección previa y los nuevos valores todavía no satisfacen a la ecuación (21). Los resultados muestran un progreso definitivo sobre los valores iniciales, después de un número de iteraciones en que cada uno de los valores es actualizado. La correcta solución es presentada en la parte derecha de la figura 4.3.

Los datos para la ejecución de este programa están localizados en el archivo MOSIAS\_3.DAT

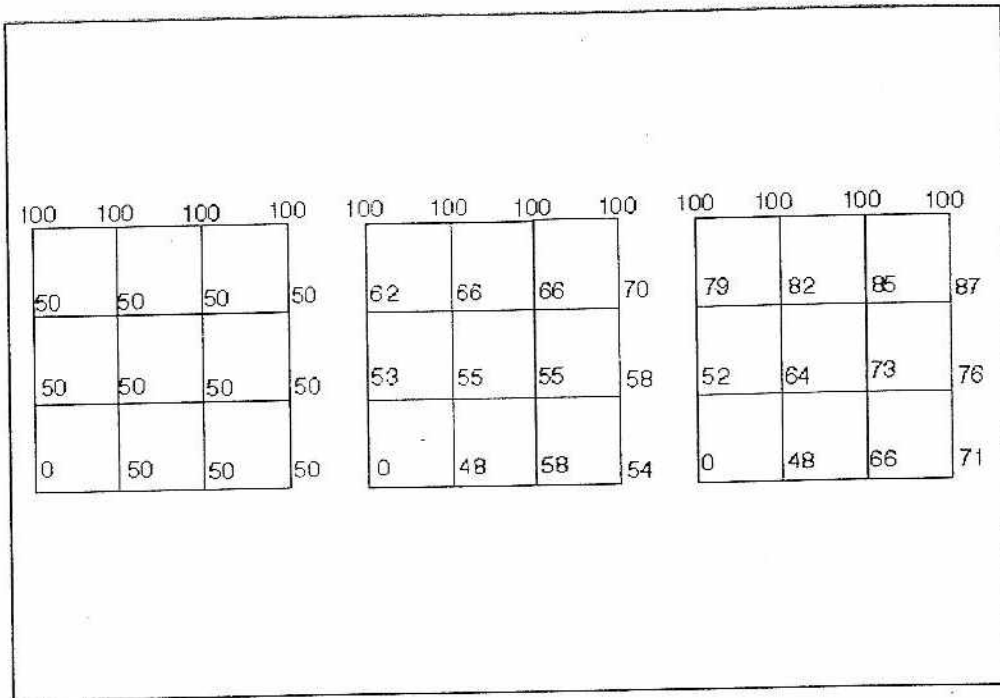


Figura 4.3. Ejemplo del método de diferencias finitas

MOSIAS\_4

### Aplicación

Se sugiere al lector que primero use el programa para resolver un problema simple tal como uno ilustrado en la figura 4.6. Este problema concierne a flujo uniforme desde la izquierda hacia la derecha. Las dimensiones horizontales y verticales de los elementos son iguales a 1. La carga del lado izquierdo es 10 m, mientras que la carga en el lado derecho es cero. La transmisividad es  $1 \text{ m}^2\text{seg}^{-1}$  en todos los elementos. Si el número de iteraciones es 50, y el factor de relajación es seleccionado como 1.5, los datos de entrada son, en orden en que ellos son requeridos:

Número de nodos = 6

Número de elementos = 4

Número de iteraciones = 50

Factor de relajación = 1.5

Nodo	1	2	3	4	5	6
Coordenada en x	0	0	1	1	2	2
Coordenada en y	0	1	0	1	0	1
¿se da la carga?	s	s	n	n	s	s
Carga	10	10			0	0
Reposición			0	0		
Elemento	1	2	3	4		
Nodo 1	1	2	3	4		
Nodo 2	2	3	4	5		
Nodo 3	3	4	5	6		
Transmisividad	1	1	1	1		

La lista anterior da las respuestas a las preguntas acerca de los datos de entrada usados por el programa. El usuario notará que después de entrar los datos, el programa indicará su progreso hasta la presentación de la lista de resultados. Debido a que el flujo en este caso es uniforme, el valor de la carga en los nodos 3 y 4 sería el 5. Cuando el programa se está ejecutando, estos valores son obtenidos.

El programa también imprime las descargas en los nodos. Esto representa la cantidad de agua que está pasando a través del sistema. La descarga total resulta ser 5, debido a que el gradiente hidráulico es 5, la transmisividad es 1

m<sup>2</sup>/día y la anchura es 1 m. En el Cuadro 4.4 se muestran los resultados de la ejecución del programa MOSIAS\_4.

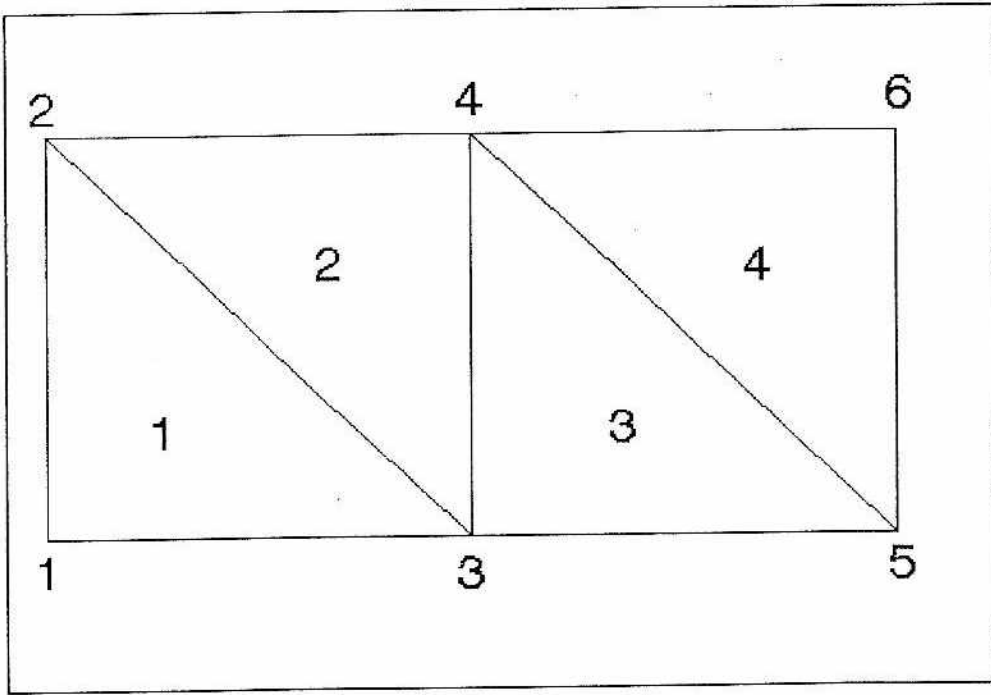


Figura 4.4. Problema elemental para resolver por el programa MOSIAS\_4.

Cuadro 4.4. Resultados obtenidos con la ejecución del programa MOSIAS\_4.

i	x	y	F	Q
1	0	0	10	2.5
2	1	1	10	2.5
3	0	0	5	0.0
4	1	1	5	0.0
5	0	0	0	-2.5
6	1	1	0	-2.5

Los datos de entrada para este programa se encuentran ubicados en el archivo MOSIAS\_4.DAT



## MOSIAS\_5

Aplicación

El programa MOSIAS\_5 contiene datos para un acuífero de  $1000 * 100$  m, con una infiltración uniforme de  $0.001$  m/d (figura 4.5). La transmisividad del acuífero es de  $100$  m<sup>2</sup>/d, la resistencia de la capa de arcilla es de  $10000$  días, y la carga en el fondo del acuífero (FA2 en el programa ) es cero. El lado izquierdo del límite ( $X=0$ ) es impermeable. En el lado derecho del límite ( $X = 1000$ ), la carga es cero. El programa usa 22 nodos y 10 elementos.

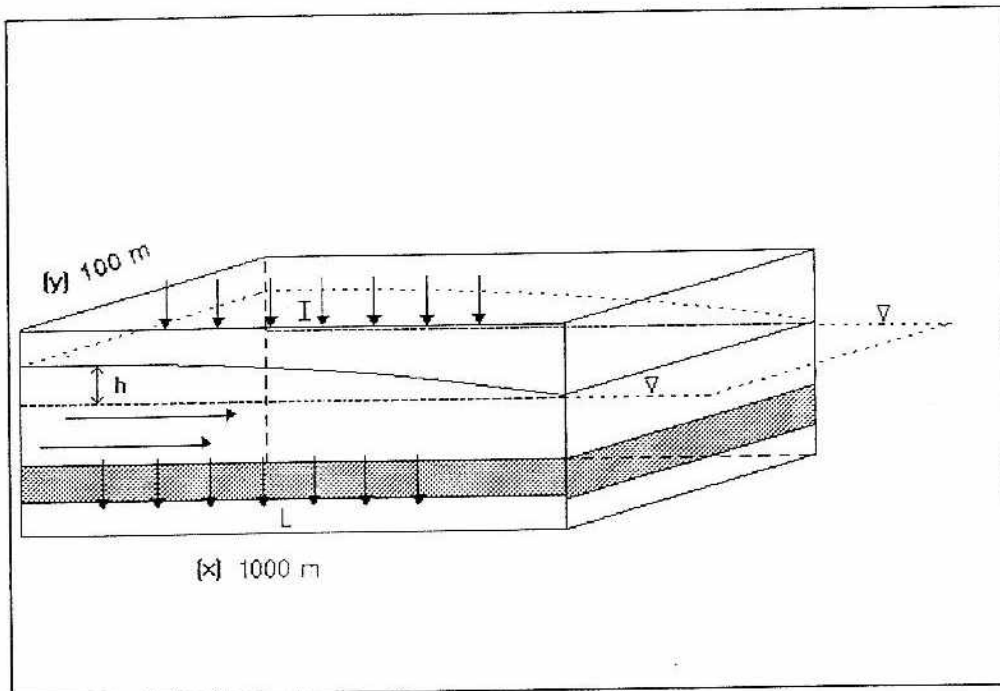


Figura 4.5. Problema resuelto con el programa MOSIAS\_5.

La solución obtenida por la ejecución del programa MOSIAS\_5 se encuentran en el Cuadro 4.5.

Cuadro 4.5. Resultados obtenidos con la ejecución del programa MOSIAS\_5

Coordenada en X	Coordenada en Y	Carga (F) calculada con MOSIAS_5
0	0	3.522
100	0	3.489
200	0	3.391
300	0	3.228
400	0	2.996
500	0	2.694
600	0	2.319
700	0	1.867
800	0	1.334
900	0	0.713
1000	0	0.000

Las soluciones corresponden a las alturas desde la horizontal del nivel del cuerpo de agua, hasta el nivel freático o superficie piezométrica y está denotado por  $h$  en la figura 4.5. Los datos de entrada para este programa se encuentran ubicados en el archivo MOSIAS\_5.DAT

MOSIAS\_6

### Aplicación

El programa puede ser ilustrado por la consideración del ejemplo de una región cuadrada de dimensiones de 100 m por 100 m teniendo una transmisividad  $T = 10 \text{ m}^2/\text{d}$ , un coeficiente de almacenamiento de  $S = 0.4$ , y una tasa de infiltración de  $0.001 \text{ m/d}$ . En este caso, el programa sugiere un

intervalo de tiempo de un día.

Una posible malla para este problema es mostrado en la figura 4.6. Los datos de entrada en este caso, son en el orden en que ellos han sido requeridos los siguientes:

Dimensión en la dirección x = 100  
Subdivisiones = 10  
Dimensión en la dirección y = 100  
Subdivisiones = 10  
Carga inicial = 0 m.  
Tasa de infiltración = 0.001 m/día  
Transmisividad =  $10 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$   
Coeficiente de almacenamiento = 0.4  
Intervalo de tiempo = 1 día  
Número de intervalos de tiempo = 100.

Aquí la carga inicial se ha asumido como cero y el número de intervalos de tiempo como 100. Los resultados para la carga en el centro (en metros) como una función del tiempo son mostrados en la figura 4.6., el programa también tiene la opción para mostrar la carga en todos los nodos. Los datos de entrada para este programa se encuentran ubicados en el archivo MOSIAS\_6.DAT

Una verificación de resultados es que en el inicio del proceso el nivel del agua se incrementa linealmente con el tiempo, excepto cerca del límite, otorgado por la fórmula

$\approx It/S$ . Esta es la solución en la ausencia de drenaje hacia los límites. Se puede esperar que en el inicio, la carga cerca y en el centro pueden incrementarse de acuerdo a esta fórmula, debido a que el drenaje no ha afectado la región.

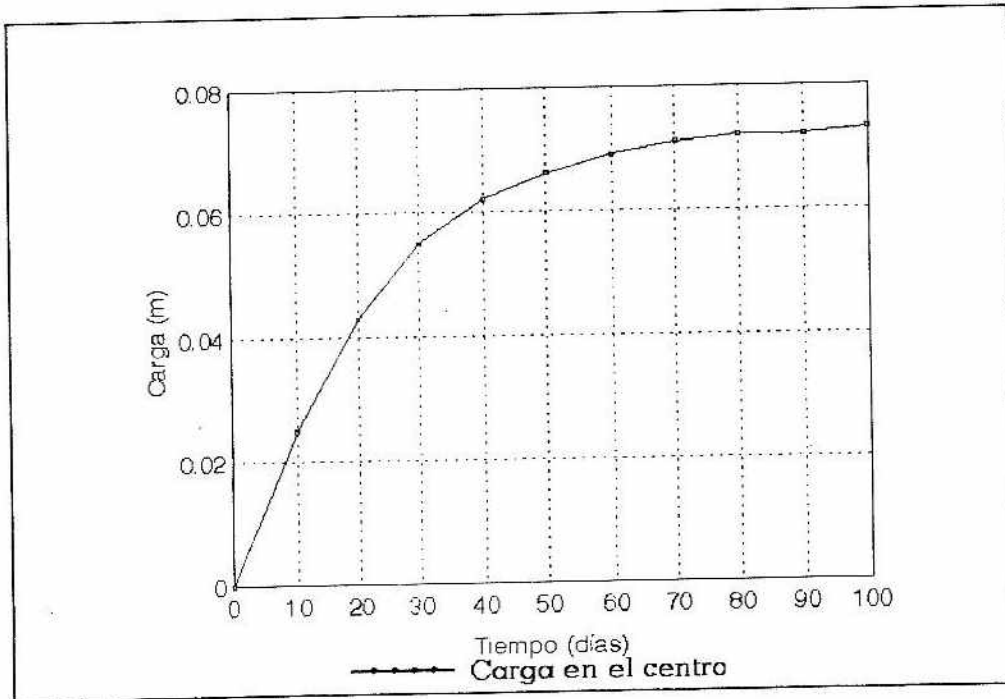


Figura 4.6. Ejemplo de resultados obtenidos por el programa MOSIAS\_6.

MOSIAS\_7

### Aplicación

El programa MOSIAS\_7 contiene datos para un problema similar al ilustrado en la figura 4.5., excepto de que no hay percolación, y que el flujo es inestable. Ello asume que en el tiempo  $t = 0$ , inicia la infiltración uniforme sobre el

área entera del acuífero con una tasa constante de  $I = 0.001$  m/día, y que la carga inicial es cero. El coeficiente de almacenamiento  $S = 0.4$ . La transmisividad  $T = 1000$  m<sup>2</sup>/día.

Los resultados de la ejecución del programa MOSIAS\_7 usando los datos localizados en el archivo MOSIAS\_7.DAT se encuentran en el Cuadro 4.6.

Cuadro 4.6. Resultados obtenidos por la ejecución del programa MOSIAS\_7.

X	Y	F
0	0	0.222
0	100	0.222
100	0	0.221
100	100	0.221
200	0	0.217
200	100	0.217
300	0	0.210
300	100	0.210
400	0	0.199
400	100	0.199
500	0	0.184
500	100	0.184
600	0	0.164
600	100	0.164
700	0	0.136
700	100	0.136
800	0	0.099
800	100	0.099
900	0	0.053
900	100	0.053
1000	0	0.000
1000	100	0.000

Tiempo =100 días

## MOSIAS\_8

Aplicación

El programa MOSIAS\_8, es aplicable al problema de conos invertidos de agua salada, debido a una línea de abatimiento, extrayendo agua fresca en un punto arriba de una interfase originalmente horizontal en un acuífero homogéneo y de espesor constante. Para la aplicación del programa MOSIAS\_8 se utilizaron los siguientes datos de entrada, que se encuentran localizados en el archivo MOSIAS\_8.DAT, y dando como resultado la figura 4.7.

Datos de entrada para la ejecución del programa MOSIAS\_8.

Longitud del acuífero (m) = 1000

Espesor del acuífero (m) = 100

Nivel de interfase (m) = 20

Nivel del pozo (m) = 40

Elementos horizontales = 5

Elementos verticales = 5

Densidad del agua fresca  $\text{gr/cm}^3 = 1.0$

Densidad del agua salada  $\text{gr/cm}^3 = 1.025$

Permeabilidad / viscosidad (cm/hr) = 1.00

Almacenamiento = 0.4

Descarga del pozo  $\text{m}^3/\text{d} = 10$

Sugerencia para el intervalo de tiempo = 6.031

Intervalo de tiempo = 6

Número de intervalos de tiempo = 10

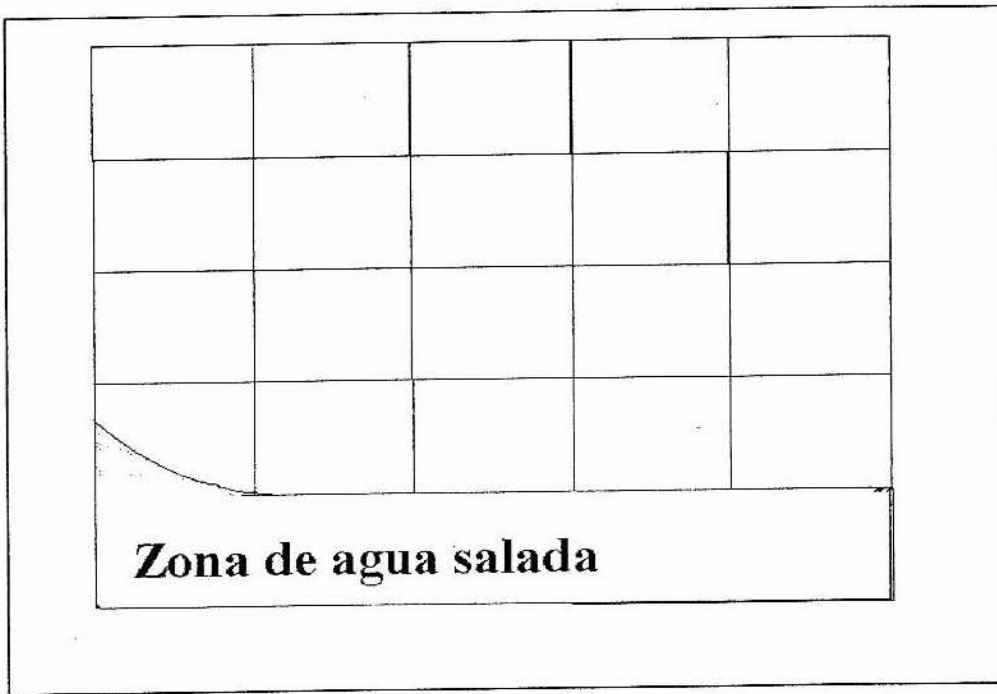


Figura 4.7. Resultados obtenidos con la ejecución del programa MOSIAS\_8.

MOSIAS\_9

### Aplicación

Una importante aplicación del modelo de transporte de contaminantes es el de conocer la distribución de éstos en un determinado tiempo en alguna localización. Para la ejecución de este programa se tiene el siguiente ejemplo:

Una inyección instantánea de 200 kg de un trazador ideal con un factor de retardación  $R = 1$  y una constante de

decaimiento  $\lambda = 0$  en  $X = 0$ ,  $Y = 0$  de un acuífero. El acuífero se asume homogéneo, esto es caracterizado por los siguientes datos: espesor saturado  $M$  del acuífero = 10 m, porosidad efectiva  $NE = 0.1$ , dispersión longitudinal  $AL = 4.5$  m, dispersión transversal  $AQ = 1.125$  m. El flujo es paralelo con una velocidad del poro  $u = 1$  m/d. Se necesita calcular la concentración en un tiempo  $t = 120$  d. El programa da como resultados los mostrados en el Cuadro 4.7.

Cuadro 4.7. Resultados de la aplicación del programa MOSIAS\_9.

$x(m) \rightarrow$	80	90	120	150	160
$y(m) \downarrow$					
0	28.1	38.9	58.9	38.9	28.1
10	23.4	32.3	49.0	32.3	23.4
20	13.4	18.5	28.1	18.5	13.4



## DISCUSION.

Los modelos son una muy buena herramienta en la simulación de aspectos del agua subterránea, ya que usandolos se pueden probar varios esquemas de manejo, y predecir los efectos de ciertas acciones sin tener que llevarlo a la práctica, en base a estos resultados se puede seleccionar el mejor manejo, sin tener que hacer otra cosa más que cambiar los datos de entrada al modelo, pero siempre teniendo en cuenta, la aplicabilidad del modelo a la situación estudiada, debido a que una situación real o de campo es demasiado compleja para ser simulada exactamente. La confiabilidad de las predicciones de un modelo, depende de que tan bien el modelo se aproxime a la situación de campo. Inevitablemente para la formulación de los modelos, se tienen que hacer asunciones para poder simplificarlos. En otras palabras, si un modelo es aplicado a un problema para el cual no fue diseñado, se tendrá que el modelo arrojará resultados fuera de la realidad, por los que algunos modelos son muy restrictivos. Cuando de los modelos se obtienen programas para computadora, hay que tener cuidado con las asunciones hechas para hacer el programa, datos de entrada, disponibilidad de éstos y limitantes.

## CONCLUSIONES.

Los programas de simulación presentados aquí, constituyen una herramienta para el estudio de los aspectos relacionados con el agua subterránea, debido a que se economiza tiempo al probar varios esquemas de manejo en alguna de las situaciones estudiadas, lo que implica una gran ayuda en la toma de decisiones y estimación de datos. Hay que tomar en cuenta que los datos obtenidos por los programas, no son exactamente iguales a los reales, debido a que los programas usan asunciones, las cuales hacen que el programa sea más sencillo y a la vez menos exacto, esto quiere decir que entre más asunciones tenga un programa, menos exacto será. Un factor limitante en el uso de estos programas, son los datos de entrada, disponibilidad y confiabilidad en ellos. También hay que hacer notar que cada programa se utiliza en una sola clase restringida de casos, si los programas se aplican en otra situación, arrojará datos incorrectos o fuera de la realidad. Los modelos en general, para sus asunciones, trabajan con condiciones de homogeneidad e isotropía, lo que en situaciones reales son difíciles de encontrar, sin embargo, los programas pueden dar una idea sobre la situación de algún sistema. Con lo anteriormente presentado, se puede concluir que los objetivos de este trabajo se llevaron a cabo en su totalidad.

## RESUMEN.

En muchos lugares, el agua subterránea constituye la única fuente de abastecimiento, teniendo muy diversos usos, como el agrícola, industrial o urbano. Como resultado de lo anterior se tiene que en algunos lugares, los acuíferos son sobreexplotados, originando abatimientos considerables de los niveles del agua subterránea.

Para el estudio del comportamiento del agua subterránea, intrusión de agua salada, determinación de parámetros del acuífero, movimiento de contaminantes, entre otros, se utilizan modelos, ya sean analógicos, analíticos o matemáticos, los cuales están o se pueden codificar a un lenguaje de programación.

Los objetivos del presente trabajo están orientados básicamente en la recopilación de programas de modelos de simulación del agua subterránea, y conjuntarlos en un solo paquete, así como dar la descripción teórica de cada modelo y programa seleccionado. Lo anterior es para tener una herramienta de ayuda en el procesamiento de la información del agua subterránea.

Los modelos de simulación seleccionados, son en general referentes a la determinación de parámetros del acuífero, flujo estable y no estable del agua subterránea, intrusión de agua de mar y movimiento de contaminantes.

Los resultados obtenidos por los programas en general muestran un significativo ahorro de tiempo en el procesamiento de los datos, además de dar la facilidad de poder combinar datos de entrada y evaluar su respuesta.

Con los modelos anteriores, se tiene una gran ayuda en el procesamiento de la información, sin embargo, hay que tener en cuenta que se deben de introducir valores reales y de acuerdo al modelo seleccionado. También no hay que olvidar que los modelos están hechos para situaciones específicas, así como de las asunciones de los modelos.

## LITERATURA CITADA.

- Alam M. M. and M. A. Bhuiyan. 1995. Collocation Finite-Element Simulation of Dam-Break Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*. 121(2): 118-128. United States of America.
- Arnold J. G., P. M. Allen and G. Bernhardt 1993. A Comprehensive Surface-Groundwater Flow Model. *Journal of Hydrology*. 142:47-69. United States of America.
- Aziz A. R. and K. V. Wong. 1992. A Neural-Network Approach to the Determination of Aquifer Parameters. *Ground Water*. 30(2): 164-166. United States of America.
- Bear J. and A. Verruijt. 1987. *Modeling Groundwater Flow and Pollution*. Ed. Reidel Publishers Company. The Netherlands. 409 p.
- Benítez A. 1972. *Captación de Aguas Subterráneas*. Ed. Dossat S. A. 2 ed. España. 619 p.
- Cleveland T. G., R. Bravo. and J. R. Rogers. 1992. Storage Coefficients and Vertical Hydraulic Conductivities in Aquitards Using Extensometer and Hydrograph Data. *Ground Water*. 30(5): 701-708. United States of America.
- Custodio E. y M. R. Llamas. 1983. *Hidrología Subterránea*. 2 ed. Ed. Omega S.A. España. Tomo I p. 1313-1387, 1572-1665
- Davis S. N. y R. J. M De Wiest. 1971. *Hidrogeología*. Ed. Ariel. España. 563 p.
- De Wiest R. J. M. 1965. *Geohydrology*. Ed. John Wiley & Sons, Inc. United States of America. 366 p.
- Domenico P. A. 1972. *Concepts and Models in Groundwater Hydrology*. Ed. McGraw-Hill. United States of America. 405 p.
- García R. P. G. 1982. *Diccionario Enciclopédico Larousse Ilustrado*. Tomo III. Ed. Larousse. México. p. 914.
- Gottardi G. and M. Venutelli. 1994. One-Dimensional Moving Finite-Element Model of Solute Transport. *Ground Water*. 32(4): 645-649. United States of America.

- Green D. W., H. Dabiri., C. F. Weinaug. and R. Prill. 1970. Numerical Modeling of Unsaturated Groundwater Flow and Comparison of the Model to a Field Experiment. Water Resources Research. 6(3): 862-874. United States of America.
- Hanks J. and J. T. Ritchie. 1991. Modeling Plant and Soil Systems. Agronomy; no. 31. United States of America. p. 1-5
- Johansson P. 1986. Diurnal Groundwater Level Fluctuations in Sandy Till - A Model Analysis. Journal of Hydrology, 87: 125-134. United States of America.
- Johns R. A., L. Semprini. and P. V. Roberts. 1992. Estimating Aquifer Properties by Nonlinear Least-Squares Analysis of Pump Test Response. Ground Water. 30(1): 68-77. United States of America.
- Keigth T. D. 1973. Hidrología. (Agua Subterránea) Ed. Paraninfo. España p. 25-92
- Kinzelbach W. 1986. Groundwater Modelling an Introduction With Sample Programs in Basic. Ed. Elsevier Science Publishers. The Netherlands. 334 p.
- Krusemann G. P. y N. A. de Ridder. 1975. Análisis y Evaluación de los Datos de Ensayos por Bombeo. Holanda. 212 p.
- Ledoux E., S. Sauvagnac. and A. Rivera. 1990. A Compatible Single-Phase/Two-Phase Numerical Model: 1. Modeling the Transient Salt-Water/Fresh-Water Interface Motion. Ground Water. 28(1): 79-87. United States of America.
- Linsley R. K. Jr., M. Kohler. and J. L. H. Paulus. 1949. Applied Hydrology. Ed. McGraw-Hill. United States of America. 680 p.
- Merrit M. L. 1993. Aspects of Numerical and Representational Methods Related to the Finite-Difference Simulation of Advective and Dispersive Transport of Freshwater in a Thin Brackish Aquifer. Journal of Hydrology, 148: 61-92. United States of America.
- Motz L. H. 1992. Salt-Water Upconing in an Aquifer Overlain by a Leaky Confining Bed. Ground Water. 30(2): 192-198. United States of America.
- Olsthoorn T. N. 1995. Effective Parameter Optimization for Ground-Water Model Calibration. Ground Water. 33(1): 42-48. United States of America.
- Price M. 1985. Introducing Grounwater. Ed. George Hilen and Unain. England. p. 126-152

- Rathod K. S. and K. R. Rushton. 1991. Interpretation of Pumping from Two-Zone Layered Aquifers Using a Numerical Model. *Ground Water*. 29(4): 499-509. United States of America.
- Robson S. G. and E. R. Banta. 1990. Determination of Specific Storage by Measurement of Aquifer Compression Near a Pumping Well. *Ground Water*. 28(6): 868-874. United States of America.
- Sen Z. 1984. Adaptive Pumping Test Analysis. *Journal of Hydrology*, 74: 259-269. United States of America.
- Singh V. S. and C. P. Gupta. 1986. Hydrogeological Parameters Estimation From Pump Test on a Large Diameter Well. *Journal of Hydrology*, 87: 223-232. United States of America.
- Sinha J., V. Eswaram. and M. Bhallamudi. 1995. Comparison of Spectral and Finite-Difference Methods for Flood Routing. *Journal of Hydraulic Engineering*. 121(2): 108-117. United States of America.
- Sridharan K., M. Ramaswamy. and N. S. R. Lakshmana. 1987. Identification of Parameters in Semiconfined Aquifers. *Journal of Hydrology*, 93: 163-173. United States of America.
- Szekely F. 1990. Drawdown Around a Well in a Heterogeneous Leaky Aquifer System. *Journal of Hydrology*. 118: 247-256. United States of America.
- Tarshish M. 1992. Combined Mathematical Model of Flow in an Aquifer-Horizontal Well System. *Ground Water*. 30(6): 931-935. United States of America.
- 1993. Combined Mathematical Model of Flow in an Aquifer-Vertical Well System. *Ground Water*. 31(4): 545-550. United States of America.
- Tsang C. 1991. The Modeling Process and Model Validation. *Ground Water*. 29(6): 825-831. United States of America.
- Udoyara S. T. and Mostaghimi S. 1991. Model for Predicting Virus Movement Through Soils. *Ground Water*. 29(2): 251-259. United States of America.
- Valocchi A. J. 1990. Numerical Simulation of the Transport of Adsorbing Solutes in Heterogeneous Aquifers. En: Gambolati G., A. Rinaldo., C. A. Brebbia, W. G. Gray. and G. F. Pinder (Ed.). *Computational Methods in Subsurface Hydrology*. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Alemania. p. 373-383

- Vogt M. and B. Herrling. 1990. Simulation of Coupled Geochemical and Transport Processes of an Infiltration Passage. Introducing a Vectorized Multicomponent Transport-Reaction Model. En: Gambolati G., A. Rinaldo., C. A. Brebbia, W. G. Gray. and G. F. Pinder (Ed.). Computational Methods in Subsurface Hydrology. Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Alemania. p. 399-405
- Walton W. C. 1970. Groundwater Resource Evaluation. Ed. McGraw-Hill. United States of America. 664 p.
- 1979. Progress in Analytical Groundwater Modeling. Journal of Hydrology. 43: 149-159. United States of America.
- Wang H. F. and M. P. Anderson. 1982. Introduction to Groundwater Modeling Finite Difference and Finite Element Methods. Ed. W. H. Freeman and Company. United States of America. 237 p.
- Yeh T.-C. J., R. Srivastava., A. Guzman. and T. Harter. 1993. A Numerical Model for Water Flow and Chemical Transport in Variably Saturated Porous Media. Ground Water. 31(4): 634-644. United States of America.



A P E N D I C E S .

## A P E N D I C E A

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS

```

color 14,1
$include "c:\mosias\distivo\test1.bas"
color 14,1
pr$ = " UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO"
k = 37-(len(pr$)/2): locate 5,k: print pr$
pr$ = " DEPARTAMENTO DE RIEGO Y DRENAJE"
k = 37-(len(pr$)/2): locate 7,k: print pr$
pr$ = " PROGRAMA DE GRADUADOS"
k = 37-(len(pr$)/2): locate 9,k: print pr$
pr$ = " **PROGRAMA PRINCIPAL DEL PAQUETE MOSIAS** "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 11,k: print pr$
pr$ = " **(Modelos de Simulación del Agua Subterránea)** "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 13,k: print pr$
pr$ = "EDITADO POR: "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 15,k: print pr$
pr$ = "Ing. Luis Samaniego Moreno. "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 17,k: print pr$
pr$ = "M.C. Javier de Jesús Cortés Bracho. "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 18,k: print pr$
pr$ = "Dr. Salvador Muñoz Castro. "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 19,k: print pr$
pr$ = "M.C. Luis Edmundo Ramírez Ramos. "
k = 37-(len(pr$)/2): locate 20,k: print pr$
pr$ = "Maestría en Riego y Drenaje"
k = 37-(len(pr$)/2): locate 22,k: print pr$
100 if inkey$ = "" then 100
110 cls:clear
color 14,1:CLS
$include "c:\mosias\distivo\test1.bas"
color 14,1
locate 3,5 : print "El conjunto MOSIAS esta integrado por los siguientes programas:"
locate 5,5 :print "1.-MOSIAS_1: - Estimación de parámetros geohidrológicos"
locate 6,5 :print "2.-MOSIAS_2: - Determinación de abatimientos en un pozo e bombeo"
locate 7,5 :print "3.-MOSIAS_3: - Flujo estable, método de diferencias finitas."
locate 8,5 :print "4.-MOSIAS_4: - Flujo estable, método del elemento finito, ele-
locate 9,5 :print "          mentos triangulares."
locate 10,5 :print "5.-MOSIAS_5: - Flujo estable con infiltración y percolación,"
locate 11,5 :print "          método del elemento finito"
locate 12,5 :print "6.-MOSIAS_6: - Flujo no estable, método de diferencias finitas,"
locate 13,5 :print "          método explícito."
locate 14,5 :print "7.-MOSIAS_7: - Flujo no estable, método del elemento finito,"
locate 15,5 :print "          elementos cuadrangulares."
locate 16,5 :print "8.-MOSIAS_8: - Flujo no estable en un plano vertical, interfase"
locate 17,5 :print "          aguda entre agua salada y dulce (Upconing) cono"
locate 18,5 :print "          invertido debido a un solo pozo método del"
locate 19,5 :print "          elemento finito."
locate 20,5 :print "9.-MOSIAS_9: - Cálculo de distribución de concentración de conta-
locate 21,5 :print "          minantes, en una y dos dimensiones"
locate 22,5 :print "Número de programa a ejecutar (1,...,9) (F) para finalizar";
input " ";re1$
if re1$ = "1" then gosub 120
if re1$ = "2" then gosub 125
if re1$ = "3" then gosub 130
if re1$ = "4" then gosub 135
if re1$ = "5" then gosub 140

```

```
if rel$ = "6" then gosub 145
if rel$ = "7" then gosub 150
if rel$ = "8" then gosub 155
if rel$ = "9" then gosub 160
if rel$ = "F" or rel$ = "f" then color 7,0:cls:end
goto 110
cls: end
120 $include "c:\mosias\mosias01\pres_01.bas"
return
125 $include "c:\mosias\mosias02\pres_02.bas"
return
$segment
130 $include "c:\mosias\mosias03\pres_03.bas"
return
135 $include "c:\mosias\mosias04\pres_04.bas"
return
$segment
140 $include "c:\mosias\mosias05\pres_05.bas"
return
145 $include "c:\mosias\mosias06\pres_06.bas"
return
$segment
150 $include "c:\mosias\mosias07\pres_07.bas"
return
155 $include "c:\mosias\mosias08\pres_08.bas"
return
$segment
160 $include "c:\mosias\mosias09\pres_09.bas"
return
```

## A P E N D I C E B

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_1

```

COLOR 14,1
CLS: KEY OFF
NP = 2
cri$ = "#####.#####"
$include "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
COLOR 14,1
OPEN "I",1,A$
INPUT #1,nm,q,im
210 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas"
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16:print "      ": goto 210
cls
if ww1 = 1 then open "scrn:" for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1:" for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 275
$include "c:\mosias\distivo\test2.bas"
color 14,1
locate 09,30:print #2, "DATOS INICIALES"
locate 12,15:PRINT #2, "NUMERO DE GRUPOS DE DATOS      ";USING cri$;nm
locate 14,15:PRINT #2, "GASTO DE BOMBEO (M^3/seg)      ";using cri$;Q
locate 16,15:PRINT #2, "MAXIMO NUMERO DE ITERACIONES      ";IH
DIM R(NM), S(NM), T(NM), A(NP,NP), PA(NP), P(NP), B(NP), FF(NP),DP(NP)
REM INCREMENTOS DE PARAMETROS PARA EL CALCULO DEL GRADIENTE DEL VECTOR
215 DP(1) = 0.001: DP(2) = 0.0001
LOCATE 19,35:PRINT "oprma <enter> para continuar"
220 IF INKEY$ = "" THEN 220
CLS: KEY OFF: PRINT "ENTRADA DE MEDICIONES"
FOR I = 1 TO NM
INPUT #1,r(i),t(i),s(i)
NEXT i
CLOSE 1
$include "c:\mosias\distivo\test2.bas"
color 14,1
locate 9,16: PRINT "ENTRADA DE VALORES DE ENTRADA DE PARAMETROS"
225 locate 13,15:PRINT " ESCOJA LA FORMULA DEL POZO"
locate 15,15:PRINT " 1 LA FORMULA DE THEIS (AC. CONFINADO)"
locate 17,15:PRINT " 2 CORRECCION FREATICA DE THEIS (AC. LIBRE)"
locate 19,50:INPUT "ELECCION      ":" ;II
PRINT: PRINT
IF II < 1 OR II > 2 THEN GOTO 225
ON II GOSUB 255,260
IT = 0
230 FOR J = 1 TO NP
B(J) = 0
FOR M = 1 TO NP
A(J,M) = 0
NEXT M,J
IT = IT + 1
FOR I = 1 TO NM
REM CALCULO DEL VECTOR GRADIENTE
GOSUB 245
S1 = FU
FOR M = 1 TO NP
P1 = PA(M)
PA(M) = P1 + DP(M)
GOSUB 245

```

```

FF(M) = (FU - S1) / DP(M)
PA(H) = P1
NEXT H
REM CONSTRUCCION DE LAS ECUACIONES NORMALES
FOR J = 1 TO NP
FOR H = 1 TO NP
A(J,H) = A(J,H) + FF(J) * FF(H) / NM
B(J) = B(J) + FF(J) * FF(H) * PA(H) / NM
NEXT H
B(J) = B(J) + (S(I) - S1) * FF(J) / NM
NEXT J,I
FOR I = 1 TO NP
P(I) = PA(I)
NEXT I
GOSUB 250
DE = 0
FOR I = 1 TO NM
GOSUB 245
DE = DE + (S(I) - FU)^2 / NM
NEXT I
CLS: KEY OFF
PRINT "ITERACION NUMERO. ";IT: PRINT
FOR I = 1 TO NP
PRINT "PARAMETRO ";I; "      ":using cri$;PA(I)
NEXT I
DE = SQR (DE)
PRINT "DESVIACION MEDIA      ":using cri$;DE: PRINT
IF IT > IM THEN PRINT #2, "NO SE CONSIGUIO LA CONVERGENCIA ... ":GOTO 240
FOR I = 1 TO NP
IF ABS (PA(I) - P(I)) < P(I) / 1000 THEN GOTO 235
GOTO 230
235 NEXT I
240 ON II GOSUB 265,270
close 2
locate 24,5: print "Oprima <enter> para regresar al menú principal"
244 if inkey$ = "" then 244
return
245 REM SUB RUTINA PARA LA SOLUCION DE LA FORMULA DE THEIS
U = R(I) * R(I) * PA(1) / 4 / PA(2) / T(I)
FU = Q/4/3.141592 / PA(2) * (-0.5772 - LOG (U) + U - U * U / 4)
RETURN
250 REM SUBRUTINA PARA LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE REGRESION.
REM IF NP>2 ESTA RUTINA PUEDE SER REEMPLAZADA POR UNA ECUACION GENERAL
AM = 0
FOR I = 1 TO NP
FOR J = 1 TO NP
IF ABS (A(I,J)) > AM THEN AM = ABS (A(I,J))
NEXT J,I
AM = SQR (AM)
FOR I = 1 TO NP
B(I) = B(I) / AM
FOR J = 1 TO NP
A(I,J) = A(I,J) / AM
NEXT J,I
DT = A(1,1) * A(2,2) - A(1,2) * A(2,1)

```

```

IF ABS (DT) < 1.E-15 THEN PRINT "SINGULARIDAD EN LA MATRIZ DE REGRESION": return
PA(1) = (B(1) * A(2,2) - B(2) * A(1,2))/DT
PA(2) = ( - B(1) * A(2,1) + B(2) * A(1,1)) / DT
IF PA(1) < 0 THEN PA(1) = 0.00001
IF PA(1) > 1 THEN PA(1) = 1
IF PA(2) < 0 THEN PA(2) = 0.00001
IF PA(2) > 100 THEN PA(2) = 50
RETURN
255 REM ENTRADA PARA EL ACUIFERO CONFINADO
'   COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO       :
PA(1) = 1
'   TRANSMISIVIDAD (M^2/S)             :
PA(2) = 1
RETURN
260 REM ENTRADA PARA EL ACUIFERO FREATICO
'   VALOR INICIAL DEL COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO :
PA(1) = 1
'   VALOR INICIAL DE PERMEABILIDAD (M/S)           :
PA(2) = 1
INPUT "ESPESOR SATURADO AL TIEMPO=0 (M)           : ";ST
PA(2) = PA(2) * ST
FOR I = 1 TO NH
S(I) = S(I) - S(I) * S(I) / 2 / ST
NEXT I
RETURN
265 REM RESULTADOS DE THEIS PARA ACUIFERO CONFINADO
$include "c:\mosias\distivo\test2.bas"
color 14,1
LOCATE 9,33 :PRINT #2, "RESULTADOS"
LOCATE 12,15:PRINT #2, "COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO : ";using cri$; PA(1)
LOCATE 14,15:PRINT #2, "TRANSMISIVIDAD (M^2/SEG)      : ";using cri$; PA(2)
RETURN
270 REM RESULTADOS DE THEIS PARA ACUIFERO FREATICO
$include "c:\mosias\distivo\test2.bas"
color 14,1
LOCATE 9,33: PRINT #2, "RESULTADOS"
LOCATE 12,15:PRINT #2, "COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO : ";using cri$;PA(1)
LOCATE 14,15:PRINT #2, "PERMEABILIDAD (M/S)           : ";using cri$;PA(2) / ST
RETURN
275 input "Nombre de archivo de resultados ";a$
a$ = a$ + ".res"
open a$ for output as #2
return

```



## A P E N D I C E C

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_2

```

CLS:cri$ = "#####.#####"
color 14,1
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 4,17:PRINT "PROGRAMA PARA LA ESTIMACION DE PARAMETROS DESDE UN"
locate 5,15:PRINT "POZO DE GRAN DIAMETRO CON TASA DE EXTRACCION VARIABLE"
locate 6,25:PRINT "USANDO EL METODO DE CONVOLUCION."
LOCATE 11,25:PRINT "TRADUCIDO Y ACONDICIONADO POR:"
LOCATE 12,27:PRINT "ING. LUIS SAMANIEGO MORENO"
LOCATE 18,24:PRINT "TOMADO DE V.S. SINGH Y C.P. GUPTA"
LOCATE 19,21:PRINT "Journal of Hidrology, 87 (1986) 223-232"
LOCATE 21,40:print "Oprima cualquier tecla para continuar"
310 IF INKEY$ = "" THEN 310
CLS:ANGLE = 1
PI=3.141592654
rem COEFICIENTES PARA CALCULAR ABATIMIENTOS ADIMENSIONALES
A0= -0.5772156649 : A1= 0.99999193 : A2= -0.2499105
A3= 0.05519968 : A4= -0.00976004 : A5= 0.00107857
D0= 0.250621 : D1= 2.334733 : F0= 1.681534 : F1= 3.330657
DIM X(100),Y(100),G(100),H(100),Q(100)
cls
color 14,1
$include "c:\mosias\distivo\Nomarch2.bas"
color 14,1
rem LECTURA DE DATOS
OPEN "I",1,A$
INPUT #1,I1,D7
REM LEER TIEMPO TOTAL,TRANS.,ALMAC.,RADIO POZO.,RAD CASE
INPUT #1,T9,TO,SO,R1,R2,T1
A7 = D7
rem seleccion de dispositivo de salida
cls
315 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas"
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16:print " " " :goto 315
cls
if ww1 = 1 then open "scrn:" for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1:" for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 385
$include "c:\mosias\distivo\test2.bas"
color 14,1
locate 8,30:PRINT #2,"DATOS INICIALES":PRINT
locate 10,15:PRINT #2,"INCREMENTO DE TIEMPO (días) = ";using cri$; D7:PRINT
locate 11,15:PRINT #2,"NUMERO DE INTERVALOS DE TIEMPO= ";using cri$; I1:PRINT
locate 12,15:PRINT #2,"RADIO DEL POZO (m) = ";using cri$; R2:PRINT
locate 13,15:PRINT #2,"PERIODO DE BOMBEO (días) = ";using cri$; T1:PRINT
locate 14,15:PRINT #2,"TRANSMISIVIDAD (m^2/día) = ";using cri$; TO:PRINT
locate 15,15:PRINT #2,"ALMACENAMIENTO = ";using cri$; SO:PRINT
320 LOCATE 19,26:PRINT "oprima cualquier tecla para continuar"
325 IF INKEY$ = "" THEN 325
330 CLS
PRINT #2,"PASO TIEMPO(d) Abat(m) EXTRACCION(m^3/d)"
FOR M = 1 TO I1
rem LEER TASA DE EXTRACCION
INPUT #1, Q(M)
rem CALCULAR TIEMPO ADIMENSIONAL

```

```

Z=((R1^2)*S0)/(4.0*T0*A7)
IF Z < 1.0 THEN 335
GOTO 340
335 Y(M) = -(LOG(Z))+A0+A1*Z+A2*Z*Z+A3*(Z^3)+A4*(Z^4)+A5*(Z^5)
GOTO 345
340 Y(M) = (1.0/(Z*(EXP(Z))))*(D0+D1*Z+Z*Z)/(F0+F1*Z+Z*Z)
345 IF M>1 THEN 350
X(1) = (1.0/(4.0*PI*T0))*Y(1)
GOTO 355
350 X(M)=(1.0/(4.0*PI*T0))*(Y(M)-Y(M-1))
355 A6 = X(1):B=-1.0*D7/(PI*(R2^2)):C0=1.0:D3=1.0
IF M=1 THEN 360
Q4=0.0:Q3=0.0
FOR I=1 TO M-1
Q4=Q4+H(I):Q3=Q3+(G(I)*X(M-I+1))
NEXT I
C1=((1.0*D7/(PI*(R2^2)))*Q4)-Q3:goto 365
360 C1=0.0:Q4=0.0:Q3=0.0
365 C2=Q(M):G(M)=(D3*C1-B*C2)/(A6*D3-B*C0):H(M)=(A6*C2-C0*C1)/(A6*D3-B*C0)
S1=(Q4+H(M))*D7/(PI*(R2^2))
print #2, M;" " ;using "####.####" "####.####" "####.####";A7;S1;Q(M)
rem INCREMENTO DE TIEMPO.
A7=A7+D7
IF A7 > T1 THEN 370
GOTO 375
370 Q(M)=0.0
375 IF A6 > T9 THEN 380
NEXT M
close 1
close 2
LOCATE 24,1:print "Oprima <enter> para volver al menú principal"
377 if inkey$ = "" then 377
380 return
385 input "nombre del archivo de resultados";a$
a$ = a$ + ".res"
open a$ for output as #2
return

```

## A P E N D I C E D

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_3

```

DEFINT I-N: KEY OFF:
GOSUB 455
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 2,10 :PRINT "----Tomado de: Bear y Verruit - Modelación del agua Subterránea"
locate 3,10 :print "----Flujo estable"
locate 4,10 :print "----Diferencias Finitas"
locate 5,10 :print "----Area rectangular, con malla irregular"
$include "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
open "I",1,a$
input #1 ,nx,ny
cls : color 14,1
410 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas"
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16: print " " " ": goto 410
cls
if ww1 = 1 then open "scrn:" for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1:" for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 460
cls
$include "C:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 10,10 :print #2,"Número de líneas de la malla en la dirección x ";NX
locate 12,10 :print #2,"Número de líneas de la malla en la dirección y,";NY
DIM X(NX+1), Y(NY+1), F(NX+1,NY+1), IP(NY+1,NY+1), al(NX+1), bl(NX+1), c(NX+1), d(NY+1)
FOR I = 1 TO NX
INPUT #1 ,X(I)
NEXT I:PRINT
FOR I = 1 TO NY
INPUT #1, Y(I)
NEXT I
X(0) = X(1)-(X(2)-X(1))
X(NX+1)=X(NX)+(X(NX)-X(NX-1))
Y(0) = Y(1)-(Y(2)-Y(1))
Y(NY+1)=Y(NY)+(Y(NY)-Y(NY-1))
locate 21,35 :print "oprime cualquier tecla para continuar"
415 if inkey$ = "" then 415
GOSUB 455
A = 0: K = 0
for m = 1 to 400
INPUT #1, I:
if i = 9999 then 420
INPUT #1, J
INPUT #1, F(I,J)
IP(I,J) = 1
A = A + F (I,J)
K = K+1
next m
420 A = A/K
FOR I = 0 TO NX+1
FOR J = 0 TO NY+1
IF IP (I,J) = 0 THEN F(I,J) = A
NEXT J:NEXT I
FOR I = 1 TO NX
Al(I) = 2/((X(I+1)-X(I))*(X(I+1)-X(I-1)))
Bl(I) = 2/((X(I)-X(I-1))*(X(I+1)-X(I-1))):NEXT I

```

```

FOR J = 1 TO NY
C(J) = 2/((Y(J+1)-Y(J))*(Y(J+1)-Y(J-1)))
D(J) = 2/((Y(J)-Y(J-1))*(Y(J+1)-Y(J-1))):NEXT J
NI = NX * NY:RX = 1.4
425 PRINT: PRINT "Iteración";:FOR IT = 1 TO NI: PRINT IT;
FOR I = 1 TO NX:F(I,0) = F(I,2)
FOR J = 1 TO NY:F(0,J) = F(2,J)
IF IP(I,J) > 0 THEN 430
A=A1(I)*F(I+1,J)+B1(I)*F(I-1,J)+C(J)*F(I,J+1)+D(J)*F(I,J-1)
A=A/(A1(I)+B1(I)+C(J)+D(J))
F(I,J)=F(I,J)+RX*(A-F(I,J))
430 F(NX+1,J) = F(NX-1,J)
NEXT J
F(I,NY+1)=F(I,NY-1)
NEXT I
FOR J = 1 TO NY
F(NX+1,J) = F(NX-1,J)
FOR I = 1 TO NX
F(I,NY+1) = F(I,NY-1)
IF IP(I,J) > 0 THEN 435
A=A1(I)*F(I+1,J)+B1(I)*F(I-1,J)+C(J)*F(I,J+1)+D(J)*F(I,J-1)
A=A/(A1(I)+B1(I)+C(J)+D(J))
F(I,J)=F(I,J)+RX*(A-F(I,J))
435 F(I,0) = F(I,2)
NEXT I
F(0,J) = F(2,J)
NEXT J:NEXT IT
GOSUB 455
color 14,1:PRINT #2, "salida ":PRINT:A$ = "#####.###"
FOR I = 1 TO NX:FOR J = 1 TO NY
PRINT #2," x = ";;PRINT #2, USING A$;X(I);
PRINT #2," - y = ";;PRINT #2, USING A$;Y(J);
PRINT #2," - F = ";;PRINT #2, USING A$;F(I,J)
NEXT J,I:PRINT
PRINT "Repetir iteraciones (S/N) ?";
GOSUB 440
IF A$ = "S" THEN 425
close 1: close 2
return
440 A$ = INPUT$(1)
IF A$ = "S" OR A$ = "s" THEN goto 425
IF A$ = "N" OR A$ = "n" THEN A$ = "N":PRINT "No":goto 450
445 a$ = "S": print "SI"
delay 1
450 return
455 CLS:LOCATE 1,28,1:color 14,1
PRINT "Modelos de Simulación en Agua Subterránea";
PRINT: PRINT
RETURN
460 input "nombre del archivo de resultados";z$
z$ = z$ + ".res"
open z$ for output as 2
return

```

## A P E N D I C E E

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_4

```

color 14,1
DEFINT I-N:KEY OFF:OPTION BASE 1:GOSUB 620
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 3,5 : PRINT"--- Tomado de: Bear & Verruijt"
locate 4,5 : PRINT"--- Modelación de agua subterránea"
locate 5,5 : PRINT"--- Flujo estable "
locate 6,5 : PRINT"--- Elementos Finitos"
locate 7,5 : PRINT"--- Elementos Triangulares, entrada opcional"
locate 9,5 : input "Entrada de datos de (D)isco o (T)eclado";c$
if c$ = "t" or c$ = "T" then gosub 630
if c$ = "d" or c$ = "D" then gosub 635
610 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas"
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16: print " ":goto 610
if ww1 = 1 then open "scrn: "for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1: "for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 625
cls
PRINT"Generación del sistema matriz":PRINT" Elemento ..... ";
FOR J=1 TO M:PRINT J;:FOR I=1 TO 3:K=NP1(J,I):XJ(I)=X(K):YJ(I)=Y(K)
NEXT I:B(1)=YJ(2)-YJ(3):B(2)=YJ(3)-YJ(1):B(3)=YJ(1)-YJ(2)
C(1)=XJ(3)-XJ(2):C(2)=XJ(1)-XJ(3):C(3)=XJ(2)-XJ(1)
D=XJ(1)*B(1)+XJ(2)*B(2)+XJ(3)*B(3):D=T1(J)/(2*ABS(D))
FOR K=1 TO 3:KK=NP1(J,K):FOR L=1 TO 3:LL=NP1(J,L)
P1(KK,LL)=P1(KK,LL)+D*(B(K)*B(L)+C(K)*C(L)):NEXT L,K,J:PRINT:PRINT
PRINT"Solución de ecuaciones":PRINT" Iteración ..... ";
FOR IT=1 TO NI:PRINT IT;:FOR I=1 TO N:IF IP1(I)>0 THEN 615
A=Q1(I):FOR J=1 TO N:A=A-P1(I,J)*F1(J):NEXT J:F1(I)=F1(I)+RX*A/P1(I,I)
615 NEXT I,IT:FOR I=1 TO N:Q1(I)=0:FOR J=1 TO N:Q1(I)=Q1(I)+P1(I,J)*F1(J)
NEXT J,I:D$="#####.###":GOSUB 620
PRINT #2," i x y F Q":PRINT#2,
FOR I=1 TO N:PRINT #2,USING "###";I;:PRINT #2,USING D$;X(I);
PRINT #2,USING D$;Y(I);:PRINT #2,USING D$;F1(I);:PRINT #2,USING D$;Q1(I)
NEXT I:PRINT#2,:close 1: close 2
locate 24,1:print "Oprima <enter> para regresar al menú principal"
617 if inkey$ = "" then 617
return
620 CLS:LOCATE 1,19,1
COLOR 14,1:PRINT" Modelos de Simulación en Agua Subterránea";
PRINT:PRINT:RETURN
625 input "Nombre del archivo de resultados";a$
a$ = a$ + ".res"
open a$ for output as #2
return
630 cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 3,3:INPUT"Numero de nodos ..... ";N
locate 5,3:INPUT"Numero de elementos ..... ";M
locate 7,3:INPUT"Numero de iteraciones ... ";NI
locate 9,3:INPUT"Factor de Relaxación..... ";RX
FOR I=1 TO N
GOSUB 620
cls:PRINT"Node ";I:PRINT
INPUT" x ..... ";X(I)

```



```

INPUT" y ..... ";Y(I)
input" Carga dada (s/n) .. ? ";a$
IF A$="S" or a$ = "s" THEN IP1(I)=1:INPUT" Carga ..... ";F1(I)
IF A$="N" or a$ = "n" THEN IP1(I)=-1:INPUT" Abastecimiento..... ";Q1(I)
NEXT I:FOR J=1 TO M
PRINT"Elemento ";J:PRINT
INPUT"Node 1 ..... ";NP1(J,1)
INPUT"Node 2 ..... ";NP1(J,2)
INPUT"Node 3 ..... ";NP1(J,3)
INPUT"Transmisividad ..... ";T1(J)
NEXT J
return
635 $include "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
color 14,1
open "I",1,a$
INPUT #1, N
INPUT #1, M
DIM X(n+1),Y(n+1),IP1(n+1),F1(n+1),Q1(n+1),P1(n+1,n+1),NP1(m+1,3),T1(m+1)
DIM XJ(3),YJ(3),B(3),C(3)
INPUT #1, NI
INPUT #1, RX
FOR I=1 TO N:'PRINT"Node ";I:PRINT
INPUT #1, X(I)
INPUT #1, Y(I)
input #1, a$
IF A$="S" or a$ = "s" THEN IP1(I)=1:INPUT #1, F1(I)
IF A$="N" or a$ = "n" THEN IP1(I)=-1:INPUT #1, Q1(I)
NEXT I:FOR J=1 TO M:'PRINT"Elemento ";J:PRINT
INPUT #1, NP1(J,1)
INPUT #1, NP1(J,2)
INPUT #1, NP1(J,3)
INPUT #1, T1(J)
NEXT J
return

```

## A P E N D I C E F

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_5

```

DEFINT I-N
' :KEY OFF:
OPTION BASE 1: GOSUB 765:cls
PRINT"--- Tomado de: Bear & Verruijt - Modelación de Agua Subterránea"
PRINT"--- Flujo Estable con Infiltración y Percolación"
PRINT"--- Método del Elemento Finito"
PRINT"--- Elementos Cuadrangulares, entrada opcional"
print: print: print
DIM XJ(4),YJ(4),B(3),C(3),D(3),KS(4,3)
DIM X(300),Y(300),IP2(300),F2(300),FA2(300),Q2(300)
DIM NP2(250,4),T2(250),PP(250),CC(250)
DIM U(300),V(300),W(300),P2(300,11),R2(300,11),KP(300,11):NZ=11
input "Entrada de datos de (D)isco o (T)eclado :":re$
if re$ = "D" or re$ = "d" then gosub 775: goto 710
if re$ = "T" or re$ = "t" then gosub 780
cls
710 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas"
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16: print " ": goto 710
cls:if ww1 = 1 then open "scrn:" for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1:" for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 770
715 FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 3:K=I+J-1:IF K>4 THEN K=K-4
KS(I,J)=K:NEXT J,I:PRINT"Generación de la matriz puntero"
FOR I=1 TO N:KP(I,1)=I:KP(I,NZ)=1:NEXT I
PRINT" Elemento ..... ":FOR J=1 TO M:PRINT J;
FOR K=1 TO 4:KK=NP2(J,K):FOR L=1 TO 4:LL=NP2(J,L)
IA=0:FOR II=1 TO KP(KK,NZ):IF KP(KK,II)=LL THEN IA=1
NEXT II:IF IA=0 THEN KB=KP(KK,NZ)+1:KP(KK,NZ)=KB:KP(KK,KB)=LL
IF KB=NZ THEN 760
NEXT L,K,J:PRINT:PRINT:EE=.00001
PRINT"Generación del sistema de matrices":PRINT" Elemento ..... ";
FOR J=1 TO M:PRINT J;:FOR KW=1 TO 4:ZX=0:ZY=0
FOR I=1 TO 3:K=NP2(J,KS(KW,I)):XJ(I)=X(K):YJ(I)=Y(K)
ZX=ZX+X(K):ZY=ZY+Y(K):NEXT I:ZX=ZX/3:ZY=ZY/3
FOR I=1 TO 3:XJ(I)=XJ(I)-ZX:YJ(I)=YJ(I)-ZY:NEXT I
B(1)=YJ(2)-YJ(3):B(2)=YJ(3)-YJ(1):B(3)=YJ(1)-YJ(2)
C(1)=XJ(3)-XJ(2):C(2)=XJ(1)-XJ(3):C(3)=XJ(2)-XJ(1)
D(1)=XJ(2)*YJ(3)-XJ(3)*YJ(2):D(2)=XJ(3)*YJ(1)-XJ(1)*YJ(3)
D(3)=XJ(1)*YJ(2)-XJ(2)*YJ(1)
D=ABS(D(1)+D(2)+D(3)):IF D<EE THEN 735
DD=T2(J)/(4*D):DE=1/(4*CC(J)*D)
XX=(XJ(1)*XJ(1)+XJ(2)*XJ(2)+XJ(3)*XJ(3))/12
XY=(XJ(1)*YJ(1)+XJ(2)*YJ(2)+XJ(3)*YJ(3))/12
YY=(YJ(1)*YJ(1)+YJ(2)*YJ(2)+YJ(3)*YJ(3))/12
FOR K=1 TO 3:KK=NP2(J,KS(KW,K)):II=KP(KK,NZ):FOR LL=1 TO II:L=1
720 KV=KS(KW,L):IF NP2(J,KV)=KP(KK,LL) THEN 725
L=L+1:IF L<4 THEN 720 ELSE 730
725 P2(KK,LL)=P2(KK,LL)+DD*(B(K)*B(L)+C(K)*C(L))
AA=XX*B(K)*B(L)+XY*(B(K)*C(L)+B(L)*C(K))+YY*C(K)*C(L)+D(K)*D(L)
R2(KK,LL)=R2(KK,LL)+DE*AA
730 NEXT LL,K
FOR I=1 TO 3:K=NP2(J,KS(KW,I)):Q2(K)=Q2(K)+D*PP(J)/12:NEXT I
735 NEXT KW,J:PRINT:PRINT:EE=EE*EE
PRINT"Solución de ecuaciones":PRINT" Iteración .... ":IT=1
FOR I=1 TO N:IZ=KP(I,NZ):U(I)=0:IF IP2(I)>0 THEN 740

```

```

U(I)=Q2(I):FOR J=1 TO IZ:CC=R2(I,J):L=KP(I,J)
U(I)=U(I)-(P2(I,J)+CC)*F2(L)-CC*FA2(L):NEXT J
740 V(I)=U(I):NEXT I:UU=0:FOR I=1 TO N:UU=UU+U(I)*U(I):NEXT I
745 PRINT IT;:FOR I=1 TO N:W(I)=0:IZ=KP(I,NZ)
FOR J=1 TO IZ:W(I)=W(I)+(P2(I,J)+R2(I,J))*V(KP(I,J)):NEXT J,I
VW=0:FOR I=1 TO N:VW=VW+V(I)*W(I):NEXT I
AA=UU/VW:FOR I=1 TO N:IF IP2(I)>0 THEN 750
F2(I)=F2(I)+AA*V(I):U(I)=U(I)-AA*W(I)
750 NEXT I:WW=0:FOR I=1 TO N:WW=WW+U(I)*U(I):NEXT I
BB=WW/UU:FOR I=1 TO N:V(I)=U(I)+BB*V(I):NEXT I:UU=WW
IT=IT+1:IF IT<=N AND UU>EE THEN 745
GOSUB 765:PRINT:A$="#####.###":FOR I=1 TO N
PRINT #2," x = ";;PRINT #2,USING A$;X(I);:PRINT #2," - y = ";
PRINT #2, USING A$;Y(I);:PRINT #2," - F = ";
PRINT #2, USING A$;F2(I):NEXT I: print: print
locate 24,1: print "Oprima <enter> para regresar al menú principal"
755 if inkey$ = "" then 755
return
760 GOSUB 765: PRINT"Punto de ancho (NZ) tambien pequeño.":GOTO 755
765 CLS:LOCATE 1,19,1:COLOR 14,1
PRINT "Modelos de Simulación en Agua Subterránea ";PRINT:PRINT:RETURN
770 cls:input "Nombre del archivo de resultados";b$
b$ = b$+".res"
open b$ for output as #2
return
775 cls:
$include "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
color 14,1
OPEN "I",1,A$:INPUT #1,N,M
FOR I=1 TO N
INPUT #1,X(I),Y(I),IP2(I),FA2(I),Q2(I):F2(I)=FA2(I):NEXT I
FOR J=1 TO M
INPUT #1,NP2(J,1),NP2(J,2),NP2(J,3),NP2(J,4),T2(J),PP(J),CC(J)
NEXT J:CLOSE 1:return
780 cls: print "Entrada de datos desde el teclado"
input "Número de nodos" :";n
input "Número de elementos" :";m
for i = 1 to n
input "Coordenada en X del nodo i" :";x(i)
input "Coordenada en Y del nodo i" :";y(i)
input "Tipo del indicador del nodo i" :";ip2(i)
print "Carga en el acuífero adyacente"
input "en el nodo i" :";fa2(i)
f2(i) = fa2(i)
input "Reposición de agua en el nodo i" :";q2(i):next i
for j = 1 to m
input "Nodo 1 del elemento j" :";np2(j,1)
input "Nodo 2 del elemento j" :";np2(j,2)
input "Nodo 3 del elemento j" :";np2(j,3)
input "Nodo 4 del elemento j" :";np2(j,4)
input "Transmisividad del elemento j" :";t2(j)
input "Infiltración del elemento j" :";pp(j)
print "Resistencia del acuitardo en el"
input "elemento j" :";cc(j)
next j:return

```

## A P E N D I C E G

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_6

```

DEFINT I-N:KEY OFF:GOSUB 525
color 14,1
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 3,8 : PRINT"--- Tomado de: Bear & Verruijt - Modelación del Agua Subterránea"
locate 4,8 :PRINT"--- Flujo no Estable."
locate 5,8 :PRINT"--- Método Explicito de Diferencias Finitas."
locate 6,8 :PRINT"--- Infiltración Homogénea en acuífero rectangular."
PRINT:PRINT:DIM F(50,50),FA(50,50):TT=0
' selección del dispositivo de entrada de datos
509 locate 9,10 : input "entrada de datos desde (T)clado o (D)isco      ":"a$
if a$ = "D" or a$ = "d" then gosub 535
if a$ = "T" or a$ = "t" then gosub 540
' selección de dispositivo de salida de resultados
510 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas" ' gosub 525
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16: print "      ": goto 510
cls:if ww1 = 1 then open "scrn:" for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1:" for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 530
515 cls: print :print "Desea la carga en todos los nodos (1) o"
input "solamente en el centro (2)";c04
if c04 < 1 or c04 > 2 then goto 515
if c04 = 2 then gosub 545
goto 520
if c04 = 1 then gosub 550
520 close 1: close 2
locate 24,1: print "Oprima <enter> para regresar al menú principal"
523 if inkey$ = "" then 523
524 return
525 CLS:LOCATE 1,19,1:COLOR 14,1
PRINT" Modelos de Simulación en Agua Subterránea.";
PRINT:PRINT:RETURN
530 input "Entre nombre de archivo de resultados";z$
z$ = z$ + ".res"
open z$ for output as #2
return
535 $include "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
color 14,1
'input "nombre del archivo de datos      ":";b$
open "i",1,a$
INPUT #1, XT
INPUT #1, NX:dx=xt/nx:a=1/(dx*dx)
INPUT #1, YT
INPUT #1, NY:dy=yt/ny:b=1/(dy*dy)
INPUT #1, H
INPUT #1, P
INPUT #1, T
INPUT #1, S: dt=s/(2*t*(a+b))
INPUT #1, DT:pp=p*dt/s
INPUT #1, NS
return
540 $include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 3,5 : print "entrada de datos desde teclado  "
locate 5,5 :INPUT"Dimension en la dirección x      (m): ";XT

```

```

locate 6,5 :INPUT" Subdivisiones ..... (m): ";NX
DX=XT/NX:A=1/(DX*DX)
locate 7,5 :INPUT"Dimension en la dirección y (m): ";YT
locate 8,5 :INPUT" Subdivisiones ..... (m): ";NY
DY=YT/NY:B=1/(DY*DY)
locate 9,5 :INPUT"Carga inicial ..... (m): ";H
locate 10,5 :INPUT"Tasa de Infiltración ..... (m/d): ";P
locate 11,5 :INPUT"Transmisividad .....(m^2/d): ";T
locate 12,5 :INPUT"Coef. de Almacenamiento.... : ";S
DT=S/(2*T*(A+B))
locate 13,5 :PRINT"Sugerencia para el intervalo de tiempo : ";DT;"días"
locate 14,5 :INPUT"Intervalo de tiempo..... (días): ";DT;PP=P*DT/S
locate 15,5 :INPUT"Número de intervalos de tiempo ... : ";NS
cls:return
545 FOR I=0 TO NX:FOR J=0 TO NY:F(I,J)=H:FA(I,J)=H:NEXT J,I
AA=T*DT/S:A=A*AA:B=B*AA:II=INT(NX/2+.1):JJ=INT(NY/2+.1)
FOR IS=1 TO NS:TT=TT+DT:FOR I=1 TO NX-1:FOR J=1 TO NY-1
D=F(I-1,J)-2*F(I,J)+F(I+1,J):E=F(I,J-1)-2*F(I,J)+F(I,J+1)
FA(I,J)=F(I,J)+PP+A*D+B*E
NEXT J,I
PRINT #2, "Tiempo (d): ";:PRINT #2, USING "#####.###";TT;
PRINT #2, " --- Carga en el centro : (m) ";
PRINT #2, USING "###.#####";FA(II,JJ)
FOR I=1 TO NX-1:FOR J=1 TO NY-1:F(I,J)=FA(I,J):NEXT J,I,IS
PRINT:return
550 FOR I=0 TO NX
FOR J=0 TO NY
F(I,J)=H:FA(I,J)=H:NEXT J,I
AA=T*DT/S:A=A*AA:B=B*AA:II=INT(NX/2+.1):JJ=INT(NY/2+.1)
FOR IS=1 TO NS
TT=TT+DT
FOR I=1 TO NX-1
FOR J=1 TO NY-1
D=F(I-1,J)-2*F(I,J)+F(I+1,J):E=F(I,J-1)-2*F(I,J)+F(I,J+1)
FA(I,J)=F(I,J)+PP+A*D+B*E
PRINT #2, "Tiempo: ";:PRINT #2, USING "#####.###";TT;
print #2, " Coordenada ";i;" , ";j:print #2, using "#####.#####";fa(i,j)
NEXT J,I
FOR I=1 TO NX-1
FOR J=1 TO NY-1
F(I,J)=FA(I,J):NEXT J,I,IS
PRINT:return

```

## A P E N D I C E H

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_7



```

DEFINT I-N:KEY OFF:OPTION BASE 1:GOSUB 965:cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 5,25:PRINT "Tomado de: Bear y Verruijt"
locate 7,25:Print "Modelación del Agua Subterránea"
locate 9,22:PRINT "Flujo no estable"
locate 11,29:PRINT "Método del Elemento Finito"
locate 13,15:PRINT "Elementos cuadrangulares entrada de datos opcional"
locate 15,17:PRINT "Solución por el método del gradiente conjugado"
DIM XJ(4),YJ(4),B(3),C(3),D(3),KS(4,3)
DIM X(300),Y(300),IP4(300),F4(300),FA4(300),Q4(300)
DIM NP4(250,4),T4(250),S4(250),PP4(250)
DIM U(300),V(300),W(300),P4(300,11),R4(300,11),KP4(300,11):NZ=11
print: print
locate 21,3: input "Entrada de datos desde (T)eclado o (D)isco";re$
if re$ = "D" or re$ = "d" then gosub 970:goto 910
if re$ = "T" or re$ = "t" then gosub 975
cls
910 $include "c:\mosias\distivo\selec.bas"
if ww1 < 1 or ww1 > 3 then locate 14,16:print " ":goto 910
if ww1 = 1 then open "scrn:" for output as #2
if ww1 = 2 then open "lpt1:" for output as #2
if ww1 = 3 then gosub 980
FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 3:K=I+J-1:IF K>4 THEN K=K-4
KS(I,J)=K:NEXT J,I:GOSUB 965:PRINT "Generación de la matriz puntero"
FOR I=1 TO N:KP4(I,1)=I:KP4(I,NZ)=1:NEXT I
PRINT" Elemento ..... ";:FOR J=1 TO M:PRINT J;
FOR K=1 TO 4:KK=NP4(J,K):FOR L=1 TO 4:LL=NP4(J,L)
IA=0:FOR II=1 TO KP4(KK,NZ):IF KP4(KK,II)=LL THEN IA=1
NEXT II:IF IA=0 THEN KB=KP4(KK,NZ)+1:KP4(KK,NZ)=KB:KP4(KK,KB)=LL
IF KB=NZ THEN 960
NEXT L,K,J:PRINT:PRINT:EE=.00001
PRINT "Generación del sistema de matrices":PRINT" Elemento ..... ";
FOR J=1 TO M:PRINT J;:FOR KW=1 TO 4:ZX=0:ZY=0
FOR I=1 TO 3:K=NP4(J,KS(KW,I)):XJ(I)=X(K):YJ(I)=Y(K)
ZX=ZX+X(K):ZY=ZY+Y(K):NEXT I:ZX=ZX/3:ZY=ZY/3
FOR I=1 TO 3:XJ(I)=XJ(I)-ZX:YJ(I)=YJ(I)-ZY:NEXT I
B(1)=YJ(2)-YJ(3):B(2)=YJ(3)-YJ(1):B(3)=YJ(1)-YJ(2)
C(1)=XJ(3)-XJ(2):C(2)=XJ(1)-XJ(3):C(3)=XJ(2)-XJ(1)
D(1)=XJ(2)*YJ(3)-XJ(3)*YJ(2):D(2)=XJ(3)*YJ(1)-XJ(1)*YJ(3)
D(3)=XJ(1)*YJ(2)-XJ(2)*YJ(1)
D=ABS(D(1)+D(2)+D(3)):IF D<EE THEN 930
DD=T4(J)/(4*D):DE=S4(J)/(4*(1-E)*D)
XX=(XJ(1)*XJ(1)+XJ(2)*XJ(2)+XJ(3)*XJ(3))/12
XY=(XJ(1)*YJ(1)+XJ(2)*YJ(2)+XJ(3)*YJ(3))/12
YY=(YJ(1)*YJ(1)+YJ(2)*YJ(2)+YJ(3)*YJ(3))/12
FOR K=1 TO 3:KK=NP4(J,KS(KW,K)):II=KP4(KK,NZ):FOR LL=1 TO II:L=1
915 KV=KS(KW,L):IF NP4(J,KV)=KP4(KK,LL) THEN 920
L=L+1:IF L<4 THEN 915 ELSE 925
920 P4(KK,LL)=P4(KK,LL)+DD*(B(K)*B(L)+C(K)*C(L))
AA=XY*B(K)*B(L)+XY*(B(K)*C(L)+B(L)*C(K))+YY*C(K)*C(L)+D(K)*D(L)
R4(KK,LL)=R4(KK,LL)+DE*AA
925 NEXT LL,K
FOR I=1 TO 3:K=NP4(J,KS(KW,I)):Q4(K)=Q4(K)+D*PP4(J)/12:NEXT I
930 NEXT KW,J:PRINT:PRINT:TN=0:EE=EE*EE:PRINT"Tiempo = ";TN

```

```

935 INPUT "Tiempo despues del siguiente intervalo ";TT
IT=1:DT=TT-TN:IF DT<=0 THEN 955
B=1/DT:TN=TT:PRINT "Solución de ecuaciones":PRINT " Iteración ";
FOR I=1 TO N:U(I)=0:IZ=KP4(I,NZ):IF IP4(I)>0 THEN 940
U(I)=Q4(I):FOR J=1 TO IZ:CC=B*R4(I,J):L=KP4(I,J)
U(I)=U(I)-(P4(I,J)+CC)*F4(L)+CC*PA4(L):NEXT J
940 V(I)=U(I):NEXT I:UU=0:FOR I=1 TO N:UU=UU+U(I)*U(I):NEXT I
945 PRINT IT;:FOR I=1 TO N:W(I)=0:IZ=KP4(I,NZ)
FOR J=1 TO IZ:W(I)=W(I)+(P4(I,J)+B*R4(I,J))*V(KP4(I,J)):NEXT J,I
VW=0:FOR I=1 TO N:VW=VW+V(I)*W(I):NEXT I
AA=UU/VW:FOR I=1 TO N:IF IP4(I)>0 THEN 950
F4(I)=F4(I)+AA*V(I):U(I)=U(I)-AA*W(I)
950 NEXT I:WW=0:FOR I=1 TO N:WW=WW+U(I)*U(I):NEXT I
BB=WW/UU:FOR I=1 TO N:V(I)=U(I)+BB*V(I):NEXT I:UU=WW
IT=IT+1:IF IT<=N AND UU>EE THEN 945
FOR I=1 TO N:FA4(I)=FA4(I)+(F4(I)-PA4(I))/(1-E):F4(I)=FA4(I):NEXT I
A$="####.###":cls
FOR I=1 TO N
PRINT #2," x = ";:PRINT #2, USING A$;X(I);
PRINT #2," - y = ";
PRINT #2, USING A$;Y(I);:PRINT #2, " - F = ";
PRINT #2, USING A$;PA4(I)
NEXT I:PRINT #2, "Tiempo = ";TN:print:GOTO 935
955 close 1: close 2
print "Oprima <enter> para regresar al menú principal"
956 if inkey$ = "" then 956
return
960 GOSUB 965:PRINT "Anchura del punto (NZ) tambien pequeño.":GOTO 955
965 CLS:LOCATE 1,19,1:COLOR 14,1
PRINT " Modelos de Simulación en Agua Subterránea";
PRINT:PRINT:RETURN
970 $include "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
color 14,1
OPEN "I",1,A$
INPUT #1,N,M,E
FOR I=1 TO N
INPUT #1,X(I),Y(I),IP4(I),PA4(I),Q4(I):F4(I)=FA4(I)
NEXT I
FOR J=1 TO M
INPUT #1,NP4(J,1),NP4(J,2),NP4(J,3),NP4(J,4),T4(J),S4(J),PP4(J)
NEXT J
return
975 cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 5, 25: print " entrada de datos desde el teclado"
locate 10, 10:input "Número de nodos      ";n
locate 12, 10:input "Número de elementos   ";m
for i = 1 to n
cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 5,5:print "Coordenada en X del nodo";i
locate 5,35:input x(i)
locate 7,5:print "Coordenada en Y del nodo";i

```

```

locate 7,35:input y(i)
locate 9,5:print "Tipo de indicador del nodo";i
locate 9,35:input ip4(i)
locate 11,5:print "Carga en el acuífero adyacente en el nodo";i
locate 11,50:input fa4(i)
f4(i) = fa4(i)
locate 13,5:print "Reposición de agua en el nodo";i
locate 13,35:input q4(i)
next i
for j = 1 to m
cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 7,5:print "nodo 1 del elemento";j
locate 7,35:input np4(j,1)
locate 9,5:print "nodo 2 del elemento";j
locate 9,35:input np4(j,2)
locate 11,5:print "nodo 3 del elemento";j
locate 11,35:input np4(j,3)
locate 13,5:print "nodo 4 del elemento";j
locate 13,35:input np4(j,4)
locate 15,5:print "Transmisividad del elemento";j
locate 15,35:input t4(j)
locate 17,5:print "Coeficiente de almacenamiento del elemento";j
locate 17,55:input s(j)
locate 19,5:print "Infiltración del elemento";j
locate 19,35:input pp(j)
next j
return
980 cls: input "Entre nombre del archivo de resultados";b$
b$ = b$ + ".res"
open b$ for output as #2
return

```

## A P E N D I C E I

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_8

```

DEFINT I-N:KEY OFF:OPTION BASE 1:GOSUB 1070:cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 5,15: PRINT "Tomado de: Bear & Verruijt - Modelación de agua subterránea"
locate 7,15: PRINT "Flujo no estable en un plano vertical."
locate 9,15: PRINT "agua Fresca y salada con interfase aguda."
locate 11,15: PRINT "Programa con salida gráfica en pantalla"
locate 13,15: PRINT "Upconing debido a un solo pozo":PRINT
DIM X(360),Y(360),NT(360),NH(361),P5(360),Q5(360),KP5(3000),P5(3000)
DIM T5(320),NP5(320,4),PX(320),PY(320),U(360),V(360),W(360)
DIM B(3),C(3),XJ(3),YJ(3),E(3,3),KS(4,3)
DIM FS(21),NA(20),NB(20),DX(20),XN(21),YN(21),QY(21),QY(21),NK(21,7)
locate 21,5: INPUT "Entrada de datos de (D)isco o de (T)eclado";r$
IF R$ = "T" OR R$ = "t" THEN GOSUB 1075
IF R$ = "D" OR R$ = "d" THEN GOSUB 1080
1010 GOSUB 1070:N5=N1+N2+N3:N6=N5-1:N=N5*NW:W=N6*NW
FOR I=1 TO N5:NT(I*NW)=2:NEXT I
FOR I=1 TO N6:L=(I-1)*NV:K=(I-1)*NW:FOR J=1 TO NT:LL=L+J:KK=K+J
NP5(LL,1)=KK:NP5(LL,2)=KK+NW
NP5(LL,3)=KK+NW+1:NP5(LL,4)=KK+1:NEXT J,I
FOR I=1 TO 4:FOR J=1 TO 3:K=I+J-1:IF K>4 THEN K=K-4
KS(I,J)=K:NEXT J,I:PRINT"Generación del vector puntero":W=1
CL=CSRLIN:FOR I=1 TO N
LOCATE CL,3,0:PRINT "Nodo";I:KP5(W)=I:NH(I)=W
K=0:FOR J=1 TO M:FOR H=1 TO 4:IF NP5(J,H)=I GOTO 1015
NEXT H:GOTO 1025
1015 FOR H=1 TO 4:G=NP5(J,H):FOR L=0 TO K:IF KP5(W-L)=G GOTO 1020
NEXT L:K=K+1:KP5(W+K)=G
1020 NEXT H
1025 NEXT J:W=W+K+1:NEXT I
locate 5,10:PRINT"Longitud del puntero =" ;W:NH(N-1)=W
FOR I=1 TO NW:NK(I,5)=4:NEXT I:NK(1,5)=2:NK(NW,5)=2
L=(N1-2)*NV:FOR I=1 TO NV:NK(I,1)=L+I:NK(I,2)=L+I+NV:NEXT I
L=(N1-2)*NV-1:FOR I=2 TO NV
NK(I,3)=L+I:NK(I,4)=L+I+NV:NEXT I
L=(N1-1)*NV:NK(NW,1)=L:NK(NW,2)=L+NV:NN=W-1:DX(1)=1:DX(2)=1
AA=2:FOR I=3 TO NV:DX(I)=1.4*DX(I-2):AA=AA+DX(I):NEXT I
FOR I=1 TO NV:DX(I)=WW*DX(I)/AA
NEXT I:L=(N1-1)*NW:FOR I=1 TO NV
NA(I)=L+I:NB(I)=L+I+1:NEXT I
FOR I=1 TO N5:L=(I-1)*NW+1:X(L)=0
FOR J=1 TO NV:X(L+J)=X(L+J-1)+DX(J):NEXT J,I:FOR I=1 TO NW
FS(I)=H1:XN(I)=1:YN(I)=0:NEXT I:FOR I=1 TO M:T5(I)=PM:NEXT I
SP=DX(1)*PR/(PM*GF):IF I$="Y" THEN SP=5:NS=8:GOTO 1030
PRINT:
PRINT "Sugerencia para intervalo de tiempo .";SP:print
INPUT"Intervalo de tiempo ..... ";SP
INPUT"Numero de intervalos de tiempo ... ";NS
cls
1030 FOR IS=0 TO NS
IF IS=0 THEN GOSUB 1065 ELSE GOTO 1035
AA=(H2+H3)*GF:L=N1*NW:FOR I=1 TO L
P5(I)=AA+(H1-Y(I))*GS:NEXT I
L=L+1:FOR I=L TO N:P5(I)=(Y(N)-Y(I))*GF:NEXT I:GOTO 1055
1035 FOR I=1 TO NN:P5(I)=0

```

```

NEXT I:FOR I=1 TO M:FOR KW=1 TO 4:FOR J=1 TO 3
K=NP5(I,KS(KW,J)):XJ(J)=X(K):YJ(J)=Y(K):NEXT J
B(1)=YJ(2)-YJ(3):B(2)=YJ(3)-YJ(1):B(3)=YJ(1)-YJ(2)
C(1)=XJ(3)-XJ(2):C(2)=XJ(1)-XJ(3):C(3)=XJ(2)-XJ(1)
D=T5(I)/(4*ABS(XJ(1)*B(1)+XJ(2)*B(2)+XJ(3)*B(3)))
FOR J=1 TO 3
FOR K=1 TO 3
E(J,K)=D*(B(J)*B(K)+C(J)*C(K))
NEXT K,J
FOR J=1 TO 3
G=NP5(I,KS(KW,J))
W=NM(G):H=NM(G+1)-W-1
FOR K=0 TO H
FOR L=1 TO 3
IF NP5(I,KS(KW,L))=KP5(W+K) THEN P5(W+K)=P5(W+K)+E(J,L)
NEXT L,K,J,KW,I
IT=1:EE=.000001:FOR I=1 TO N:Q5(I)=0:NEXT I
L=(N1+N2-1)*NW+1:Q5(L)=-QQ
FOR K=1 TO NV:I=NA(K):J=NB(K)
AA=.5*PM*DG*DX(K):Q5(I)=Q5(I)-AA:Q5(J)=Q5(J)+AA
AA=.5*PM*GF*DX(K):Q5(N-NW+K)=Q5(N-NW+K)-AA
Q5(N-NV+K)=Q5(N-NV+K)-AA
AA=.5*PM*GS*DX(K)
Q5(K)=Q5(K)+AA:Q5(K+1)=Q5(K+1)+AA:NEXT K
FOR I=1 TO N:H=NM(I)
G=NM(I+1)-H-1:U(I)=0:IF NT(I)>1 THEN 1040
U(I)=Q5(I):FOR J=0 TO G
U(I)=U(I)-P5(H+J)*F5(KP5(H+J)):NEXT J
1040 V(I)=U(I):NEXT I:UU=0:FOR I=1 TO N:UU=UU+U(I)*U(I):NEXT I
1045 LOCATE 5,50,0:PRINT"Iteración ";IT
LOCATE 6,50,0:PRINT"Error ";UU
FOR I=1 TO N:W(I)=0:H=NM(I):G=NM(I+1)-H-1
FOR J=0 TO G:W(I)=W(I)+P5(H+J)*V(KP5(H+J)):NEXT J,I
VW=0:FOR I=1 TO N:VW=VW+V(I)*W(I):NEXT I
AA=UU/VW:FOR I=1 TO N:IF NT(I)>1 THEN 1050
F5(I)=F5(I)+AA*V(I):U(I)=U(I)-AA*W(I)
1050 NEXT I:WT=0:FOR I=1 TO N:WT=WT+U(I)*U(I):NEXT I
BB=WT/UU:FOR I=1 TO N:V(I)=U(I)+BB*V(I):NEXT I:UU=WT
IT=IT+1:IF IT<=N AND UU>EE THEN 1045
1055 FOR J=1 TO M:PX(J)=0:PY(J)=GS:IF J>(N1-1)*NV THEN PY(J)=GF
FOR KW=1 TO 4:FOR K=1 TO 3
L=NP5(J,KS(KW,K)):XJ(K)=X(L):YJ(K)=Y(L)
NEXT K:B(1)=YJ(2)-YJ(3):B(2)=YJ(3)-YJ(1):B(3)=YJ(1)-YJ(2)
C(1)=XJ(3)-XJ(2):C(2)=XJ(1)-XJ(3):C(3)=XJ(2)-XJ(1)
AA=4*(XJ(1)*B(1)+XJ(2)*B(2)+XJ(3)*B(3))
FOR K=1 TO 3:L=NP5(J,KS(KW,K))
PX(J)=PX(J)+B(K)*F5(L)/AA:PY(J)=PY(J)+C(K)*F5(L)/AA
NEXT K,KW
PX(J)=-PM*PX(J):PY(J)=-PM*PY(J)
NEXT J:FOR I=1 TO NW:QX(I)=0:QY(I)=0
FOR K=1 TO NK(I,5):II=NK(I,K):LL=NK(I,5)
QX(I)=QX(I)+PX(II)/LL
QY(I)=QY(I)+PY(II)/LL:NEXT K,I
AA=SP/PR:FOR I=1 TO NV:QX(I)=AA*QX(I)
QY(I)=AA*QY(I):FS(I)=FS(I)+QY(I)-QX(I)*YN(I)/XN(I)

```

```

NEXT I:GOSUB 1065
FOR I=2 TO NV:AA=DX(I-1)+DX(I):AB=FS(I+1)-FS(I-1)
A1=SQR(AA*AA+AB*AB):XN(I)=AA/A1:YN(I)=AB/A1:NEXT I
SCREEN 2:CLS:SX=639/WW:SY=199/HT
FOR I=1 TO M:FOR J=1 TO 4:JJ=NP5(I,J):K=J+1:IF K>4 THEN K=1
KK=NP5(I,K):IA=SY*X(JJ)
IB=SY*X(KK):JA=199-SY*Y(JJ):JB=199-SY*Y(KK)
LINE(IA,JA)-(IB,JB):NEXT J,I
FOR I=1 TO NV:IA=SY*X(I)+1:IB=SY*X(I+1)
JA=SY*FS(I):JB=SY*FS(I+1):IF IA>=IB THEN 1060
FOR K=IA TO IB:AA=(K-IA)/(IB-IA):BB=JA+AA*(JB-JA)
FOR L=1 TO 20:IC=199*RND(1):IF IC<=BB THEN PSET(K,199-IC)
NEXT L,K
1060 NEXT I:LOCATE 4,50,0
PRINT"Tiempo = ";:PRINT USING"####.###";T;
T=T+SP:B$=INKEY$:IF B$="S" OR B$="s" THEN SCREEN 0: cls: return
NEXT IS:B$=INPUT$(1):SCREEN 0: cls: return
1065 FOR I=1 TO NW:A1=FS(I)/(N1-1):A2=(H1+H2-FS(I))/N2:A3=H3/N3
FOR J=1 TO N1:K=I+(J-1)*NW:Y(K)=(J-1)*A1:NEXT J:L=N1+1:LL=N1+N2
FOR J=L TO LL:K=I+(J-1)*NW
Y(K)=FS(I)+(J-L+1)*A2:NEXT J:L=LL+1
FOR J=L TO N5:K=I+(J-1)*NW
Y(K)=H1+H2+(J-L+1)*A3:NEXT J,I:RETURN
1070 CLS:LOCATE 1,26,1
COLOR 14,1:PRINT" Interfase en un plano vertical ";
PRINT:PRINT:RETURN
1075 cls
$include "c:\mosias\distivo\test.bas"
color 14,1
locate 5,5: INPUT "Longitud del acuifero (m)..... ";WW
locate 6,5: INPUT "Espesor del acuifero .(m)..... ";HT
locate 7,5: INPUT "Nivel de interfase....(m)..... ";H1
locate 8,5: INPUT "nivel del pozo.....(m)..... ";H2:H3=HT-H2:H2=H2-H1
locate 9,5: INPUT "Elementos horizontales (3...20) ... ";NV:NW=NW+1
locate 10,5: INPUT "Elementos verticales (4...16) ..... ";N6:N5=N6+1
N1=INT(N5*H1/HT+1.1):IF N1<2 THEN N1=2
N3=INT(N5*H3/HT+1):IF N3<1 THEN N3=1
N2=N5-N1-N3:IF N2<1 THEN N2=1
locate 11,5: INPUT "Densidad del agua fresca ..(g/cm^3) ";GF:GF = GF * 9.8
locate 12,5: INPUT "Densidad del agua salada ..(g/cm^3).. ";GS:GS = GS * 9.8
DG=GS-GF
LOCATE 13,5: INPUT "Permeabilidad/viscosidad ..... ";PM
LOCATE 14,5: INPUT "Almacenamiento ..... ";PR
LOCATE 15,5: INPUT "Descarga del pozo ..... ";QQ:RETURN
1080 $INCLUDE "c:\mosias\distivo\nomarch2.bas"
COLOR 14,1
OPEN "I",1,a$: print
INPUT #1, WW:INPUT #1, HT:INPUT #1, H1:INPUT #1, H3
INPUT #1, H2:INPUT #1, NV:INPUT #1, NW:INPUT #1, N6
INPUT #1, N5
N1=INT (N5*H1/HT+1.1):IF N1<2 THEN N1=2
N3=INT (N5*H3/HT+1):IF N3<1 THEN N3=1
N2=N5-N1-N3:IF N2<1 THEN N2=1
INPUT #1, GF:INPUT #1, GS:INPUT #1, DG:INPUT #1, PM
INPUT #1, PR:INPUT #1, QQ:CLOSE 1:RETURN

```

## A P E N D I C E J

LISTADO DEL PROGRAMA MOSIAS\_9



```

color 14,1:CLS: KEY OFF
PI = 3.141592654
DIM A10(10)
$INCLUDE "C:\MOSIAS\DISTIVO\TEST.BAS"
COLOR 14,1
LOCATE 5,5: PRINT "CALCULO DE DISTRIBUCIONES DE CONCENTRACION"
LOCATE 7,5: PRINT "POR INYECCION EN PUNTOS SEMEJANTES"
LOCATE 9,5: PRINT "EN UNA Y DOS DIMENSIONES"
LOCATE 11,5: PRINT "(VELOCIDAD CONSTANTE, EJE X PARALELO AL FLUJO)"
locate 20,3: print "POR FAVOR < CAPS LOCK > ACTIVO"
LOCATE 21,3: INPUT "CONTINUAR CON <ENTER> ... ";A$
REM ENTRADA DE PARAMETROS Y DATOS
CLS: KEY OFF
$INCLUDE "C:\MOSIAS\DISTIVO\TEST.BAS"
COLOR 14,1
1110 LOCATE 5,5: INPUT "DIMENSION DEL PROBLEMA      (1/2):";DI
      IF DI = 1 OR DI = 2 THEN GOTO 1115
      GOTO 1110
1115 LOCATE 7,5: PRINT "TIPO DE INYECCION"
1120 LOCATE 9,5: INPUT "MOMENTANEA O PERMANENTE                (M/P):";TY$
      IF TY$ = "M" OR TY$ = "P" THEN GOTO 1125
      GOTO 1120
1125 CLS:
1130 $INCLUDE "C:\MOSIAS\DISTIVO\TEST.BAS"
      COLOR 14,1
      LOCATE 5,5: PRINT "PARAMETROS": 'PRINT "=====": PRINT
1135 LOCATE 6,5: INPUT "VELOCIDAD DEL PORO              (m/d)          :";U
      IF U < 0 THEN GOTO 1135
1140 LOCATE 7,5: INPUT "FACTOR DE RETARDACION          (-)              :";R
      IF R < 1 THEN GOTO 1140
1145 LOCATE 8,5: INPUT "CONSTANTE DE DECAIMIENTO      (1/D)          :";LA
      IF LA < 0 THEN GOTO 1145
1150 LOCATE 9,5: INPUT "ESPESOR SATURADO DEL ACUIFERO (M)          :";M
      IF M <= 0 THEN GOTO 1150
1155 LOCATE 10,5: INPUT "POROSIDAD EFECTIVA              (-)              :";PEF
      IF PEF <= 0 THEN GOTO 1155
1160 LOCATE 11,5: INPUT "DISPERSION LONGITUDINAL      (M)              :";AL
      IF AL <= 0 THEN GOTO 1160
      IF DI = 1 THEN GOTO 1170
1165 IF DI = 2 THEN LOCATE 12,5: INPUT "DISPERSION TRANSVERSAL    (M)              :";AQ
      IF AQ <= 0 THEN GOTO 1165
1170 IF TY$ = "M" THEN LOCATE 13,5: INPUT "MASA CONTAMINANTE INYECTADA (G)              :";DM
      IF TY$ = "P" THEN LOCATE 14,5: INPUT "FUENTE DE LA FUERZA      (G/D)            :";MP
      LOCATE 21,5: INPUT "DATOS CORRRECTOS      (S/N)          :";A$
      IF A$ = "N" THEN GOTO 1130
      CO = MP / (M*PEF*U)
      GA = SQR (1+4*LA*AL*R/U)
1175 CLS:COLOR 14,1:KEY OFF
      LOCATE 5,5: PRINT "TIEMPO Y LOCALIZACION"
      LOCATE 6,5: PRINT "=====
LOCATE 8,5: INPUT "TIEMPO (D)                  :";T
      IF T = 0 THEN LOCATE 10,5:PRINT "SINGULARIDAD": GOTO 1200
      LOCATE 11,5: INPUT "LOCALIZACION SOBRE EL EJE X (M):";X
      IF DI = 2 THEN LOCATE 12,5:INPUT "LOCALIZACION SOBRE EL EJE Y (M):";Y
      IF DI = 1 AND TY$ = "P" THEN GOTO 1180

```

```

IF DI = 2 THEN GOTO 1185
REM INYECCION MOMENTANEA EN UNA DIMENSION
AR = (X-U*T/R)^2/(4*AL*U*T/R)
C = DM/(2*M*PEF*R*SQR(PI*AL*U*T/R))*EXP(-AR)*EXP(-LA*T)
GOTO 1195
1180 REM INYECCION PERMANENTE EN UNA DIMENSION
A1 = (X-U*T*GA/R)/2/SQR (AL*U*T/R)
GOSUB 1210
F1 = EC:A1 = (X+U*T*GA/R)/2/SQR (AL*U*T/R)
GOSUB 1210
F2 = EC
C = CO/2* EXP (X/2/AL)*(F1* EXP (-X*GA/2/AL)-F2 * EXP (X*GA/2/AL))
GOTO 1195
1185 IF TY$ = "P" THEN GOTO 1190
REM INYECCION MOMENTANEA EN DOS DIMENSIONES
AR = (X-U*T/R)^2/(4*AL*U*T/R)+Y^2/(4*AQ*U*T/R)+LA*T
C = DM / (4 * PI*PEF*M*U*SQR (AL*AQ)*T)* EXP (-AR)
GOTO 1195
1190 REM INYECCION PERMANENTE EN DOS DIMENSIONES
RR = X^2+AL*Y^2/AQ
IF RR = 0 THEN LOCATE 14,5: PRINT "SINGULARIDAD":GOTO 1200
A1 = RR*R/(4*AL*U*T):A2 = SQR (RR)*GA/2/AL
GOSUB 1220
C = CO/(A*PI* SQR (AL * AQ)) * EXP (X/2/AL)*W
1195 LOCATE 16,5: PRINT "CONCENTRACION :";C;"G/M^3"
1200 LOCATE 18,5: INPUT "? ENTRADA DE NUEVOS PARAMETROS ? (S/N) :";A$
IF A$ = "S" THEN GOTO 1125
LOCATE 19,5: INPUT "? NUEVO TIEMPO Y LOCALIZACION ? (S/N) :";A$
IF A$ = "S" THEN GOTO 1175
LOCATE 23,3:print "Oprima <enter> para salir al manú principal"
1205 if inkey$ = "" then 1205
return
1210 REM ERFC(A1) = 1-ERF(A1)
REM DONDE ERF(A1) = 2/SQR(PI) * INTEGRAL ENTRE
REM EXP (-X^2)*DXI ENTRE 0 Y A1
IF A1 > 10 THEN EC = 0: RETURN
IF A1 < -10 THEN EC = 2: RETURN
HH = 0:TH = 1/(1+0.327591117 * ABS (A1))
FOR IH = 5 TO 1 STEP -1:HH = (HH + A10(IH))*TH:NEXT IH
EC = EXP (-A1 * A1)*HH
IF A1 < 0 THEN EC = 2 - EC:RETURN
1220 REM FUNCION DE HANTUSH (W(A1,A2)
REM LA FUNCION ES CALCULADA POR INTEGRACION LOGARITMICA USANDO
REM LA REGLA DE SIMPSON
DEF FN F(XI) = EXP (- EXP (XI)-A2 * A2 /4/ EXP (XI))
UG = LOG (A1)
IF UG > 10 THEN W = 0: RETURN
OG = 10:S4 = 0: S2 = 0:NI = 24:HI = ( OG - UG)/NI
M1 = NI - 1:L1 = NI - 2:FOR KK = 1 TO M1 STEP 2
X4 = UG + KK * HI:S4 = S4 + FN F(X4):NEXT KK
FOR KK = 2 TO L1 STEP 2
X2 = UG + KK * HI:S2 = S2 + FN F(X2)
NEXT KK:W = HI * (FN F(UG) + 4 *S4+2*S2+ FN F(OG))/3
RETURN

```