

EJEMPLOS SOBRE LA TEORÍA ESPECTRAL DE
SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

SULPICIO VÁZQUEZ BAXCAJAY

TESIS

Presentada como Requisito Parcial para
Obtener el Grado de:

MAESTRO EN
ESTADÍSTICA APLICADA



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA
“ANTONIO NARRO”
PROGRAMA DE GRADUADOS
Buenavista, Saltillo, Coahuila, México
Septiembre de 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA ANTONIO NARRO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO

EJEMPLOS SOBRE LA TEORÍA ESPECTRAL DE
SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

TESIS

Por:

SULPICIO VÁZQUEZ BAXCAJAY

Elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y aprobada
como requisito parcial, para optar al grado de

MAESTRO PROFESIONAL
EN ESTADÍSTICA APLICADA

C o m i t é P a r t i c u l a r

Asesor principal:

Dr. Rolando Cavazos Cadena

Asesor:

Dr. Mario Cantú Sifuentes

Asesor:

M. C. Félix de Jesús Sánchez Pérez

Dr. Jerónimo Landeros Flores

Director de Postgrado

Buenavista, Saltillo, Coahuila, Septiembre de 2010

AGRADECIMIENTOS

A Dios quien siempre fue una fuerte y alentadora compañía, con lo cual me ha dado fuerzas para llegar hasta este momento.

A mis Padres Jeronimo Vázquez y Hortencia Baxcajay por confiar en mí.

Al Doctor Rolando Cavazos Cadena por su dedicación y empeño, por entregarnos lo mejor de sus conocimientos.

Al Doctor Mario Cantú Sifuentes por sus consejos y su versatilidad.

A mis compañeros Julio Chacón y Nadia Martínez por su amistad, responsabilidad y diligencia.

DEDICATORIA

Al único y sabio Dios, nuestro Salvador, sea gloria y majestad, imperio y potencia, ahora y por todos los siglos. Amén Jud 1:25

COMPENDIO
EJEMPLOS SOBRE LA TEORÍA ESPECTRAL DE
SERIES DE TIEMPO ESTACIONARIAS

Por

SULPICIO VÁZQUEZ BAXCAJAY

MAESTRÍA PROFESIONAL
EN ESTADÍSTICA APLICADA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA
ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, Septiembre de 2010

Dr. Rolando Cavazos Cadena –Asesor–

Palabras clave: Procesos de incrementos ortogonales, Integral estocástica, Función de distribución espectral, Filtros lineales, Teorema de Herglotz.

Este trabajo trata sobre la teoría espectral de series de tiempo estacionarias. El resultado fundamental en este campo es que cada serie estacionaria puede representarse mediante una integral estocástica respecto a un proceso de incrementos ortogonales, y que la correspondiente función de autocovarianza es la transformada de Fourier de la función de distribución asociada a dicho proceso. Estos aspectos se ilustran mediante el análisis detallado de un conjunto de 28 ejemplos, que abarcan temas como la caracterización de una función de autocovarianza cuadrado sumable, la existencia de procesos ARMA, el diseño de filtros lineales para disminuir la variabilidad de una serie, y la generación de nuevos procesos de incrementos ortogonales a partir de uno dado.

ABSTRACT

EXAMPLES ON THE SPECTRAL THEORY FOR STATIONARY TIME SERIES

BY

SULPICIO VÁZQUEZ BAXCAJAY

MASTER

APPLIED STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA AGRARIA
ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA, September, 2010

Dr. Rolando Cavazos Cadena –Advisor–

Key Words: Orthogonal increment processes, Stochastic integral, Spectral distribution function, Linear filters, Herglotz's theorem.

This work concerns the spectral theory of time series with discrete time parameter. The key result in this area states that every stationary time series with null mean can be represented as a stochastic integral with respect to an orthogonal increment process, and that the corresponding autocovariance function is the Fourier transform of the distribution function of the process. These topics are illustrated using 28 examples which are analyzed in detail, covering diverse aspect of the theory, ranging from the spectral characterization of an square sumable autocovariance function, the existence of ARMA processes, the design of linear filters, and the generation of new orthogonal processes from a given one.

ÍNDICE DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 El Tema de Trabajo	1
1.2 Procesos de Incrementos Ortogonales	4
1.3 Interpretación de la Representación Integral	10
1.4 Los Objetivos Principales	11
1.5 La Organización	13
2. LA FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA	15
2.1 La Condición de no Negatividad	15
2.2 Representación Espectral	19
2.3 Varianza y Función de Densidad Espectral	24
2.4 Teorema de Herglotz	26
3. DISTRIBUCIÓN ESPECTRAL Y FILTROS LINEALES	30
3.1 Filtros Lineales	30
3.2 Cálculo de Densidades Espectrales	34
3.3 Aproximación de Densidades Espectrales	38
3.4 Operadores de Diferencia	45
3.5 Diseño de un filtro	48
3.6 Una Función de Distribución Espectral sin Densidad	50
3.7 Análisis de un Proceso con Espectro Discreto	52
4. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA SERIE	56
4.1 Continuidad por la Derecha	56
4.2 Representación Integral de un Proceso Transformado	61
4.3 Generación de Procesos con Incrementos Ortogonales	63
4.4 Existencia de Procesos ARMA	71
4.5 Representación Causal	74

4.6 Procesos con Función de Ditrribución Simétrica	77
4.7 Un Ejemplo Sobre Movimiento Browniano	81
4.8 Aproximación de un Salto	85
LITERATURA CITADA	88

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Este capítulo se describe el tema de este trabajo, se plantean los objetivos que se pretenden alcanzar, y se presentan los resultados fundamentales que forman la base del desarrollo subsecuente, finalizando con una descripción de la forma en que la presentación de resultados ha sido organizada.

1.1. El Tema de Trabajo

Este trabajo trata sobre el análisis de series de tiempo estacionarias, y el tema principal es la *representación espectral* de tal proceso como una integral estocástica. Intuitivamente, dicha representación descompone la serie observada en una suma de impulsos periódicos con coeficientes aleatorios, y es de gran utilidad para entender las oscilaciones de la serie, así como para diseñar transformaciones que disminuyan la variabilidad de la serie. A continuación se describen con más detalle las ideas de series de tiempo y el carácter estacionario de la misma, mientras que la representación espectral se analiza en la siguiente sección.

En términos generales, una *serie* (o proceso) *de tiempo* es una sucesión $\{X_t\}$ de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, donde la variable aleatoria X_t se interpreta como la observación que se realiza en el tiempo t , el cual, en este trabajo, se supondrá que puede ser cualquier número entero. En contraste con un supuesto común en la teoría estadística clásica (Borovkov, 1999; Dudewicz y Mishra, 1998; Shao, 2010; Wackerly *et al.*, 2009),

no se supone la independencia de las variables X_t , ni que éstas tengan la misma distribución, características que permiten incluir en el estudio una gran variedad de observaciones que surgen en la práctica, como las ventas diarias de un almacén, la asistencia semanal a teatros, la población de un país, o la aparición de manchas solares (Brockwell y Davis, 1998, Shumway y Stoffer, 2006, Chacón Hernández, 2010). Por otro lado, se supondrá que todas las series consideradas pueden tomar valores complejos, lo cual no excluye la posibilidad de que sólo asuman valores reales.

Una serie de tiempo $\{X_t\}$ se llama *estacionaria* cuando, para todo entero h , las propiedades relevantes de un segmento (X_1, X_2, \dots, X_n) son las mismas que las del segmento trasladado $(X_{1+h}, X_{h+2}, \dots, X_{n+h})$. Como no se imponen condiciones sobre la distribución de las variables X_t , el término ‘relevante’ se refiere a las propiedades de primero y segundo orden: más explícitamente, una serie $\{X_t\}$ es estacionaria si satisface los siguientes dos requerimientos:

- (i) Todas las variables X_t tienen la misma media y la misma varianza: $E[X_t] = \mu$ y $E[|X_t|^2] = E[X_t \overline{X_t}]$ son finitos y no dependen de t ,
- (ii) La varianza de la diferencia $X_s - X_t$, es la misma que la de $X_{s+h} - X_{t+h}$ para todo entero h ; recuerde que la varianza de una variable aleatoria Y con valores complejos se define mediante
$$\text{Var}(Y) = E[(Y - \mu_Y)(\overline{Y - \mu_Y})]$$

Estas dos condiciones equivalen a las siguientes propiedades (a) y (b):

- (a) $E[X_t] = \mu$ no depende de t ;
- (b) Para cada s y t , $\text{Cov}(X_s, X_t) = E[(X_s - \mu)(\overline{X_t - \mu})]$ está bien definida y depende sólo de la diferencia entre s y t .

Debido a que si $\{X_t\}$ es una serie estacionaria, entonces $\{X_t - \mu\}$ también lo es, en este trabajo se supondrá, sin pérdida de generalidad, que la esperanza de

X_t es nula. La propiedad (b) anterior permite definir la función de autocovarianza asociada a la serie estacionaria $\{X_t\}$ mediante:

$$\gamma(h) = E[X_{t+h}\overline{X}_t], \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.1)$$

Para una serie estacionaria, en el sentido recién definido, no es difícil ver que para cada entero h y cada entero positivo n ,

$$E[(X_1, X_2 \dots, X_n)'] = E[(X_{1+h}, X_{2+h} \dots, X_{n+h})']$$

y

$$\text{Var}[(X_1, X_2 \dots, X_n)'] = \text{Var}[(X_{1+h}, X_{2+h} \dots, X_{n+h})']$$

de manera que los segmentos $(X_1, X_2 \dots, X_n)$ y $(X_{1+h}, X_{2+h} \dots, X_{n+h})$ tienen el mismo valor esperado y la misma matriz de varianzas; el análisis de una serie de tiempo estacionaria está basado en propiedades de segundo orden. El importante papel de las series estacionarias en el proceso de modelado de las series que ocurren en la práctica se discute en detalle en (Chacón Hernández, 2010).

Si (Ω, \mathcal{F}, P) es el espacio de probabilidad en que las componentes de la serie $\{X_t\}$ están definidas, entonces cada X_t pertenece al espacio

$$L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

de todas las variables aleatorias $Y : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ con segundo momento finito, es decir, $E[|Y|^2] < \infty$. En este espacio vectorial se define un producto interno mediante

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle = E[Y_1 \overline{Y}_2], \quad Y_1, Y_2 \in L^2, \quad (1.1.2)$$

y la norma correspondiente está dada por

$$\|Y\| = \sqrt{\langle Y, Y \rangle} = E[Y^2]^{1/2}; \quad (1.1.3)$$

note que con esta notación, la función de autocovarianza (1.1.1) está dada por

$$\gamma(h) = \langle X_{t+h}, X_t \rangle, \quad (1.1.4)$$

y la noción geométrica de ortogonalidad—expresada por $\langle X_{t+h}, X_t \rangle$ — corresponde con la idea estadística de ausencia de correlación, la cual equivale a $\gamma(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = 0$; para un estudio sobre los productos internos en espacios vectoriales, vea, por ejemplo, Hoffman y Kunze (1975), Graybill (2000, 2001), Harville (2008), Lipschutz (1995) o Strang (2003). Estas referencias tratan sobre el caso de espacios de dimensión finita, pero la intuición desarrollada en ese contexto es sumamente útil. Por otro lado, un estudio de los espacios L^2 puede encontrarse, por ejemplo, en Apostol (1980); Fulks (1980) o Khuri (2002). Con respecto a la norma (1.1.3), el espacio L^2 es un espacio métrico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente; para un análisis detallado de estas propiedades, vea, por ejemplo, Apostol (1980), Rudin (1984), o Royden (2003).

1.2. Procesos de Incrementos Ortogonales

En esta sección se enuncia el resultado sobre la representación de una serie estacionaria como una integral estocástica. Como punto de partida, a continuación se introduce la idea de proceso con incrementos ortogonales.

Definición 2.1. Una colección de variables aleatorias $\{Z(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]\}$ definidas en un mismo espacio de probabilidad se llama un proceso de incrementos ortogonales si

- (i) $Z(-\pi) = 0$ y cada variable tiene media nula y segundo momento finito;
- (ii) Para todos los números $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ se tiene que los incrementos $Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)$ y $Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3)$ son ortogonales:

$$\begin{aligned} & \langle Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1), Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3) \rangle = \\ & \text{Cov}(Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1), Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3)) = 0 \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, se supondrá además que el proceso $\{Z(\lambda)\}$ es continuo por la derecha esto es,

$$\|Z(\lambda + \delta) - Z(\lambda)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \delta \searrow 0; \quad (1.2.1)$$

vea el Ejemplo 4.1 del Capítulo 4. Dado un proceso de incrementos ortogonales, su función de distribución se define mediante

$$F_Z(\lambda) = \|Z(\lambda)\|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.2.2)$$

Note que si $-\pi \leq \lambda < \mu \leq \pi$ entonces, usando que $Z(-\pi) = 0$,

$$\begin{aligned} F_Z(\mu) &= \|Z(\mu)\|^2 \\ &= \|Z(\mu) - Z(\lambda) + Z(\lambda)\|^2 \\ &= \|[Z(\mu) - Z(\lambda)] + [Z(\lambda) - Z(-\pi)]\|^2 \\ &= \|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2 + \|Z(\lambda) - Z(-\pi)\|^2 \\ &= \|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2 + \|Z(\lambda)\|^2 \\ &= \|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2 + F_Z(\lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_Z(\mu) - F_Z(\lambda) = \|Z(\mu) - Z(\lambda)\|^2 = \text{Var}(Z(\mu) - Z(\lambda)) \geq 0, \quad (1.2.3)$$

mostrando que $F_Z(\cdot)$ es creciente; además, puesto que $Z(-\pi) = 0$, se tiene que $F_Z(-\pi) = 0$, mientras que (1.2.1) implica que $F_Z(\cdot)$ es continua por la derecha. De este modo, F_Z es una función de distribución genuina. Denote ahora por $L^2(F_Z)$ al espacio de todas las funciones cuadrado integrables respecto a F_Z , esto es,

$$L^2(F_Z) = \left\{ g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C} \text{ tal que } \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty \right\}.$$

Este espacio está dotado con el producto interno definido por

$$\langle g, g_1 \rangle_{L^2(F_Z)} = \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) \overline{g_1(\lambda)} dF_Z(\lambda)$$

Para definir la integral estocástica, considere una función g en $L^2(F_Z)$ de la forma escalonada:

$$g(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i I_{(\lambda_{i-1}, \lambda_i]}(\lambda), \quad (1.2.4)$$

donde

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \pi.$$

y recuerde que

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dF_Z(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i [F_Z(\lambda_i) - F_Z(\lambda_{i-1})]. \quad (1.2.5)$$

La integral estocástica de $g(\cdot)$ respecto al proceso $\{Z(\lambda)\}$ es la variable aleatoria definida como

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dZ(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})]. \quad (1.2.6)$$

Considere ahora otra función escalonada

$$\tilde{g}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i I_{(\lambda_{i-1}, \lambda_i]}(\lambda), \quad (1.2.7)$$

de manera que su integral respecto a $\{Z(\lambda)\}$ está dada por

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\lambda) dZ(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})]. \quad (1.2.8)$$

En este caso, el producto interno de ambas integrales está dado por

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\lambda) dZ(\lambda), \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dZ(\lambda) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})], \sum_{j=1}^{n-1} c_j [Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})] \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \langle \tilde{c}_i [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})], c_j [Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})] \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{c}_i \bar{c}_j \langle [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})], [Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})] \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i \bar{c}_i \langle [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})], [Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})] \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i \bar{c}_i \|Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i \bar{c}_i [F_Z(\lambda_i) - F_Z(\lambda_{i-1})]
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se debe a que $\{Z(\lambda)\}$ tiene incrementos ortogonales, y la relación (1.2.3) se usó para establecer la última igualdad. Observando que $\tilde{g}(\lambda)\overline{g(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i \bar{c}_i I_{(\lambda_{i-1}, \lambda_i]}(\lambda)$, se tiene que

$$\langle \tilde{g}, g \rangle_{L^2(F)} = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\lambda)\overline{g(\lambda)} dF_Z \lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{c}_i \bar{c}_i [F_Z(\lambda_i) - F_Z(\lambda_{i-1})],$$

(vea 1.2.5) y combinando esta igualdad con el desplegado precedente, se desprende que

Si $g, \tilde{g}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$ son dos funciones escalonadas

$$\left\langle \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(\lambda) dZ(\lambda), \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dZ(\lambda) \right\rangle = \langle \tilde{g}, g \rangle_{L^2(F_Z)} \quad (1.2.9)$$

Ahora, sea $G: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$ una función arbitraria en $L^2(F)$. Usando el hecho precedente, es posible verificar que, si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones escalonadas que converge a G en $L^2(F_Z)$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\lambda) dZ(\lambda)$ existe, y

entonces por definición, la integral estocástica de G respecto al proceso $\{Z(\lambda)\}$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(\lambda) dZ(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\lambda) dZ(\lambda). \quad (1.2.10)$$

Ahora sea \tilde{G} otra función en $L^2(F_Z)$ y seleccione una sucesión $\{\tilde{g}_n\}$ que converja a \tilde{G} en $L^2(F_Z)$, de manera que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}(\lambda) dZ(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}_n(\lambda) dZ(\lambda).$$

A continuación sustituya \tilde{g} y g por \tilde{g}_n y g_n , respectivamente, en (1.2.9). Tomando el límite conforme n tiende a ∞ en ambos lados de la igualdad resultante, se desprende que

$$\begin{aligned} &\text{Si } G, \tilde{G}: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C} \text{ son dos funciones en } L^2(F_Z) \\ &\left\langle \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{G}(\lambda) dZ(\lambda), \int_{-\pi}^{\pi} G(\lambda) dZ(\lambda) \right\rangle = \left\langle \tilde{G}, G \right\rangle_{L^2(F_Z)} \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Como consecuencia de esta relación, ahora se construirá una serie estacionaria mediante integrales estocásticas.

Teorema 1.2.1. Suponga que $\{Z(\lambda)\}$ es un proceso de incrementos ortogonales y defina una serie de tiempo $\{X_t\}$ como sigue:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En este caso, la series $\{X_t\}$ es estacionaria y su función de autocovarianza está dada por

$$\gamma_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_Z(\lambda), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Demostración. Usando (1.2.11) se desprende que

$$\begin{aligned}
 \langle X_{t+h}, X_t \rangle &= \left\langle \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+h)\lambda} dZ(\lambda), \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \right\rangle \\
 &= \left\langle e^{i(t+h)\lambda}, e^{it\lambda} \right\rangle_{L^2(F_Z)} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+h)\lambda} \overline{e^{it\lambda}} dF_Z(\lambda) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+h)\lambda} e^{-it\lambda} dF_Z(\lambda) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_Z(\lambda)
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \langle X_{t+h}, X_t \rangle$ no depende de t , y por lo tanto que $\{X_t\}$ es una serie estacionaria, y que

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_Z(\lambda)$$

concluyendo el argumento. □

El teorema de representación espectral es el recíproco de este resultado.

Teorema 1.2.2. [Representación Espectral]. Suponga que $\{X_t\}$ es una serie estacionaria. En este caso, existe un proceso de incrementos ortogonales $\{Z(\lambda)\}$ tal que

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2.12)$$

El proceso $\{Z(\lambda)\}$ es único.

Una demostración puede encontrarse en Brockwell y Davis (1998), o Fuller (1998).

1.3. Interpretación de la Representación Integral

Aunque calcular directamente la integral en (1.2.12) no es, en general, posible, sí se pueden estudiar sus propiedades aproximando a $e^{it\lambda}$ mediante funciones escalonadas. Seleccione puntos

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \pi$$

tales que $\lambda_j - \lambda_{j-1} = \Delta$ para todo j . Aproximando a $e^{it\lambda}$ por

$$\sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} I_{(\lambda_{j-1}, \lambda_j]}(\lambda),$$

se desprende que

$$\begin{aligned} X_t &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dZ(\lambda) \\ &\approx \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} I_{(\lambda_{j-1}, \lambda_j]}(\lambda) dZ(\lambda) \\ &= \sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} [Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie $\{X_t\}$ es aproximadamente igual a una suma de oscilaciones periódicas $e^{it\lambda_j}$ (de períodos $2\pi/\lambda_j$ y frecuencias $\lambda_j/[2\pi]$); la amplitud de la oscilación es aleatoria e igual a $[Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})]$. Además,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &\approx \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n e^{it\lambda_j} [Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})] \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Var}(Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^n \|Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n [F_Z(\lambda_j) - F_Z(\lambda_{j-1})] \end{aligned}$$

donde la aproximación se debe a (1.2.10), en la primera igualdad se utilizó que el proceso $\{Z(\lambda)\}$ tiene incrementos ortogonales, y en la última etapa la propiedad (1.2.3) de $F_Z(\cdot)$. Este argumento muestra que

- La contribución de la componente periódica $e^{it\lambda_i}[Z(\lambda_j) - Z(\lambda_{j-1})]$ a la variabilidad de X_t es $F_Z(\lambda_j) - F_Z(\lambda_{j-1})$.

Por lo tanto, $F_Z(\cdot)$ permite valorar la importancia de una componente periódica respecto a su influencia sobre la variabilidad de la serie. Si $F_Z(\lambda)$ tiene densidad, esto es, si

$$F_Z(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f_Z(\nu) d\nu$$

para alguna función $f_Z(\cdot)$, entonces (suponiendo que $f_Z(\cdot)$ es continua), $F_Z(\lambda_i) - F_Z(\lambda_{i-1}) \approx f(\lambda_i)[\lambda_i - \lambda_{i-1}] = f(\lambda_i)\Delta$ y entonces

- La contribución de la componente periódica $e^{t\lambda_i}[Z(\lambda_i) - Z(\lambda_{i-1})]$ a la variabilidad de X_t es (aproximadamente) $f(\lambda_i)[\lambda_i - \lambda_{i-1}] = f(\lambda_i)\Delta$

Así, la importancia de una componente periódica $e^{it\lambda_j}$ respecto a su influencia sobre la variabilidad de la serie es (aproximadamente) proporcional a la densidad evaluada en λ_j , esto es, $f_Z(\lambda_j)$. Esta observación es importante si se desea diseñar una transformación que disminuya la variabilidad de la serie $\{X_t\}$ aplicando una transformación (filtro) cuyo efecto sea disminuir notablemente el valor de $f(\lambda)$ en un punto determinado.

1.4. Los Objetivos Principales

Como se desprende de la exposición en las dos secciones anteriores, la representación espectral de un proceso estacionario es un tema importante e interesante en el análisis de series de tiempo. Sin embargo, su formulación y estudio es sofisticado y requiere de técnicas analíticas complejas. Esta observación originó el principal objetivo de este trabajo:

Ilustrar la teoría de la representación espectral de una serie estacionaria mediante ejemplos detalladamente analizados.

La idea detrás de este propósito es entender las nociones básicas de la teoría de representación espectral, y contribuir a un mejor entendimiento del tema. Dentro del objetivo general planteado, se formularon las siguientes metas específicas.

- (i) Caracterizar a las funciones de autocovarianza de un proceso estacionario mediante la teoría espectral, proporcionando un criterio que sea más fácil de verificar que la propiedad de no negatividad que caracteriza a una función de autocovarianza.
- (ii) Determinar el proceso de incrementos ortogonales y la correspondiente función de distribución espectral de un proceso $\{Y_t\}$ obtenido a partir de una serie estacionaria $\{X_t\}$ mediante la aplicación de un filtro lineal.
- (iii) Utilizar la teoría de representación espectral para analizar la existencia de procesos ARMA y mostrar la existencia de una representación causal para dichos procesos.
- (iv) Estudiar la relación entre una serie estacionaria $\{X_t\}$ y el proceso de incrementos ortogonales, utilizando la serie para determinar, al menos aproximadamente, características como el salto del proceso $\{Z(\lambda)\}$ en un punto λ_0 , esto es, $Z(\lambda_0) - Z(\lambda_0-)$.

La principal contribución de este trabajo, es la presentación de un análisis detallado de un conjunto de 28 ejemplos sobre la teoría espectral de un proceso estacionario, los cuales forman el conjunto de problemas propuestos en el capítulo 4 de Brockwell y Davis (1998). Finalmente, es oportuno señalar que en los ejemplos que requieren cálculos numéricos o gráficas, se proporciona el código en lenguaje *R* de los métodos utilizados.

1.5. La Organización

La presentación de este trabajo ha sido organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2, se establecen dos criterios para decidir si una función definida sobre los números enteros es una función de autocovarianza asociada a un proceso estacionario en tiempo discreto. La primera caracterización se da en términos de la propiedad de no negatividad, y la segunda, es un criterio integral que, intuitivamente, expresa que la clase de funciones de autocovarianza consiste de funciones exponenciales de la forma $\gamma(k) = e^{ik\omega}$ para algún número real ω fijo, de combinaciones lineales con coeficientes positivos de funciones de esa forma, o de límites de estas combinaciones lineales; este es el contenido del teorema espectral para funciones de autocovarianza. El capítulo concluye con una discusión de teorema de Herglotz.

En el Capítulo 3 se estudia el problema de determinar la función de distribución espectral de un proceso $\{Y_t\}$ que se obtiene a partir de una serie estacionaria $\{X_t\}$ mediante la aplicación de un filtro lineal. Suponiendo conocida la función de distribución espectral de $\{X_t\}$, se determina la correspondiente función F_Y de la serie transformada en términos de los coeficientes del filtro. Como aplicación, se encuentra la densidad espectral de un proceso ARMA, y se demuestra que para que un proceso estacionario satisfaga el sistema de ecuaciones ARMA, es necesario que el polinomio autorregresivo correspondiente no tenga raíces sobre el círculo unitario.

Finalmente, en el Capítulo 5 se estudia la representación de una serie de tiempo $\{X_t\}$ como una integral estocástica respecto a un proceso de incrementos ortogonales $\{Z(\lambda)\}$. El estudio incluye, tanto ejemplos sobre las propiedades de un proceso de incrementos ortogonales por sí mismo, como consecuencias de la representación de $\{X_t\}$. Los temas analizados son, entre otros,

- (i) La generación de un proceso de incrementos ortogonales continuo por la

derecha a partir de otro que no necesariamente lo es,

- (ii) La representación integral de un proceso que se obtiene a partir de $\{X_t\}$ mediante un filtro lineal,
- (iii) La generación de nuevos procesos de incrementos ortogonales a partir de uno dado, y
- (iv) Análisis de la existencia de procesos ARMA usando técnicas de representación espectral.

CAPÍTULO 2

LA FUNCIÓN DE AUTOCOVARIANZA

En este capítulo se establecen dos criterios para decidir si una función definida sobre los números enteros es una función de autocovarianza asociada a un proceso estacionario en tiempo discreto. La primera caracterización muestra que la propiedad de no negatividad caracteriza a las funciones de autocovarianza, y la segunda, es un criterio integral que, intuitivamente, expresa que la clase de funciones de autocovarianza consiste de funciones exponenciales de la forma $\gamma(k) = e^{ik\omega}$ para algún número real ω fijo, de combinaciones lineales con coeficientes positivos de funciones de esa forma, o de límites de estas combinaciones lineales; este es el contenido del teorema espectral para funciones de autocovarianza. Las ideas se ilustran con ejemplos detalladamente analizados.

2.1. La Condición de no Negatividad

Como ya se ha mencionado, la función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ de un proceso estacionario $\{X_t\}$ captura las propiedades de segundo orden de la serie y desempeña un papel fundamental en el análisis. En el ejemplo de esta sección, se establecen las propiedades básicas de una función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$, en particular, la propiedad de ser *nonegativa definida*, la cual tiene el siguiente significado:

Para todos los enteros t_1, t_2, \dots, t_k y para todos los números complejos a_1, \dots, a_k ,

$$\sum_{i,j=1}^k a_i \gamma(t_i - t_j) \bar{a}_j \geq 0 \quad (2.1.1)$$

Esta propiedad es muy importante, pues caracteriza a las funciones de autocovarianza.

Teorema 2.1.1. Una función $\gamma(\cdot)$ (con valores posiblemente complejos) definida en los enteros es la función de autocovarianza de un proceso estacionario si y sólo si, la condición (2.1.1) se satisface.

La parte ‘si’ se demostrará en el siguiente ejemplo. Para demostrar la parte ‘sólo si’, dada una función que satisface (2.1.1) debe establecerse la existencia de una serie estacionaria $\{X_t\}$ cuya función de autocovarianza sea $\gamma(\cdot)$, conclusión que puede obtenerse a partir de un resultado general y profundo conocido como el teorema de existencia de Kolmogorov; vea, por ejemplo, Billingsley (1995), Brockwell y Davis (1998), o Fuller (1998)

Ejemplo 2.1.1. Si $\gamma(\cdot)$ es la función de autocovarianza de un proceso estacionario de valor complejo, muestre que

- (i) $\gamma(0) \geq 0$,
- (ii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$,
- (iii) $\gamma(h) = \overline{\gamma(-h)}$, y
- (iv) $\gamma(\cdot)$ es no negativa definida; vea (2.1.1).

Solución. Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario de valor complejo con media cero, y sea $\gamma(\cdot)$ su correspondiente función de autocovarianza. En este caso, para cada entero t :

$$\gamma(h) = E[X_{t+h}\overline{X_t}], \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A partir de esta especificación,

- (i) $\gamma(0) = E[X_t\overline{X_t}] = E[|X_t|^2] \geq 0$;
- (ii) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
|\gamma(h)| &= |E[X_{t+h}\overline{X_t}]| \\
&\leq E[|X_{t+h}|^2]^{1/2} E[|X_t|^2]^{1/2} \\
&\leq \gamma(0)^{1/2} \gamma(0)^{1/2} \\
&\leq \gamma(0)
\end{aligned}$$

(iii) $\overline{\gamma(h)} = \overline{E[X_{t+h}\overline{X_t}]} = E[\overline{X_{t+h}}X_t] = E[X_{t+h-h}\overline{X_{t+h}}]$; a partir de esta relación, el carácter estacionario de $\{X_t\}$ implica que $\overline{\gamma(h)} = E[X_{t-h}\overline{X_t}] = \gamma(-h)$, esto es, $\gamma(h) = \overline{\gamma(-h)}$.

(iv) Dados los enteros t_1, t_2, \dots, t_k y los números complejos a_1, \dots, a_k , se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^k a_i \gamma(t_i - t_j) \overline{a_j} &= \sum_{i,j=1}^k a_i E[X_{t_i} \overline{X_{t_j}}] \overline{a_j} \\
&= E \left[\sum_{i=1}^k a_i X_{t_i} \overline{\sum_{j=1}^k a_j X_{t_j}} \right] \\
&= E \left[\left| \sum_{i=1}^k a_i X_{t_i} \right|^2 \right] \geq 0
\end{aligned}$$

mostrando que $\gamma(\cdot)$ es no negativa definida. \square

El Teorema 2.1.1 permite establecer dos propiedades básicas de una función de autocovarianza:

Corolario 2.1.1.

(i) Suponga que $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \dots, \gamma_n(\cdot)$ son funciones de autocovarianza de procesos estacionarios. En este caso, si c_1, c_2, \dots, c_n son constantes no negativas, entonces

$$\sum_{r=1}^n c_r \gamma_r(\cdot) = c_1 \gamma_1(\cdot) + c_2 \gamma_2(\cdot) + \dots + c_n \gamma_n(\cdot)$$

es una función de autocovarianza.

(ii) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(\cdot) = \gamma(\cdot)$, entonces $\gamma(\cdot)$ es una función de autocovarianza.

Demostración.

(i) Por el Teorema 2.1.1, es suficiente establecer que $\sum_{r=1}^n c_r \gamma_r(\cdot)$ es no negativa definida. Dados números enteros t_1, t_2, \dots, t_k y números complejos a_1, \dots, a_k arbitrarios, observe que

$$\sum_{i,j=1}^k a_i \left[\sum_{r=1}^n c_r \gamma_r(t_i - t_j) \right] \bar{a}_j = \sum_{r=1}^n c_r \left[\sum_{i,j=1}^k a_i \gamma_r(t_i - t_j) \bar{a}_j \right] \geq 0,$$

donde la desigualdad se debe a que cada función $\gamma_r(\cdot)$ es no negativa definida y las constantes c_r son mayores o iguales a cero. Por lo tanto $\sum_{r=1}^n c_r \gamma_r(\cdot)$ es no negativa definida y, en consecuencia, es una función de autocovarianza.

(ii) Ahora suponga que $\gamma(\cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(\cdot)$ donde cada $\gamma_n(\cdot)$ es una función no negativa definida. En este caso,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^k a_i \gamma(t_i - t_j) \bar{a}_j &= \sum_{i,j=1}^k a_i \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t_i - t_j) \bar{a}_j \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^k a_i \gamma_n(t_i - t_j) \bar{a}_j \geq 0. \end{aligned}$$

Luego, $\gamma(\cdot)$ es no negativa definida, y esto implica que es una función de autocovarianza, por el Teorema 2.1.1. \square

2.2. Representación Espectral

El ejemplo fundamental de una función no negativa definida es

$$\gamma(h) = e^{ih\omega}, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (2.2.1)$$

donde ω es un número real fijo. Debido a que $e^{ih\omega} = e^{ih[\omega - 2\pi]}$, sin pérdida de generalidad puede suponerse que $\omega \in (-\pi, \pi]$. Para verificar que esta función es no negativa definida, note que para enteros t_1, \dots, t_n y números complejos a_1, \dots, a_n ,

$$\begin{aligned} \sum_{r,j=1}^k a_r e^{i(t_r - t_j)\omega} \bar{a}_j &= \sum_{r,j=1}^k a_i e^{it_r\omega} \overline{a_j e^{it_j\omega}} \\ &= \sum_{r=1}^k a_r e^{it_r\omega} \overline{\sum_{r=1}^k a_r e^{it_r\omega}} \\ &= \left| \sum_{r=1}^k a_r e^{it_r\omega} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Considere ahora una función continua

$$f(\lambda) \geq 0, \quad \lambda \in (-\pi, \pi). \quad (2.2.2)$$

y seleccione puntos

$$-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \pi$$

A partir de la definición de integral, se desprende que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{t\lambda} f(\lambda) d\lambda = \lim_{\max\{\lambda_i - \lambda_{i-1}\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i} f(\lambda_i) (\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

Puesto que cada función

$$g(t) = \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i} f(\lambda_i) (\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

es no negativa definida—por el Corolario 2.1.1— se sigue que

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{t\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

también es una función no negativa definida. Un recíproco de esta afirmación es cierto.

Teorema 2.2.1. Sea $\gamma(\cdot)$ una función definida en los enteros y suponga que es cuadrado sumable, esto es,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)|^2 < \infty \quad (2.2.3)$$

En este caso, $\gamma(\cdot)$ es una función de covarianza si y sólo si, existe una función $f \geq 0$ tal que

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.2.4)$$

Más aún, la función $f(\cdot)$ en esta expresión está unívocamente determinada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\lambda k}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi] \quad (2.2.5)$$

Definición 2.1. Si $\gamma(\cdot)$ es una función de autocovarianza y se expresa como en (2.2.4), entonces $f(\lambda)$ se llama la *densidad espectral* de $\gamma(\cdot)$. La función de distribución espectral está dada por

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\nu) d\nu. \quad (2.2.6)$$

El Teorema 2.2.1 se desprende de la teoría general de series de Fourier (Apostol, 1980), y una demostración bajo condiciones ligeramente mas fuertes que (2.2.3) puede encontrarse en Brockwell y Davis (1998). Note que en términos de la función de distribución espectral, la expresión integral (2.2.4), se puede escribir como

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda). \quad (2.2.7)$$

A partir del teorema anterior es posible establecer un criterio para decidir si una función $\gamma(\cdot)$ cuadrado sumable es una función de autocovarianza o no.

Corolario 2.2.1. Suponga que la función $\gamma(\cdot)$ está definida en los enteros y que satisface la condición (2.2.3). En este caso, $\gamma(\cdot)$ es la función de autocovarianza de un proceso estacionario si y sólo si

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\lambda k} \geq 0, \quad \text{para todo } \lambda \in (-\pi, \pi].$$

Este criterio permite estudiar problemas cuyo tratamiento sería complicado si se abordaran directamente con el criterio de no negatividad. Dos casos sencillos aparecen a continuación.

Ejemplo 2.2.1. Decida si la siguiente función es una función de autocovarianza de un proceso estacionario:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & \text{si } h = 0, \\ -.5, & \text{si } h = \pm 2, \\ -.25, & \text{si } h = \pm 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Solución. Recuerde que una función cuadrado sumable $\gamma(\cdot)$ es una función de autocovarianza si, y sólo si $f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{ih\lambda} \geq 0$ para cada $\lambda \in (-\pi, \pi]$. Para aplicar este criterio al presente caso, note que $f(\lambda)$ está dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} [1 - \cos(2\lambda) - .5 \cos(3\lambda)].$$

Observando que $f(0) = -.5/(2\pi) < 0$, se desprende que $\gamma(\cdot)$ no es una función de autocovarianza. □

Ejemplo 2.2.2. Si $0 < a < \pi$, use la ecuación $\gamma(h) = \int e^{ih\lambda} dF(\lambda)$ para mostrar que

$$\gamma(h) = \begin{cases} h^{-1} \sin(ah), & h = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ a, & h = 0 \end{cases}$$

es la función de autocovarianza de un proceso estacionario $\{X_n\}$. ¿Cuál es la densidad espectral de $\{X_t\}$?

Solución. Note que $\int_{-a}^a e^{it\lambda} d\lambda = e^{it\lambda}/[it] \Big|_{-a}^a = [e^{at} - e^{-at}]/[it] = 2 \sin(at)/t$ si $t \neq 0$, y $\int_{-a}^a d\lambda = 2a$. Así,

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{it\lambda} d\lambda = \begin{cases} \sin(at)/t, & t = \pm 1, \pm 2, \dots \\ a, & t = 0. \end{cases} = \gamma(t)$$

Esta igualdad puede escribirse como

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} I_{(-a,a)} d\lambda,$$

de donde se sigue que $\gamma(\cdot)$ es una función de autocovarianza con densidad espectral $f(\lambda) = I_{[-a,a]}(\lambda)/2$: su correspondiente función de distribución espectral es $F(\lambda) = (\lambda + a)/2$, $\lambda \in [-a, a]$, $F(\lambda) = 0$ para $\lambda < -a$ y $F(\lambda) = a$ si $\lambda > a$. \square

Ahora se estudiará un ejemplo que, en cierto sentido, trata del problema inverso al considerado en los ejemplos anteriores: se supone conocida la densidad espectral, y se busca determinar la función de autocovarianza.

Ejemplo 2.2.3. Determine la función de autocovarianza de un proceso con densidad espectral $f(\lambda) = (\pi - |\lambda|)/\pi^2$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$.

Solución. La función $f(\lambda) \geq 0$ es simétrica, así que la correspondiente función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ es real y está dada por

$$\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) [\pi - |\lambda|] d\lambda$$

Luego, $\gamma(0) = 1$, mientras que, para un entero $t \neq 0$, observando que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\lambda t) = 0$, el procedimiento de integración por partes conduce a

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} |\lambda| \cos(\lambda t) d\lambda \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \lambda \cos(\lambda t) d\lambda \\ &= -2 \frac{\cos(t\pi) - 1}{(\pi t)^2} = 2 \frac{1 - (-1)^t}{(\pi t)^2}. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es sencillo, pero extremadamente importante.

Ejemplo 2.2.4. Evalúe la densidad espectral de $\{Z_t\}$, donde

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Solución. La función de autocovarianza $\{Z_t\}$ esta dada por $\gamma_Z(t) = 0$, si $t \neq 0$ y $\gamma_Z(0) = \sigma^2$. Por tanto, la densidad espectral está determinada por $f(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(k) e^{i\lambda k} = (2\pi)^{-1} \sigma^2$. □

Para concluir esta sección, se enuncia un criterio para decidir si una función de autocovarianza es real.

Teorema 2.2.2. Suponga que $\gamma(\cdot)$ es una función de autocovarianza que satisface (2.2.3). En este caso, $\gamma(\cdot)$ es real si y sólo si, la correspondiente función de densidad es simétrica, esto es, $f(\lambda) = f(-\lambda)$ para todo $\lambda \in (-\pi, \pi)$, donde f está definida en (2.2.5).

Demostración. Note que $\gamma(\cdot)$ es real solamente cuando, para todo entero h

$$\gamma(h) = \overline{\gamma(h)}$$

Usando la representación espectral (2.2.4), esto equivale a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f(\lambda) d\lambda &= \overline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f(\lambda) d\lambda} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{ih\lambda} f(\lambda)} d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ih\lambda} f(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} f(-\nu) d\nu \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f(-\lambda) d\nu \end{aligned}$$

donde para establecer la penúltima igualdad se utilizó el cambio de variable $\lambda = -\nu$, y la última igualdad se debe simplemente a un cambio de notación de la variable de integración. Por lo tanto, $f(\lambda)$ y $f(-\lambda)$ tienen los mismos coeficientes de Fourier, y por lo tanto coinciden, pues dos funciones distintas no pueden tener los mismos coeficientes de Fourier (Apostol, 1980). \square

2.3. Varianza y Función de Densidad Espectral

Dadas dos series estacionarias, en esta sección se muestra que la densidad espectral de dos segmentos (X_1, \dots, X_n) y (Y_1, \dots, Y_n) puede compararse en términos de las densidades espectrales correspondientes. Por otro lado, si se tienen dos funciones de autocovarianza γ_1 y γ_2 , se exhibe explícitamente un proceso cuya función de autocovarianza es la suma $\gamma_1 + \gamma_2$.

Ejemplo 2.3.1. Si $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ son procesos estacionarios no correlacionados con funciones de distribución espectral F_X y F_Y , respectivamente, muestre que el proceso $\{Z_t = X_t + Y_t\}$ es estacionario y determine su función de distribución espectral.

Solución. Para verificar que $\{Z_t = X_t + Y_t\}$ es estacionario, observe que $E[X_t + Y_t] = E[X_t] + E[Y_t]$ es constante, puesto tanto $E[X_t]$ como $E[Y_t]$ lo son. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{t+h} + Y_{t+h}, X_t + Y_t] &= \text{Cov}[X_{t+h}, X_t] + \text{Cov}[X_{t+h}, Y_t] + \text{Cov}[Y_{t+h}, X_{t+h}] + \text{Cov}[Y_{t+h}, Y_t] \\ &= \text{Cov}[X_{t+h}, X_t] + 0 + 0 + \text{Cov}[Y_{t+h}, Y_t] \\ &= \gamma_X(h) + \gamma_Y(h) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe a que $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ no están correlacionados, mientras que la tercera igualdad se debe a que ambas series son estacionarias.

Así, la covarianza entre $X_{t+h} + Y_{t+h}$ y $X_t + Y_t$ no depende de t , mostrando que $\{X_t + Y_t\}$ es un proceso estacionario con función de autocovarianza $\gamma_X(\cdot) + \gamma_Y(\cdot)$. A continuación, usando las representaciones espectrales $\gamma_X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF_X(\lambda)$ y $\gamma_Y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF_Y(\lambda)$, se desprende que

$$\gamma_Z(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF_X(\lambda) + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d(F_X(\lambda) + F_Y(\lambda))$$

por lo que la función de distribución espectral de $\{Z_t\}$ está dada por $F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$. \square

Ejemplo 2.3.2. Sean $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ dos procesos estacionarios de media cero y densidades espectrales f_X y f_Y , respectivamente. Si $f_X(\lambda) \leq f_Y(\lambda)$ para todo $\lambda \in [-\pi, \pi]$, muestre que

- (a) $\Gamma_{n,\mathbf{Y}} - \Gamma_{n,\mathbf{X}}$ es una matriz no negativa definida, donde $\Gamma_{n,\mathbf{Y}}$ y $\Gamma_{n,\mathbf{X}}$ son las matrices de covarianza de $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ y $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ respectivamente, y
- (b) $\text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{X}) \leq \text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{Y})$ para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Solución. Note que para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{Y}) = \mathbf{b}'\Gamma_{n,\mathbf{Y}}\bar{\mathbf{b}} = \sum_{r,k=1}^n b_r \gamma_Y(r-k) b_k;$$

a partir de este punto, usando la representación espectral

$$\gamma_Y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f_Y(\lambda) d\lambda$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{Y}) &= \mathbf{b}'\Gamma_{n,\mathbf{Y}}\mathbf{b} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r,k=1}^n b_r e^{i\lambda(r-k)} b_k f_Y(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=1}^n b_r e^{i\lambda r} \overline{\sum_{k=1}^n b_k e^{i\lambda k}} f_Y(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{r=1}^n b_r e^{i\lambda r} \right|^2 f_Y(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{X}) = \mathbf{b}'\Gamma_{n,\mathbf{X}}\mathbf{b} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{r=1}^n b_r e^{i\lambda r} \right|^2 f_X(\lambda) d\lambda.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{Y}) - \text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{X}) &= \mathbf{b}'[\Gamma_{n,\mathbf{Y}} - \Gamma_{n,\mathbf{X}}]\mathbf{b} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{r=1}^n b_r e^{i\lambda r} \right|^2 [f_Y(\lambda) - f_X(\lambda)] d\lambda; \end{aligned}$$

puesto que $f_Y(\lambda) - f_X(\lambda) \geq 0$ para cada $\lambda \in [-\pi, \pi]$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, este último desplegado establece que

$$\text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{Y}) - \text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{X}) = \mathbf{b}'[\Gamma_{n,\mathbf{Y}} - \Gamma_{n,\mathbf{X}}]\mathbf{b} \geq 0, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

mostrando que $\Gamma_{n,\mathbf{Y}} - \Gamma_{n,\mathbf{X}}$ es no negativa definida, y que tal propiedad es equivalente a $\text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{Y}) \geq \text{Var}(\mathbf{b}'\mathbf{X})$ para cada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. \square

2.4. Teorema de Herglotz

No todas las funciones de autocovarianza satisfacen la condición de (2.2.3).

Por ejemplo,

$$\gamma(h) = e^{ih\omega_0} \tag{2.4.1}$$

es una función de autocovarianza, pero $|\gamma(h)| = 1$ para todo h , de manera que la condición (2.2.3) no se cumple. Sin embargo, a pesar de esto, se verá a continuación que aún es posible representar a esta función, mediante una integral. Para establecer el resultado en esa dirección, es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 4.1.

- (i) Una función de distribución en $[-\pi, \pi]$ es una función F que satisface las siguientes propiedades:

- (a) $F(-\pi) = 0$ y $F(\pi) < \infty$;
- (b) F es no decreciente;
- (c) F es continua por la derecha, esto es,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} F(\lambda + \delta) = F(\lambda) \text{ para todo } \lambda \in [-\pi, \pi).$$

- (ii) Si $g(\lambda)$ es una función definida en $[-\pi, \pi]$, la integral de g respecto a F se especifica mediante

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dF(\lambda) = \lim_{\max\{\lambda_i - \lambda_{i-1}\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\lambda_i) [F(\lambda_i) - F(\lambda_{i-1})]$$

siempre y cuando el límite en la derecha exista; tal es el caso cuando g es continua, o sus puntos de discontinuidad forman un conjunto a lo sumo contable (Apostol, 1980).

Como ejemplo, suponga que

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda < \omega_0 \\ c, & \text{si } \lambda \geq \omega_0 \end{cases}$$

donde $c > 0$. En este caso, no es difícil ver que

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) dF(\lambda) = g(\omega_0) [F(\omega_0) - F(\omega_0-)] = g(\omega_0)c$$

En particular, seleccione $g(\lambda)$ como $e^{it\lambda}$, de manera que

$$e^{it\omega_0} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

así que la función de autocovarianza (2.4.1) sí se expresa mediante una integral.

El siguiente resultado, conocido como teorema de Herglotz, establece que *toda* función de autocovarianza de un proceso estacionario admite una presentación integral.

Teorema 2.4.1.

- (i) Una función $\gamma(\cdot)$ definida en los enteros es una función de autocovarianza si y sólo si, existe una función de distribución F en $[-\pi, \pi]$ tal que

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF(\lambda).$$

Esta función de distribución es única y se denomina *función de distribución espectral* de $\gamma(\cdot)$.

- (ii) $\gamma(\cdot)$ es real si y sólo si, $F(\cdot)$ es simétrica, en el siguiente sentido: para todo intervalo $(a, b] \subset [0, \pi)$

$$F(b) - F(a) = F(-a) - F(-b). \quad (2.4.2)$$

siempre y cuando $-a$ y $-b$ sean puntos de continuidad de $F(\cdot)$.

La condición (2.4.2) significa que F asigna ‘la misma masa’ a un conjunto $A \subset [0, \pi)$ y al correspondiente conjunto simétrico $-A \subset (-\pi, 0]$. Por ejemplo, la masa asignada a un punto $\omega \in (0, \pi]$ es $F(\omega) - F(\omega-)$, y si (2.4.2) se cumple debe tenerse que esa misma masa se asigna a $-\omega$.

Considere un ejemplo simple:

$$\tilde{\gamma}(h) = c_1 e^{ih\omega_1} + c_2 e^{ih\omega_2}$$

donde $\omega_1 < \omega_2$. Definiendo

$$\tilde{F}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda < \omega_1 \\ c_1, & \text{si } \omega_1 \leq \lambda < \omega_2 \\ c_1 + c_2, & \text{si } \omega_2 \leq \lambda \end{cases}$$

entonces, para todo entero h ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} d\tilde{F}(\lambda) = c_1 e^{ih\omega_1} + c_2 e^{ih\omega_2} = \tilde{\gamma}(h)$$

así que \tilde{F} es la función de distribución espectral de $\tilde{\gamma}$. Para que $\tilde{\gamma}$ sea real es necesario y suficiente que \tilde{F} asigne a cada pareja de conjuntos A y $-A$ la misma

masa. Como a $\{\omega_2\}$ se le asigna la masa c_2 (igual al salto de \tilde{F} en ω_2), debe tenerse que la masa c_2 también se le asigna a $-\omega_2$; pero entonces $-\omega_2 = \omega_1$ y $c_1 = c_2$; en estas circunstancias,

$$\tilde{\gamma}(h) = c_1 e^{ih\omega_1} + c_2 e^{ih\omega_2} = c_2 e^{-ih\omega_1} + c_2 e^{ih\omega_2} = 2c_2 \cos(h\omega_2).$$

CAPÍTULO 3

DISTRIBUCIÓN ESPECTRAL Y FILTROS LINEALES

En este capítulo se estudia el problema de determinar la función de distribución espectral de un proceso $\{Y_t\}$ que se obtiene a partir de una serie estacionaria $\{X_t\}$ mediante la aplicación de un filtro lineal. Suponiendo conocida la función de distribución espectral de $\{X_t\}$, se determina la correspondiente función F_Y de la serie transformada en términos de los coeficientes del filtro. Como aplicación, se encuentra la densidad espectral de un proceso ARMA, y se analizan casos concretos, gráfica y analíticamente, mostrando el código *R* que se utiliza en cada problema que requiere cálculos numéricos.

3.1. Filtros Lineales

En esta sección se estudia como determinar la función de distribución espectral asociada a un proceso $\{Y_t\}$ que se obtiene aplicando un filtro lineal a una serie dada $\{X_t\}$. Si $B = \{b_k\}$ es una sucesión sumable, esto es, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k| < \infty$, entonces el filtro lineal correspondiente se denota como (B) y su acción sobre la serie estacionaria $\{X_t\}$ se define mediante

$$(B)X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k X_{t-k}$$

En este caso, la serie filtrada $\{Y_t = (B)X_t\}$ también es estacionaria.

Teorema 3.1.1. Si $Y_t = (B)X_t$ para todo t , entonces las funciones de distribución espectral de $\{Y_t\}$ y $\{X_t\}$ se relacionan mediante

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |e^{-i\nu}|^2 dF_X(\nu), \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

donde

$$(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k z^k. \quad (3.1.1)$$

Demostración. La función de autocovarianza de $\{Y_t\}$ está dada por

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) &= \langle Y_{t+h}, Y_t \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} k X_{t+h-k}, \sum_{r=-\infty}^{\infty} r X_{t-r} \right\rangle \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \overline{r} \langle X_{t+h-k}, X_{t-r} \rangle \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \overline{r} \gamma_X(h+r-k) \end{aligned}$$

En términos de F_X , la función de autocovarianza γ_X satisface

$$\gamma_X(h+r-k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+r-k)\nu} dF_X(\nu)$$

y sustituyendo esta expresión en la igualdad precedente,

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \overline{r} \gamma_X(h+r-k) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \overline{r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+r-k)\nu} dF_X(\nu) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \overline{r} e^{i(h+r-k)\nu} dF_X(\nu) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{-ik\nu} \overline{r e^{-ir\nu}} e^{ih\nu} dF_X(\nu) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{-ik\nu} \right] \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \overline{r e^{-ir\nu}} \right] e^{ih\nu} dF_X(\nu) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{-ik\nu} \right] \overline{\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} r e^{-ir\nu} \right]} e^{ih\nu} dF_X(\nu) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{-ik\nu} \right|^2 dF_X(\nu) \end{aligned}$$

y entonces, vía (3.1.1),

$$\gamma_Y(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} |e^{-i\nu}|^2 dF_X(\nu).$$

Definiendo

$$F_Y(\nu) = \int_{-\pi}^{\nu} |e^{-i\lambda}|^2 dF_X(\lambda),$$

se sigue que $dF_Y(\nu) = |e^{-i\nu}|^2 dF_X(\nu)$, y entonces

$$\gamma_Y(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} dF_Y(\nu).$$

Por lo tanto, F_Y es la función de distribución espectral de γ_Y . □

Corolario 3.1.1. Si $Y_t = (B)X_t$ y el proceso $\{X_t\}$ tiene densidad espectral $f_X(\lambda)$, entonces el proceso filtrado $\{Y_t\}$ también tiene densidad espectral dada por $f_Y(\lambda) = |e^{-i\lambda}|^2 f_X(\lambda)$

Demostración. Sólo observe que

$$F_Y(\nu) = \int_{-\pi}^{\nu} |e^{-i\lambda}|^2 dF_X(\lambda) = \int_{-\pi}^{\nu} |e^{-i\lambda}|^2 f_X(\lambda) d\lambda$$

y entonces la densidad correspondiente a F_Y es

$$f_Y(\nu) = \frac{dF_Y(\nu)}{d\nu} = |e^{-i\nu}|^2 f_X(\nu),$$

concluyendo el argumento. □

Como consecuencia de este corolario, ahora se determinará la densidad espectral de un proceso ARMA.

Corolario 3.1.2.

- (i) Si $Y_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$ donde $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, entonces, la densidad espectral de $\{Y_t\}$ es

$$f_Y(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\theta(e^{-i\lambda})|^2$$

donde $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$. El proceso $\{Y_t\}$ es una serie de promedios móviles de orden q , y $\theta(z)$ es el polinomio de promedios móviles.

- (ii) Suponga que la series estacionaria satisface

$$Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

donde

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Entonces, la densidad espectral de $\{Y_t\}$ es

$$f_Y(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}$$

donde $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ y $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$. El proceso $\{Y_t\}$ es una serie autorregresiva y de promedios móviles de orden (p, q) ; de forma más compacta, ARMA(p, q).

Demostración.

- (i) Como $\{Y_t\}$ se obtiene de $\{Z_t\}$ aplicando el filtro con coeficientes $k = \theta_k, k = 1, 2, \dots, q, \quad 0 = 1$ y $r = 0$ para $r < 0$ o $r > q$, el resultado se desprende de inmediato del corolario precedente.
- (ii) Considere las funciones de distribución espectral F_Y y F_Z de los procesos $\{Y_t\}$ y $\{Z_t\}$, respectivamente. La función de distribución espectral de $U_t = \theta(B)Z_t$ y $V_t = \phi(B)Y_t$ están determinadas por
- $$dF_U(\lambda) = |\theta(e^{-i\lambda})|^2 dF_Z(\lambda), \quad \text{y} \quad dF_V(\lambda) = |\phi(e^{-i\lambda})|^2 dF_Y(\lambda),$$

respectivamente.

Como $V_t = U_t$, se desprende que

$$|\phi(e^{-i\lambda})|^2 dF_Y(\lambda) = |\theta(e^{-i\lambda})|^2 dF_Z(\lambda)$$

y entonces, ya que $\phi(z) \neq 0$ cuando $|z| = 1$ (Chacón Hernández, 2010) se tiene que

$$dF_Y(\lambda) = \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2} dF_Z(\lambda)$$

Como $dF_Z(\lambda) = [\sigma^2/(2\pi)]d\lambda$, se concluye que

$$\frac{dF_Y(\lambda)}{d\lambda} = \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2} \frac{\sigma^2}{2\pi},$$

concluyendo la demostración. □

3.2. Cálculo de Densidades Espectrales

En esta sección se ilustra la aplicación del Teorema 3.1.1 calculando la densidad espectral en casos concretos. El primer ejemplo trata sobre una deducción alternativa de la densidad espectral de un proceso ARMA. Posteriormente, se gráfica y estudia , la serie de manchas solares de Wölfer, la cual es una serie muy utilizada en la literatura (Brockwell y Davis, 1998, Fuller, 1998).

Ejemplo 3.2.1. Sea $\{X_t\}$ el proceso ARMA (p, q) definido por

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

donde $\phi(z)$ y $\theta(z)$ tienen coeficientes reales y $\phi(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbf{C}$ con $|z| = 1$. Recuerde ahora los siguientes resultados (Brockwell y Davis 1998, Shumway y Stoffer 1998):

(i) Existe un número $r > 1$ tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)z^k = \sigma^2 \frac{\theta(z)\theta(z^{-1})}{\phi(z)\phi(z^{-1})}, \quad r^{-1} < |z| < r,$$

donde la serie converge absolutamente en la región especificada.

(ii) Una serie estacionaria $\{W_t\}$ con función de covarianza absolutamente sumable tiene una densidad espectral si y solo si,

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_W(k)e^{-i\lambda k} \geq 0$ para toda $\lambda \in [-\pi, \pi]$, y en este caso la densidad espectral de $\{W_t\}$ es

$$f_W(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_W(k)e^{-i\lambda k}.$$

Combine ambos resultados para deducir que $\{X_t\}$ tiene una densidad espectral, y para expresar dicha densidad en términos de σ^2 , $\theta(\cdot)$ and $\phi(\cdot)$.

Solución. Por el resultado (i), la función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ de $\{X_t\}$ es absolutamente sumable, y

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)e^{-i\lambda k} = \sigma^2 \frac{\theta(e^{-i\lambda})\theta(e^{i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})\phi(e^{i\lambda})}.$$

Como los coeficientes de $\theta(z)$ y $\phi(z)$ son reales, se sigue que $\theta(e^{i\lambda}) = \overline{\theta(e^{-i\lambda})}$ y $\phi(e^{i\lambda}) = \overline{\phi(e^{-i\lambda})}$, así que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)e^{-i\lambda k} = \sigma^2 \frac{\theta(e^{-i\lambda})\overline{\theta(e^{-i\lambda})}}{\phi(e^{-i\lambda})\overline{\phi(e^{-i\lambda})}} = \sigma^2 \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2} \geq 0.$$

Por consiguiente, el resultado (ii) implica que $\{X_t\}$ tiene densidad espectral $f_X(\lambda)$ la cual está dada por

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sigma^2 \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

□

El siguiente ejemplo analiza la densidad espectral de una serie autorregresiva de segundo orden ajustada a un conjunto de datos sobre las manchas solares.

Ejemplo 3.2.2. Considere la serie $\{X_t\}$ de manchas solares de Wölfer (la cual es una serie clásica). Denote por $\{Y_t\}$ a la serie de media nula $Y_t = X_t - 46.93$, $t = 1, 2, \dots, 100$ obtenida restando la media muestral de los datos originales. El siguiente modelo AR(2) para $\{Y_t\}$ se obtuvo igualando las covarianzas teóricas y muestrales en $h = 0, 1, 2$:

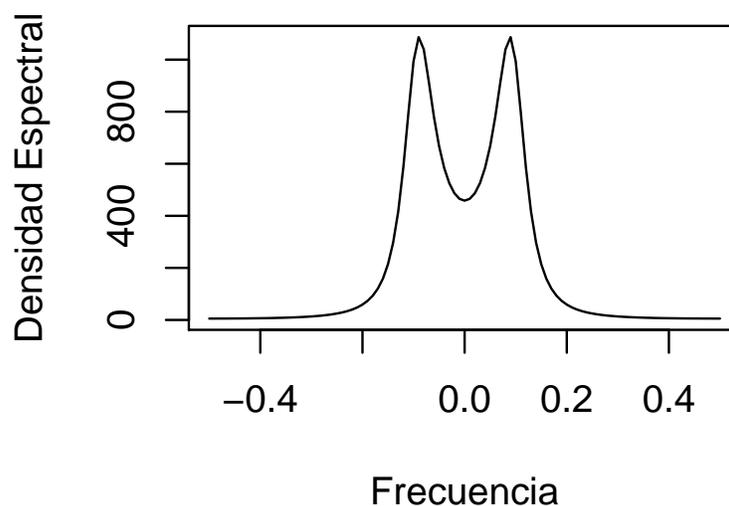
$$Y_t - 1.37Y_{t-1} + .634Y_{t-2} = Z_t, \quad \{W_t\} \sim WN(0, 289.3).$$

(Estas estimaciones de los coeficientes y σ^2 son llamadas estimaciones de ‘Yule-Walker’) Determine la densidad espectral del modelo ajustado y encuentre la frecuencia en la cual logra su máximo valor. ¿Cuál es el período correspondiente?

Solución. La densidad espectral de $\{Y_t\}$ es

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - 1.37e^{-i\lambda} + .634e^{-2i\lambda}|^2} = \frac{289.3}{2\pi} \frac{1}{|1 - 1.37e^{-i\lambda} + .634e^{-2i\lambda}|^2}.$$

La gráfica de la función $\omega \mapsto f(2\pi\omega)$, $-.5 \leq \omega \leq .5$ se muestra a continuación:



Para obtener este gráfico, se usó el siguiente código *R*. Primero, se definió la función `specdenar2` para evaluar la densidad espectral de un proceso AR(2).

```

specdenar2 <- function(phi1, phi2, sigmacuad, lambda) {
y <- (1- phi1*cos(lambda) - phi2*cos(2*lambda))^ 2+
      (-phi1*sin(lambda) - phi2*sin(lambda*2))^2
y <- 2*pi *y/sigmacuad
1/y }

```

Usando esta función, la gráfica fue obtenida por medio del siguiente código:

```

frequencies<- seq(-.5, .5, .01)
specden <- specdenar2( 1.317, -.634, 289.3, 2*pi*frequencies)
plot(frequencies, specden, type = "l", xlab ="Frecuencia",
      ylab = "Densidad Espectral")

```

A partir de la gráfica, es claro que $f(2\pi\omega)$ logra su máximo en (aproximadamente) la frecuencia $\omega \approx .09$ cual corresponde para un período $p = 1/\omega \approx 11$, concluyendo el análisis. \square

A continuación se analiza un problema que requiere de una aplicación doble del Corolario 3.1.1 para determinar la densidad espectral.

Ejemplo 3.2.3. Si $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ son dos procesos estacionarios que satisfacen

$$X_t - \alpha X_{t-1} = W_t, \quad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

y

$$Y_t - \alpha Y_{t-1} = X_t + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

donde $|\alpha| < 1$ y las series $\{W_t\}$ y $\{Z_t\}$ no están correlacionadas, encuentre la densidad espectral de $\{Y_t\}$.

Solución. La densidad espectral de $\{X_t\}$ es

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]$$

Además, usando que $X_r = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k W_{r-k}$ y recordando que $\{W_t\}$ y $\{Z_t\}$ no están correlacionados, la continuidad del producto interno implica que $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$ no están correlacionadas. Por otro lado, $\{Z_t\}$ tiene densidad espectral constante $\sigma^2/(2\pi)$ en $[-\pi, \pi]$, pues $\{Z_t\}$ es un ruido blanco. Por lo tanto, a partir del Ejemplo 2.3.1 se sigue que $\{U_t = X_t + Z_t\}$ tiene la densidad espectral

$$f_U(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 + |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}{|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Finalmente, la ecuación que define al proceso $\{Y_t\}$ puede ser escrita como $Y_t - \alpha Y_{t-1} = U_t$, de tal manera que la densidad espectral de $\{Y_t\}$ está dada por

$$f_Y(\lambda) = \frac{1}{|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2} f_U(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 + |1 - \alpha e^{-i\lambda}|^2}{|1 - \alpha e^{-i\lambda}|^4}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

□

3.3. Aproximación de Densidades Espectrales

De acuerdo al Corolario 3.1.2, la densidad espectral de un proceso de promedios móviles es $\sigma^2 |\theta(e^{-i\lambda})|^2 / (2\pi)$. Esta densidad es muy simple y el siguiente resultado, establece que cualquier densidad espectral $f(\lambda)$ puede aproximarse por una de estas densidades sencillas.

Teorema 3.3.1. Si $f(\lambda)$ es una densidad simétrica y continua en $[-\pi, \pi]$, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ con coeficientes reales tal que

$$|K |\theta(e^{-i\lambda})|^2 - f(\lambda)| < \varepsilon, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

donde

$$K = \frac{1}{2\pi(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda.$$

Una demostración de este resultado, que utiliza la teoría de series de Fourier, puede encontrarse en Brockwell y Davis (1998). A continuación se aplica este teorema a problemas de aproximación.

Ejemplo 3.3.1. Usando el Teorema 3.3.1, pruebe el siguiente resultado de aproximación: Si f es una densidad espectral continua y simétrica, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un proceso MA(q) invertible

$$X_t = Z_t + a_1 Z_{t-1} + \cdots + a_q Z_{t-q}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

tal que

$$|f_X(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

donde $\sigma^2 = (1 + a_1^2 + \cdots + a_q^2)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\nu) d\nu$.

Solución. El Teorema 3.3.1 establece que, si f es como en el enunciado del problema, entonces existe un polinomio $a(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_q z^q$ que satisface

- (i) $a(z) \neq 0$ para $|z| \leq 1$, y
- (ii) para cada $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$|K|a(e^{-i\lambda})|^2 - f(\lambda)| < \varepsilon, \quad (3.3.1)$$

donde

$$K = \frac{1}{2\pi(1 + a_1^2 + \cdots + a_q^2)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\nu) d\nu.$$

Considere ahora un proceso MA(q)

$$X_t = a(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = (1 + a_1^2 + \cdots + a_q^2)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\nu) d\nu.$$

En este caso, la densidad espectral de $\{X_t\}$ es

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |a(e^{-i\lambda})|^2 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(\nu) d\nu}{2\pi(1 + a_1^2 + \cdots + a_q^2)} |a(e^{-i\lambda})|^2 = K|a(e^{-i\lambda})|^2$$

y (3.3.1) muestra que $|f_X(\lambda) - f(\lambda)| < \varepsilon$ para toda $\lambda \in [-\pi, \pi]$. \square

En el siguiente ejemplo, se muestra como a partir de una serie estacionaria, se puede obtener otra que, aproximadamente, sea un ruido blanco.

Ejemplo 3.3.2. Sea $\{X_t\}$ un proceso MA(1)

$$X_t = Z_t - 2Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Dado $\varepsilon > 0$, encuentre un entero positivo $k(\varepsilon)$ así como los valores de las constantes $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots, a_k$ tales que la densidad espectral del proceso

$$Y_t = \sum_{j=0}^k a_j X_{t-j}$$

satisface $|f_Y(\lambda) - \text{Var}(Y)/(2\pi)| < \varepsilon$ para toda $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Solución. Primero, considere un proceso MA(1) invertible

$$X_t = Z_t - aZ_{t-1}, \quad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \quad |a| < 1.$$

En este caso,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{k-1} a^j X_{t-j} = \sum_{j=0}^{k-1} a^j [Z_{t-j} - Z_{t-j-1}] = Z_t - a^k Z_{t-k}.$$

Esta expresión permite concluir que

$$\text{Var}(Y) = \gamma_Y(0) = (1 + a^{2k})\sigma^2$$

y

$$\begin{aligned} f_Y(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - a^k e^{-i\lambda k}|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} [1 - 2a^k \cos(\lambda k) + a^{2k}] \\ &= \frac{\text{Var}(Y)}{2\pi} - \frac{\sigma^2}{\pi} a^k \cos(\lambda k) \end{aligned}$$

Por consiguiente, $|f_Y(\lambda) - \text{Var}(Y)/(2\pi)| = |\sigma^2 a^k \cos(\lambda k)/\pi| \leq \sigma^2 |a|^k/\pi$; observando que $\sigma^2 |a|^k/\pi < \varepsilon$ es equivalente para $k > \log(\varepsilon\pi/\sigma^2)/\log(|a|)$, se tiene la siguiente conclusión:

C: Sea $\{X_t\}$ un proceso invertible MA(1) determinado por

$$X_t = Z_t - aZ_{t-1}, \quad \{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \quad |a| < 1.$$

Dado $\varepsilon > 0$, considere un entero k tal que

$$k > \log(\varepsilon\pi/\sigma^2)/\log(|a|).$$

En este caso, el proceso $\{Y_t\}$ definido por

$$Y_t = \sum_{r=0}^{k-1} a^r X_{t-r}$$

satisface

$$|f_Y(y) - \text{Var}(Y)/(2\pi)| < \varepsilon.$$

Esta conclusión no puede ser directamente aplicada al proceso MA(1) del problema, ya que el polinomio de promedio móvil $\theta(z) = 1 - 2z$ no es invertible, pues su raíz es $1/2$. Sin embargo $\{X_t\}$ tiene la representación invertible

$$X_t = \tilde{Z}_t - .5\tilde{Z}_{t-1}, \quad \{\tilde{Z}_t\} \sim WN(0, \tilde{\sigma}^2)$$

donde $\tilde{\sigma}^2 = 4\sigma^2$. Aplicando la conclusión anterior a esta representación de $\{X_t\}$, se sigue que

$$\text{si } k > \log(\varepsilon\pi/\tilde{\sigma}^2)/\log(.25) = \log(\varepsilon\pi/(4\sigma^2))/\log(.25)$$

$$\text{entonces } |f_Y(y) - \text{Var}(Y)/(2\pi)| < \varepsilon,$$

donde $Y_t = \sum_{r=0}^{k-1} (-.25)^r X_{t-r}$.

□

A continuación se determinará la función de densidad espectral de un proceso autorregresivo de tercer orden y se aplicará un filtro para suavizar la función alrededor de los puntos donde alcanza su máximo.

Ejemplo 3.3.3. Calcule y bosqueje la densidad espectral $f(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq \pi$, de el proceso estacionario $\{X_t\}$ definido por

$$X_t - .99X_{t-3} = Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, 1)$$

¿Sugiere la densidad espectral que la gráfica muestral de $\{X_t\}$ exhibirá comportamiento oscilatorio? ¿Si es así, cuál es el período aproximado de la oscilación? Calcule la densidad espectral del proceso filtrado

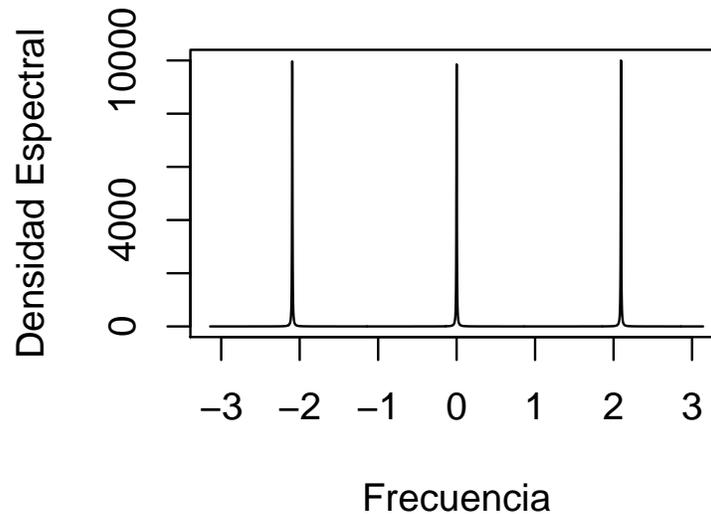
$$Y_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1}),$$

y compare los valores numéricos de las densidades espectrales de $\{X_t\}$ y $\{Y_t\}$ en las frecuencias $\omega = 2\pi/3$ radianes por unidad de tiempo. ¿Qué efecto esperaría usted que el filtro tenga en las oscilaciones de $\{X_t\}$?

Solución. La densidad espectral $f_X(\lambda)$ está dada por

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{1}{|1 - .99e^{-i3\lambda}|^2} \\ &= \frac{1}{(1 - .99 \cos(3\lambda))^2 + .9801 \sin^2(3\lambda)}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

y enseguida se muestra su gráfica.



El siguiente código fuente en lenguaje *R* se utilizó para generar el gráfico anterior:

```
specden3 <- function(phi, sigmacuad, frequen){
  y <- (1- phi*cos(frequen))^2 + (phi*sin(frequen))^2
  sigmacuad/y
}
frequen <- seq(-pi, pi, .01)
specden3416 <- specden3(.99, 1, 3*frequen)
plot(frequen, specden3416, xlab = "Frequency",
     ylab= "Spectral density", type = "l")
```

La gráfica muestra una influencia fuerte de una frecuencia aproximadamente igual a $2.1 \approx 2\pi/3$.

Para el proceso filtrado

$$Y_t = \frac{1}{3}(X_{t-1} + X_t + X_{t+1}),$$

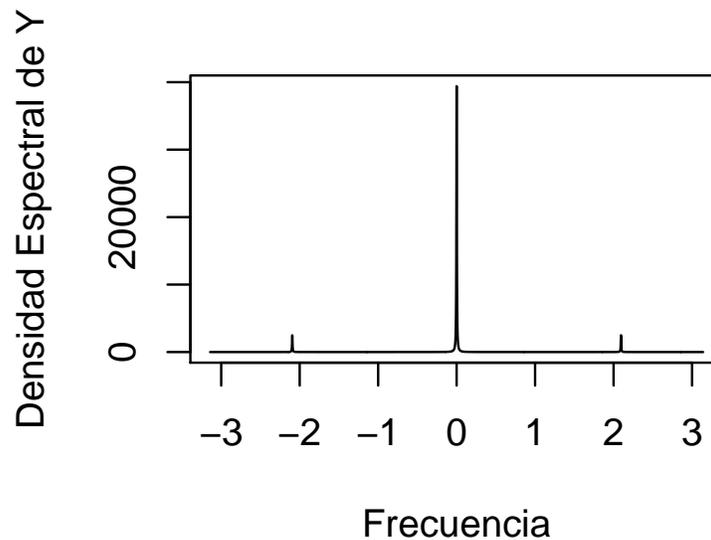
la densidad espectral está dada por

$$\begin{aligned} f_Y(\lambda) &= |(e^{i\lambda} + 1 + e^{-i\lambda})/3|^2 f_X(\lambda) \\ &= \frac{|(1 + 2 \cos(\lambda))/3|^2}{(1 - .99 \cos(3\lambda))^2 + .9801 \sin^2(3\lambda)}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]; \end{aligned}$$

en la frecuencia $\omega = 2\pi/3$ se tiene

$$\frac{f_Y(2\pi/3)}{f_X(2\pi/3)} = |(1 + 2 \cos(2\pi/3))/3|^2 = 0$$

demostrando que la aplicación del filtro elimina componentes de frecuencia $2\pi/3$, la cual corresponde a un período igual a 3. La gráfica de $f_Y(\lambda)$ se muestra a continuación:



Esta gráfica fue obtenida usando el siguiente código *R*:

```
fy <- specden3416 * (1+ cos(frequen))^2
```

```
plot(frequen, fy , xlab = "Frequency",
     ylab= "Spectral density of Y", type = "l")
```

□

3.4. Operadores de Diferencia

En esta sección se estudia el efecto de la aplicación de operadores de diferencia para eliminar, o atemperar, componentes periódicas de una serie. El primer ejemplo trata con una serie que tiene una componente importante de período doce.

Ejemplo 3.4.1. La densidad espectral de un proceso de valor real $\{X_t\}$ está dada en $[0, \pi]$ por

$$f(\lambda) = \begin{cases} 100, & \pi/6 < \lambda < \pi/6 + .01, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

mientras que $f(\lambda) = f(-\lambda)$ para $\lambda \in [-\pi, 0]$.

- (a) Evalúe la función de covarianza en $\{X_t\}$ en 0 y 1.
- (b) Encuentre la densidad espectral del proceso $\{Y_t\}$, donde

$$Y_t = \nabla_{12}X_t = X_t - X_{t-12}.$$

- (c) ¿Cuál es la varianza de Y_t ?
- (d) Bosqueje la función de potencia del filtro ∇_{12} y use el bosquejo para explicar el efecto sinusoidal del filtro en las frecuencias (i) cercanas a cero y (ii) cercanas a $\pi/6$.

Solución.

(a) La función de autocovarianza de $\{X_t\}$ está determinada por

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f(\lambda) d\lambda \\ &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/6+.01} \cos(|h|\lambda) d\lambda \\ &= \begin{cases} 2[\sin(|h|(\pi/6 + .01)) - \sin(|h|\pi/6)]/|h| & \text{if } h \neq 0 \\ .02, & \text{if } h = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

(b) La densidad espectral de $\{Y_t\}$ está dada por

$$f_Y(\lambda) = |1 - e^{-i12\lambda}|^2 f(\lambda) = 2(1 - \cos(12\lambda))f(\lambda).$$

(c) La varianza de Y_t está determinada por

$$\text{Var}(Y_t) = \text{Var}(X_t - X_{t-12}) = 2[\gamma(0) - \gamma(12)].$$

Observando que $\gamma(0) = .02$ y

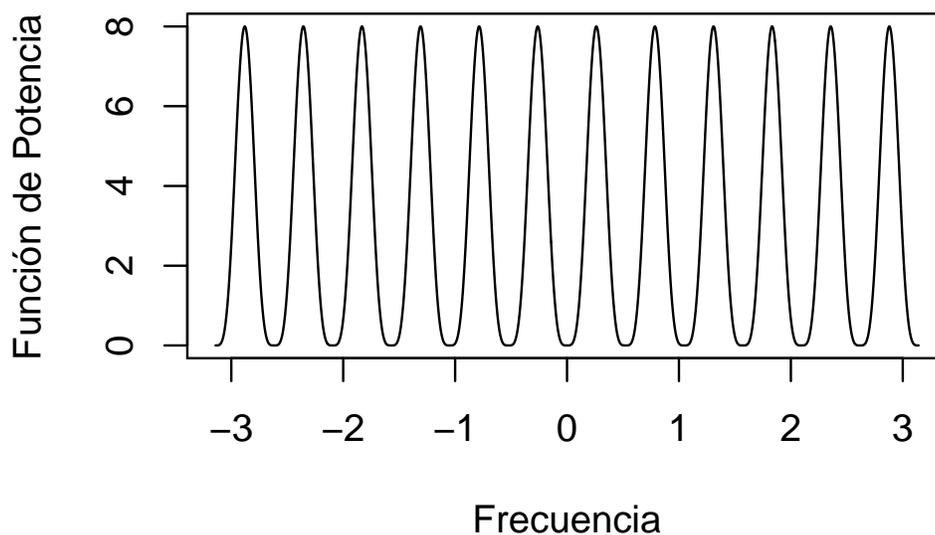
$$\gamma(12) = 2[\sin(12(\pi/6 + .01)) - \sin(12\pi/6)]/|12| = \sin(.12)/6,$$

por la parte (a), se obtiene que

$$\text{Var}(Y_t) = 2[.02 - \sin(.12)/6] = .04[1 - \sin(.12)/.12].$$

(d) La función de potencia del filtro $\nabla_{12} = 1 - B^{12}$ es

$$\tau(\lambda) = |1 - e^{-i12\lambda}|^2 = 2(1 - \cos(12\lambda)).$$



La gráfica de arriba fue generada usando el código

```
frequen <-seq(-pi, pi, .001)
ptranf <-2*(1- cos(12*frequen))2
plot(frequen, ptranf, xlab = "Frequency",
ylab= "Power transf. function", type = "l")
```

Así, cuando ∇_{12} es aplicada a una serie con frecuencia cercana cero, la componente correspondiente ‘se elimina’, y lo mismo ocurre cuando la serie presenta una componente importante en $\lambda = \pi/6$, pues $\tau(0) = \tau(\pi/6) = 0$. \square

En el siguiente ejemplo se estudia la aplicación reiterada de un operador de diferencia, y se estudia el efecto que tiene sobre la densidad espectral conforme el número de aplicaciones crece.

Ejemplo 3.4.2. Sea $\{X_t\}$ una serie estacionaria arbitraria con densidad espectral continua f tal que $0 \leq f(\lambda) \leq K$ y $f(\pi) \neq 0$.

Sea $f_n(\lambda)$ denota la densidad espectral de la serie diferenciada

$$\{(1 - B)^n X_t\}.$$

- (a) Exprese f_n en términos de f_{n-1} , y evalúe $f_n(\lambda)$.
- (b) Muestre que $f_n(\lambda)/f_n(\pi) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada $\lambda \in [0, \pi)$.
- (c) ¿Qué sugiere la parte (b) con relación al comportamiento de la trayectoria muestral de $\{(1 - B)^n X_t\}$ para valores grandes de n ?

Solución.

- (a) Defina la serie $\{Y_t^n\}$ mediante $Y_t^n = (1 - B)^n X_t$ y observe la relación recursiva

$$Y_t^n = (1 - B)Y_t^{n-1}.$$

Denotando por $f_n(\lambda)$ a la densidad espectral de $\{Y_t^n\}$ se desprende que

$$f_n(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^2 f_{n-1}(\lambda);$$

como $f_1(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^2 f(\lambda)$, se concluye que

$$f_n(\lambda) = |1 - e^{-i\lambda}|^{2n} f(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots$$

- (b) Por la parte (a), $f_n(\pi) = |1 - e^{-i\pi}|^{2n} f(\pi) = 2^{2n} f(\pi)$. Usando la relación $|1 - e^{-i\lambda}| < 2$ para $\lambda \in (-\pi, \pi)$, sigue que

$$\frac{f_n(\lambda)}{f_n(\pi)} = \frac{f(\lambda)}{f(\pi)} \left(\frac{|1 - e^{-i\lambda}|}{2} \right)^{2n} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty, \quad \lambda \in (-\pi, \pi).$$

- (c) La parte (c) sugiere que $\{(1 - B)^n X_t\}$ tendrá un componente oscilatorio predominantemente importante en la frecuencia $\lambda = \pi$, correspondiente a un período 2. □

3.5. Diseño de un filtro

En esta sección se ilustra el problema de construir un filtro de manera que la densidad espectral del proceso filtrado tenga el menor valor posible en una frecuencia específica.

Ejemplo 3.5.1. Determine la función de potencia asociada al filtro lineal con coeficientes $a_0 = 1$, $a_1 = -2\alpha$, $a_2 = 1$ y $a_j = 0$ para $j \neq 0, 1, 2$. Si se desea usar el filtro para suprimir oscilaciones sinusoidales con período 6, qué valor de α se debería usar? Si el filtro es aplicado para el proceso definido por

$$X_t = A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3) + Y_t,$$

donde A y B son no correlacionadas y tampoco están correlacionadas con $\{Y_t = Z_t + 2.5Z_{t-1}\}$, y $\{Z_t\}$ es un ruido blanco, ¿cuál es la función de distribución del proceso filtrado $W_t = X_t - 2\alpha X_{t-1} + X_{t-2}$?

Solución. La función de potencia asociada al filtro es

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) &= |e^{-i\lambda}|^2 \\ &= |a_0 + a_1 e^{-i\lambda} + a_2 e^{-2i\lambda}|^2 \\ &= |1 - 2\alpha e^{-i\lambda} + e^{-2i\lambda}|^2 \\ &= (1 - 2\alpha \cos(\lambda) + \cos(2\lambda))^2 + (-2\alpha \sin(\lambda) + \sin(2\lambda))^2 \end{aligned}$$

Ahora, suponga que desea aplicar el filtro para suprimir una componente sinusoidal con período 6, lo cual corresponde a $\lambda = (2\pi)/6 = \pi/3$. En este caso se desea tener $\tau(\pi/3)$ tan pequeño como sea posible, preferentemente $\tau(\pi/3) = 0$. Usando que $\cos(\pi/3) = 1/2 = -\cos(2\pi/3)$ y $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 = \sin(2\pi/3)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\tau(\pi/3) &= (1 - 2\alpha \cos(\pi/3) + \cos(2\pi/3))^2 + (-2\alpha \sin(\pi/3) + \sin(2\pi/3))^2 \\
&= (1 - \alpha - 1/2)^2 + (-\alpha\sqrt{3} + \sqrt{3}/2)^2 \\
&= (1 - 2\alpha)^2/4 + 3(1 - 2\alpha)^2/4 \\
&= (1 - 2\alpha)^2
\end{aligned}$$

Así, la elección apropiada para α es $\alpha = 1/2$. Ahora, sea $\{X_t\}$ la serie especificada por

$$X_t = A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3) + Y_t$$

donde $Y_t = Z_t + 2.5Z_{t-1}$, $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, A y B son variables aleatorias y no están correlacionadas $(0, \nu^2)$ las cuales tampoco están correlacionadas con $\{Z_t\}$.

Aplicando el filtro con $\alpha = 1/2$ para la anterior serie $\{X_t\}$ se desprende que $W_t =$

$(B)X_t = (B)Y_t$, pues (B) elimina el componente periódico $A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3)$ el cual tiene período 6. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
f_W(\lambda) &= \tau(\lambda) f_Y(\lambda) \\
&= \nu^2 [(1 - \cos(\lambda) + \cos(2\lambda))^2 + (-\sin(\lambda) + \sin(2\lambda))^2] |1 + 2.5e^{i\lambda}|^2,
\end{aligned}$$

donde se usó la expresión para la densidad espectral de un proceso $MA(q)$ para establecer la última igualdad. \square

3.6. Una Función de Distribución Espectral sin Densidad

En esta sección se ilustra el cálculo de una función de distribución espectral que no tiene densidad. La situación es análoga a la que se presenta cuando una variable aleatoria tiene una parte discreta y una continua.

Ejemplo 3.6.1. Sea $\{X_t\}$ el proceso

$$X_t = A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3) + Y_t$$

donde $Y_t = Z_t + 2.5Z_{t-1}$, $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, y A y B son variables aleatorias no correlacionadas ($0, \nu^2$) las cuales tampoco están correlacionadas con $\{Z_t\}$. Encuentre la función de autocovarianza y la función de distribución espectral de $\{X_t\}$.

Solución. Note que las condiciones del problema implican que la serie

$$\{W_t = A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3)\}$$

no está correlacionada con $\{Y_t\}$. Usando que A y B no están correlacionadas se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_W(h) &= \text{Cov}(W_{t+h}, W_t) \\ &= \text{Cov}(A \cos(\pi(t+h)/3) + B \sin(\pi(t+h)/3), A \cos(\pi t/3) + B \sin(\pi t/3)) \\ &= \text{Var}(A) \cos(\pi(t+h)/3) \cos(\pi t/3) + \text{Var}(B) \sin(\pi(t+h)/3) \sin(\pi t/3) \\ &= \nu^2 [\cos(\pi(t+h)/3) \cos(\pi t/3) + \sin(\pi(t+h)/3) \sin(\pi t/3)] \\ &= \nu^2 \cos(\pi h/3) \end{aligned}$$

donde la identidad $\cos(a-b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ fue usada para establecer la última igualdad. Por lo tanto,

$$\gamma_W(h) = \nu^2 \left(\frac{e^{ih\lambda\pi/3} + e^{-ih\lambda\pi/3}}{2} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \mu_W(d\lambda)$$

donde μ_W es la medida concentrada en los puntos $\pm\pi/3$ y asigna una masa $\nu^2/2$ a cada punto. Así, la correspondiente función de distribución espectral F_W es dada por

$$F_W(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < -\pi/3 \\ \nu^2/2, & -\pi/3 \leq \lambda < \pi/3 \\ \nu^2, & \pi/3 \leq \lambda \end{cases}$$

Por otra parte, $\{Y_t\}$ es un proceso MA(1), y su densidad espectral es

$$f_Y(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + 2.5e^{-i\lambda}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} [7.25 + 5 \cos(\lambda)], \quad \lambda \in (-\pi, \pi],$$

de manera que la correspondiente función de distribución está dada por

$$F_Y(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda < -\pi \\ \frac{\sigma^2}{2\pi}[7.25(\lambda + \pi) + 5 \sin(\lambda)], & \text{si } \lambda \in [-\pi, \pi] \\ 7.25\sigma^2, & \text{si } \lambda > \pi. \end{cases}$$

Como $\{W_t\}$ y $\{Y_t\}$ no están correlacionados, $X_t = W_t + Y_t$ tiene la función de distribución espectral $F_X = F_W + F_Y$, por el Ejemplo 2.3.1. De forma más explícita,

$$F_X(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda < -\pi \\ \frac{\sigma^2}{2\pi}[7.25(\lambda + \pi) + 5 \sin(\lambda)], & \text{si } \lambda \in [-\pi, -\pi/3] \\ \frac{\sigma^2}{2\pi}[7.25(\lambda + \pi) + 5 \sin(\lambda)] + \frac{\nu^2}{2}, & \text{si } \lambda \in [-\pi/3, \pi/3] \\ \frac{\sigma^2}{2\pi}[7.25(\lambda + \pi) + 5 \sin(\lambda)] + \nu^2, & \text{si } \lambda \in [\pi/3, \pi] \\ 7.25\sigma^2 + \nu^2, & \text{si } \lambda > \pi. \end{cases}$$

Esto concluye el argumento. □

3.7. Análisis de un Proceso con Espectro Discreto

En esta sección se estudia una serie de tiempo estacionaria, para la cual su función de distribución es discreta, esto es, presenta saltos en puntos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y es constante en cada uno de los intervalos $(\lambda_{i-1}, \lambda_i)$. Se investigan las condiciones para que la serie resultante sea real.

Ejemplo 3.7.1. Suponga que $\{X_t\}$ es el proceso definido por

$$X_t = \sum_{j=1}^n A(\lambda_j) e^{it\lambda_j},$$

donde

$$-\pi < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \pi \quad (3.7.1)$$

- (i) Muestre que $\{X_t\}$ es de valor real si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones, donde $j = 1, 2, \dots, n-1$:

$$\lambda_j = -\lambda_{n-j}, \quad A(\lambda_j) = \overline{A(\lambda_{n-j})}, \quad n-1 \quad \text{y} \quad A(\lambda_n) \text{ es real.} \quad (3.7.2)$$

(ii) Verifique que si $\{X_t\}$ satisface las tres condiciones anteriores, entonces

$$X_t = \sum_{j=1}^n [C(\lambda_j) \cos(t\lambda_j) - D(\lambda_j) \sin(t\lambda_j)]$$

donde $A(\lambda_j) = C(\lambda_j) + iD(\lambda_j)$ y $D(\lambda_n) = 0$.

Solución. Por la condición (3.7.1), los puntos $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ se ubican dentro del intervalo $(-\pi, \pi)$. Si $-\lambda_j \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$, el término $0e^{-i\lambda_j t}$ puede ser incluido en la sumatoria que define a X_t y por lo tanto, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que los puntos λ_j dentro de $(-\pi, \pi)$ forman un conjunto simétrico, es decir, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\} = \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-1}\}$, y en este caso, puesto que los puntos λ_j forman una sucesión creciente, se desprende que

$$\lambda_j = -\lambda_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.7.3)$$

Suponga que X_t es real para cada t . En este contexto se demostrará que (3.7.2) se cumple. Note que $X_t = \overline{X_t}$, si X_t es real. Recordando que $\lambda_n = \pi$, y que $-1 = e^{i\lambda_n t} = e^{-i\lambda_n t}$, y usando (3.7.3), se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} A(\lambda_j) e^{it\lambda_j} + A(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} &= \sum_{j=1}^{n-1} \overline{A(\lambda_j)} e^{-it\lambda_j} + \overline{A(\lambda_n)} e^{i\lambda_n t} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \overline{A(\lambda_j)} e^{it\lambda_{n-j}} + \overline{A(\lambda_n)} e^{i\lambda_n t} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \overline{A(\lambda_{n-j})} e^{it\lambda_j} + \overline{A(\lambda_n)} e^{i\lambda_n t} \end{aligned}$$

y luego una transposición conduce a

$$\sum_{j=1}^{n-1} B_j e^{it\lambda_j} + B_n e^{i\lambda_n t} = 0. \quad (3.7.4)$$

donde

$$B_j = A(\lambda_j) - \overline{A(\lambda_{n-j})}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad B_n = A(\lambda_n) - \overline{A(\lambda_n)} \quad (3.7.5)$$

Las ecuaciones (3.7.4) son válidas para cada t ; escribiendo explícitamente las ecuaciones para $t = 0, 1, \dots, n-1$, el siguiente sistema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{\lambda_1} & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_3} & \cdots & e^{\lambda_n} \\ e^{2\lambda_1} & e^{2\lambda_2} & e^{2\lambda_3} & \cdots & e^{2\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{(n-1)\lambda_1} & e^{(n-1)\lambda_2} & e^{(n-1)\lambda_3} & \cdots & e^{(n-1)\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

La matriz de coeficientes de este sistema homogéneo es una matriz de Van der Monde asociada a diferentes valores de $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}, \dots, e^{\lambda_n}$, por lo cual es invertible. Esto conduce que $B_j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$, una condición que es equivalente a

$$A(\lambda_j) = \overline{A(\lambda_{n-j})}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$A(\lambda_n) = \overline{A(\lambda_n)}, \text{ y por lo tanto } A(\lambda_n) \text{ es real.}$$

Junto con (3.7.3), esta condición muestra que (3.7.2) se cumple.

En sentido contrario, suponga que (3.7.3) se cumple. En este caso

$$\begin{aligned} \overline{X_t} &= \sum_{j=1}^{n-1} \overline{A(\lambda_j) e^{it\lambda_j}} + \overline{A(\lambda_n) e^{i\lambda_n t}} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \overline{A(\lambda_j)} e^{-it\lambda_j} + A(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó que A_n es real y que $\lambda_n = \pi$, así que $e^{i\lambda_n t} = (-1)^t$ es también real. Ahora, note que (3.7.2) establece que $\overline{A(\lambda_j)} e^{-it\lambda_j} = A(\lambda_{n-j}) e^{i\lambda_{n-j} t}$ y $-\lambda_j = \lambda_{n-j}$, $j = 1, \dots, n-1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \overline{X_t} &= \sum_{j=1}^{n-1} A(\lambda_{n-j}) e^{it\lambda_{n-j}} + A(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A(\lambda_k) e^{it\lambda_k} + A(\lambda_n) e^{i\lambda_n t} = X_t \end{aligned}$$

mostrando que X_t es real.

Para concluir, sean $C(\lambda_j)$ y $D(\lambda_j)$ las partes reales e imaginarias de $A(\lambda_j)$, así que $A(\lambda_j) = C(\lambda_j) + iD(\lambda_j)$. Con esta notación,

$$D(\lambda_n) = 0$$

debido a que $A(\lambda_n)$ es real, y

$$\begin{aligned} A(\lambda_j)e^{i\lambda_j t} &= [C(\lambda_j) + iD(\lambda_j)][\cos(\lambda_j t) + i\sin(\lambda_j t)] \\ &= C(\lambda_j)\cos(\lambda_j t) - D(\lambda_j)\sin(\lambda_j t) \\ &\quad + i[D(\lambda_j)\cos(\lambda_j t) + D(\lambda_j)\sin(\lambda_j t)] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{j=1}^n [C(\lambda_j)\cos(\lambda_j t) - D(\lambda_j)\sin(\lambda_j t)] \\ &\quad + i \sum_{j=1}^n [D(\lambda_j)\cos(\lambda_j t) + D(\lambda_j)\sin(\lambda_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^n [C(\lambda_j)\cos(\lambda_j t) - D(\lambda_j)\sin(\lambda_j t)] \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe al hecho de que X_t es real. □

CAPÍTULO 4

REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA SERIE

Este capítulo se estudia la representación de una serie de tiempo $\{X_t\}$ como una integral estocástica respecto a un proceso de incrementos ortogonales $\{Z(\lambda)\}$. El estudio incluye, tanto ejemplos sobre las propiedades de un proceso de incrementos ortogonales por sí mismo, como consecuencias de la representación de $\{X_t\}$. Los temas analizados incluyen

- (i) La generación de un proceso de incrementos ortogonales continuo por la derecha a partir de otro que no necesariamente lo es,
- (ii) La representación integral de un proceso que se obtiene a partir de $\{X_t\}$ mediante un filtro lineal,
- (iii) La generación de nuevos procesos de incrementos ortogonales a partir de uno dado, y
- (iv) Análisis de la existencia de procesos ARMA usando técnicas de representación espectral.

4.1. Continuidad por la Derecha

El propósito de esta sección es utilizar las ideas de convergencia para mostrar que un proceso de incrementos ortogonales arbitrario, puede hacerse continuo por la derecha si se cambia en un número a lo sumo contable de puntos. La finalidad del estudio desarrollado en el siguiente ejemplo es familiarizarse con ideas analíticas básicas, y entender la relación entre un proceso de incrementos

ortogonales y la correspondiente función de distribución.

Ejemplo 4.1.1. Suponga que $\{Z(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi\}$ es un proceso de incrementos ortogonales, el cual no es necesariamente continuo por la derecha. Muestre que para toda $\lambda \in [-\pi, \pi)$, $Z(\lambda + \delta)$ converge en media cuadrática cuando $\delta \downarrow 0$. Llame al límite $Z(\lambda^+)$ y muestre que este nuevo proceso es un proceso de incrementos ortogonales continuo por la derecha, y que el nuevo proceso es igual a $Z(\lambda)$ con probabilidad uno, excepto en un número contable de valores $\lambda \in [-\pi, \pi)$.

Solución. Defina $F(\cdot)$ sobre $[-\pi, \pi)$ por

$$F(\lambda) = \|Z(\lambda) - Z(-\pi)\|^2. \quad (4.1.1)$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2$, note que

$$\begin{aligned} F(\lambda_2) &= \|Z(\lambda_2) - Z(-\pi)\|^2 \\ &= \|Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1) + Z(\lambda_1) - Z(-\pi)\|^2 \\ &= \|Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\|^2 + \|Z(\lambda_1) - Z(-\pi)\|^2 \\ &= \|Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\|^2 + F(\lambda_1) \end{aligned}$$

y entonces

$$F(\lambda_2) - F(\lambda_1) = \|Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)\|^2 \quad (4.1.2)$$

donde la tercera igualdad usó que $\{Z(\lambda)\}$ tiene incrementos ortogonales. Así, $F(\cdot)$ es creciente y, consecuentemente, sus puntos de discontinuidad forman un conjunto \mathcal{D} el cuál es a lo sumo contable:

$$\mathcal{D} = \{\omega \in [-\pi, \pi) \mid F(\cdot) \text{ no es continuo en } \omega\}$$

Además, el límite lateral por la derecha de $F(\cdot)$ existe en cada punto $\lambda \in [-\pi, \pi)$.

Definiendo

$$F^+(\lambda) = \lim_{\delta \downarrow 0} F(\lambda + \delta), \quad \lambda \in [-\pi, \pi), \quad (4.1.3)$$

se tiene que

$$F^+(\lambda) = F(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi] \setminus \mathcal{D}. \quad (4.1.4)$$

A continuación se demostrará que $F^+(\lambda)$ es continua por la derecha en $[-\pi, \pi]$. Con este fin, note que (4.1.3) implica que, dado $\lambda \in [-\pi, \pi]$ y $\varepsilon > 0$, existe $\Delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|F(\lambda + \alpha) - F(\lambda + \alpha_1)| < \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq \alpha, \alpha_1 \leq \Delta(\varepsilon).$$

Ahora, sean $\{\delta_n\}$ y $\{\tau_m\}$ dos sucesiones decrecientes a cero, y seleccione un entero $K(\varepsilon)$ tal que $\delta_n, \tau_m \in (0, \Delta(\varepsilon)/2]$ donde $n, m \geq K(\varepsilon)$. En este caso, la anterior relación desplegada permite establecer que

$$|F(\lambda + \delta_n + \tau_m) - F(\lambda + \tau_m)| < \varepsilon \quad \text{si } n, m \geq K(\varepsilon).$$

Tomando el límite cuando m tiende a ∞ , vía (4.1.3), se sigue que $|F^+(\lambda + \delta_n) - F^+(\lambda)| < \varepsilon$ cuando $n \geq K(\varepsilon)$, y entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} F^+(\lambda + \delta_n) = F^+(\lambda)$. Por lo tanto, como la sucesión arbitraria $\{\delta_n\}$ fue decreciente a cero,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} F^+(\lambda + \delta) = F^+(\lambda).$$

- (i) Sea $\lambda \in [-\pi, \pi]$ arbitrario pero fijo. Ahora se mostrará que, cuando $\delta \downarrow 0$, $\{Z(\lambda + \delta)\}$ converge en media cuadrática. Para lograr la meta, note que la existencia de $F^+(\cdot)$ implica que, para toda secuencia $\{\delta_n\}$ de números positivos convergente a 0, se tiene que $\{F(\lambda + \delta_n)\}$ es una sucesión de Cauchy, esto es,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |F(\lambda + \delta_n) - F(\lambda + \delta_m)| = 0$$

una convergencia que, por (4.1.2), es equivalente a

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|Z(\lambda + \delta_n) - Z(\lambda + \delta_m)\| = 0.$$

Se concluye entonces que $\{Z(\lambda + \delta_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 , así que converge a una cierta variable $Z^+(\lambda) \in L^2$. Si $\{\tau_n\}$ es otra sucesión de números positivos convergiendo a cero, $\{Z(\lambda + \tau_n)\}$ también converge en L^2 , digamos a la variable $\tilde{Z}^+(\lambda) \in L^2$. Considerando la sucesión $\alpha = (\delta_1, \tau_1, \delta_2, \tau_2, \dots)$, se tiene que $Z(\lambda + \alpha_k)$ converge en L^2 , y entonces el límite en media cuadrática de las subsecuencias $\{Z(\lambda + \alpha_{2k+1})\} = \{Z(\lambda + \delta_k)\}$ y $\{Z(\lambda + \alpha_{2k})\} = \{Z(\lambda + \tau_k)\}$ coinciden. Por lo tanto,

$$Z^+(\lambda) = \text{m. s. lim}_{\delta \downarrow 0} Z(\lambda + \delta) \quad \text{esta bien definido.}$$

- (ii) Se mostrará ahora que $\{Z^+(\lambda)\}$ es continua por la derecha, y que la igualdad $Z^+(\lambda) = Z(\lambda)$ ocurre para $\lambda \in \mathcal{D}$. Sea $\lambda \in [-\pi, \pi)$ arbitraria y sean $\{\delta_n\}$ y $\{\tau_n\}$ sucesiones decrecientes a cero. Seleccione $\varepsilon > 0$ y note que, por (4.1.3), existe $\Delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|F(\lambda + \Delta_1) - F(\lambda + \Delta_2)| \leq \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq \Delta_1 < \Delta(\varepsilon), \quad 0 \leq \Delta_2 < \Delta(\varepsilon).$$

Ahora tome un entero $K(\varepsilon)$ tal que $\delta_n + \tau_m < \Delta(\varepsilon)$ cuando $n, m \geq K(\varepsilon)$, de modo que la anterior relación implica que

$$|F(\lambda + \delta_n + \tau_m) - F(\lambda + \tau_m)| \leq \varepsilon \quad n, m \geq K(\varepsilon).$$

Vía (4.1.2), esto equivale a

$$\|Z(\lambda + \delta_n + \tau_m) - Z(\lambda + \delta_n)\|^2 \leq \varepsilon \quad n, m \geq K(\varepsilon),$$

y tomando el límite cuando m tiende a ∞ , se desprende que

$$\|Z^+(\lambda + \delta_n) - Z^+(\lambda)\|^2 \leq \varepsilon \quad n \geq K(\varepsilon),$$

esto es,

$$\text{m. s. } \lim_{n \rightarrow \infty} Z^+(\lambda + \delta_n) = Z^+(\lambda).$$

Por lo tanto, el proceso $\{Z^+(\lambda)\}$ es continuo por la derecha. Ahora, sea $\lambda \in [-\pi, \pi)$ un punto de continuidad de $F(\cdot)$. En este caso $F(\lambda + \delta) - F(\lambda) \rightarrow 0$ cuando $\delta \downarrow 0$, y usando (4.1.2) se sigue que $\lim_{\delta \downarrow 0} \|Z(\lambda + \delta) - Z(\lambda)\| \rightarrow 0$, es decir,

$$\|Z^+(\lambda) - Z(\lambda)\| = 0,$$

por la especificación de $Z^+(\cdot)$. Por consiguiente, $Z^+(\lambda) = Z(\lambda)$ cuando λ no está en el conjunto \mathcal{D} , el cual, como ya se ha mencionado, es a lo sumo numerable.

- (iii) Para concluir, se probará que $\{Z^+(\lambda)\}$ tiene incrementos ortogonales. Sean $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ puntos arbitrarios en $[-\pi, \pi)$, y seleccione $\delta > 0$ tal que $\lambda_4 + \delta < \pi$. Puesto que el proceso $\{Z(\lambda)\}$ tiene incrementos ortogonales,

$$\langle Z(\lambda_2 + \delta) - Z(\lambda_1 + \delta), Z(\lambda_4 + \delta) - Z(\lambda_3 + \delta) \rangle = 0$$

y tomando el límite cuando δ decrece a 0, la continuidad del producto interno implica que

$$\langle Z^+(\lambda_2) - Z^+(\lambda_1), Z^+(\lambda_4) - Z^+(\lambda_3) \rangle = 0$$

mostrando la ortogonalidad de los incrementos de $\{Z^+(\lambda)\}$. □

4.2. Representación Integral de un Proceso Transformado

En esta sección se analiza la representación espectral de un proceso $\{Y_t\}$ obtenido por la aplicación de un filtro lineal a una serie dada $\{X_t\}$. La representación de la serie $\{Y_t\}$ se da en términos del proceso original $\{X_t\}$, y se supone que el filtro (B) es tal que $(z) = 1/(1 - \phi(z))$, de manera que $\{Y_t\}$ es un proceso autorregresivo con ‘ruido’ dado por la serie original.

Ejemplo 4.2.1. Si $X_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\nu} dZ(\nu)$ donde $\{Z(\nu), -\pi \leq \nu \leq \pi\}$ es un proceso de incrementos ortogonales con función de distribución asociada $F(\cdot)$, y si $Y_t - \phi Y_{t-1} = X_t$, donde $\phi \in (-1, 1)$, encuentre una función (\cdot) tal que

$$Y_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\nu} (\nu) dZ(\nu)$$

Use ese resultado para expresar $E[Y_{t+h} \bar{X}_t]$ como una integral con respecto a F . Evalúe la integral en el caso especial cuando $F(\nu) = \sigma^2(\nu + \pi)/(2\pi)$, $-\pi \leq \nu \leq \pi$ (correspondiente a una serie de ruido blanco).

Solución. Observe que $Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k X_{t-k} = (B)X_t$, dónde

$$(z) = \frac{1}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k. \quad (4.2.1)$$

Entonces, usando la representación espectral $X_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\nu} Z(d\nu)$, y teniendo en mente la condición $|\phi| < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \int_{(-\pi, \pi]} e^{i(t-k)\nu} Z(d\nu) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k e^{i(t-k)\nu} Z(d\nu) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} e^{t\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k e^{-ik\nu} Z(d\nu) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} e^{t\nu} \frac{1}{1 - \phi e^{-i\nu}} Z(d\nu) \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$Y_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{t\nu} (e^{-i\nu}) Z(d\nu) \quad \text{donde} \quad Y_t = (B)X_t$$

de donde se desprende que $Y_t = I(e^{it\nu} (e^{-i\nu}))$. Entonces, usando la representación integral $X_t = I(e^{it\nu})$

$$\begin{aligned} E[Y_{t+h}, \overline{X}_t] &= \langle Y_{t+h}, X_t \rangle \\ &= \left\langle I(e^{i(t+h)\nu} (e^{-i\nu})), I(e^{it\nu}) \right\rangle \\ &= \left\langle e^{i(t+h)\nu} (e^{-i\nu}), e^{it\nu} \right\rangle_{L^2(F)} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$E[Y_{t+h}, \overline{X}_t] = \int_{(-\pi, \pi]} e^{i(t+h)\nu} (e^{-i\nu}) \overline{e^{it\nu}} dF(\nu) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ih\nu} (e^{-i\nu}) dF(\nu)$$

Cuando $F(\cdot)$ corresponde a un proceso de ruido blanco, la integral, es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} e^{ih\nu} (e^{-i\nu}) d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \frac{e^{ih\nu}}{1 - \phi e^{-ih\nu}} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \frac{\cos(h\nu) + i \sin(h\nu)}{1 - \phi \cos(h\nu) + i\phi \sin(h\nu)} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \frac{(\cos(h\nu) + i \sin(h\nu))(1 - \phi \cos(h\nu) - i\phi \sin(h\nu))}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(h\nu)} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \frac{(\cos(h\nu) - \phi + i \sin(h\nu))}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(h\nu)} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi]} \frac{\cos(h\nu) - \phi}{1 + \phi^2 - 2\phi \cos(h\nu)} d\nu. \end{aligned}$$

donde para establecer la última igualdad se usó que $\sin(\cdot)$ es una función impar y que $\cos(\cdot)$ es una función par. □

4.3. Generación de Procesos con Incrementos Ortogonales

En esta sección se analiza la construcción de nuevos procesos de incrementos ortogonales a partir de uno de tales procesos. La técnica de construcción es a través de integrales estocásticas.

Ejemplo 4.3.1. Sea $\{Z(\nu), -\pi \leq \nu \leq \pi\}$ un proceso de incrementos ortogonales con función de distribución asociado $F(\cdot)$, y suponga que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty$.

(a) Muestre que

$$W(\nu) = \int_{(-\pi, \nu]} f(\lambda) dZ(\lambda) \quad (4.3.1)$$

es un proceso de incrementos ortogonales con función de distribución asociada

$$G(\nu) = \int_{(-\pi, \nu]} |f(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$

(b) Muestre que si $g \in L^2(G)$ entonces, $\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dW(\lambda) \in L^2(F)$ y

$$\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dW(\lambda) = \int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) f(\lambda) dZ(\lambda).$$

(c) Muestre que si $\int_{(-\pi, \pi]} |f(\lambda)|^2 dF(\lambda) > 0$ (excepto posiblemente sobre un subconjunto de medida cero respecto a F), entonces

$$Z(\nu) = \int_{(-\pi, \nu]} \frac{1}{f(\lambda)} dW(\lambda).$$

Solución. Recuerde que

$$\int_{(-\pi, \nu]} f(\lambda) dZ(\lambda) = \int_{-\pi}^{\nu} I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) f(\lambda) dZ(\lambda) = I_Z(I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) f(\lambda))$$

donde el subíndice indica explícitamente el proceso de incrementos ortogonales subyacente.

(a) Para $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4$,

$$\begin{aligned} W(\nu_4) - W(\nu_3) &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{(-\pi, \nu_4]}(\lambda) (\lambda) dZ(\lambda) \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} I_{(-\pi, \nu_3]}(\lambda) (\lambda) dZ(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{(\nu_3, \nu_4]}(\lambda) (\lambda) dZ(\lambda) \end{aligned}$$

y, similarmente,

$$W(\nu_2) - W(\nu_1) = \int_{-\pi}^{\pi} I_{(\nu_1, \nu_2]}(\lambda) (\lambda) dZ(\lambda)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} &\langle W(\nu_4) - W(\nu_3), W(\nu_2) - W(\nu_1) \rangle \\ &= \langle I_{(\nu_3, \nu_4]}(\lambda) (\lambda), I_{(\nu_1, \nu_2]}(\lambda) (\lambda) \rangle_{L^2(F)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{(\nu_3, \nu_4]}(\lambda) (\lambda) \overline{I_{(\nu_1, \nu_2]}(\lambda) (\lambda)} dF(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{(\nu_3, \nu_4]}(\lambda) I_{(\nu_1, \nu_2]}(\lambda) |(\lambda)|^2 dF(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se uso el hecho que

$$I_{(\nu_3, \nu_4]}(\lambda) I_{(\nu_1, \nu_2]}(\lambda) = 0$$

pues $(\nu_3, \nu_4] \cap (\nu_1, \nu_2] = \emptyset$. Así, $\{W(\nu)\}$ es un proceso de incrementos ortogonales. Por otro lado, dado que $W(-\pi) = 0$, por (4.3.1), la función de distribución asociada a $\{W(\nu)\}$ es

$$\begin{aligned} G(\nu) &= \|W(\nu) - W(-\pi)\|^2 \\ &= \|W(\nu)\|^2 \\ &= \left\| \int_{-\pi}^{\pi} I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) (\lambda) Z(d\lambda) \right\|^2 \\ &= \|I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) (\lambda)\|_{L^2(F)}^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) |(\lambda)|^2 dF(\lambda) \\ &= \int_{(-\pi, \nu]} |(\lambda)|^2 dF(\lambda). \end{aligned}$$

(b) Observe que la fórmula anterior para $G(\nu)$ permite concluir que

$$\begin{aligned} \int_{(-\pi, \pi]} |g(\nu)|^2 G(d\nu) &= \int_{(-\pi, \pi]} |g(\nu)|^2 |\nu|^2 F(d\nu) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} |g(\nu) \nu|^2 F(d\nu) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

y entonces $g \in L^2(G)$ si y sólo si $g(\cdot) \nu \in L^2(F)$, y

$$\|g\|_{L^2(G)}^2 = \|g \nu\|_{L^2(F)}^2.$$

Por otro lado, de (4.3.1) se desprende que la igualdad

$$\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dW(\lambda) = \int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) \nu(\lambda) dZ(\lambda) \quad (4.3.3)$$

es cierta cuando $g(\lambda) = I_{(-\pi, \nu]}(\lambda)$ para alguna $\nu \in [-\pi, \pi]$, Entonces, por linealidad, la igualdad es también válida cuando

$$g = I_{(-\nu_1, \nu_2]} = I_{(-\pi, \nu_2]} - I_{(-\pi, \nu_1]}$$

para valores $\nu_1, \nu_2 \in [-\pi, \pi]$, y cuando

$$g = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{(a_i, b_i]};$$

puesto que este conjunto de combinaciones lineales es denso en $L^2(G)$ la continuidad de la integral estocástica en la media cuadrática implica que la anterior igualdad desplegada es válida para toda $g \in L^2(G)$.

(c) Note que $\nu/\nu = 1$ excepto en un conjunto de métrica cero con respecto a $F(\cdot)$, así que

$$\int_{(-\pi, \pi]} \left| \frac{\nu}{\nu} \right|^2 F(d\nu) = \int_{(-\pi, \pi]} 1 F(d\nu) = F(\pi) < \infty.$$

A partir de este punto, usando (4.3.2) se sigue que $g(\lambda) = 1/\nu(\lambda)$ pertenece a $L^2(G)$, así que por (4.3.3) con $g(\lambda) = I_{(-\pi, \nu]}(\lambda)/\nu(\lambda)$ conduce a

$$\begin{aligned} \int_{(-\pi, \pi]} I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) \frac{1}{\nu(\lambda)} dW(\lambda) &= \int_{(-\pi, \pi]} I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) \frac{1}{\nu(\lambda)} \nu(\lambda) dZ(\lambda) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} I_{(-\pi, \nu]}(\lambda) dZ(\lambda) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se usó $\frac{1}{\lambda}/\frac{1}{\lambda} = 1$ en $L^2(F)$. El último desplegado es equivalente a

$$\int_{(-\pi, \nu]} \frac{1}{\lambda} dW(\lambda) = \int_{(-\pi, \nu]} dZ(\lambda) = Z(\nu)$$

donde se usó $Z(-\pi) = 0$ para establecer la segunda igualdad. \square

En el siguiente ejemplo, se supone que la función de distribución espectral de un proceso de incrementos ortogonales $\{Z(\lambda)\}$ tiene la forma $dF_Z(\lambda) = |\phi(\lambda)|^2 dF(\lambda)$, y se trata de construir un nuevo proceso de incrementos ortogonales cuya función de distribución espectral sea $F(\cdot)$.

Ejemplo 4.3.2. Si $\{X_t\}$ es el proceso estacionario con representación espectral

$$X_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\nu} dZ_X(\nu), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

donde $E[|dZ_X(\nu)|^2] = |\phi(\nu)|^2 dF(\nu)$, $F(\cdot)$ es una función de distribución sobre $[-\pi, \pi]$, $\phi(\cdot) \neq 0$ casi en todas partes relativo a dF , y $\phi \in L^2(F)$, muestre que

$$\begin{aligned} Y_t &= \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\nu} \frac{1}{\phi(\nu)} dZ_X(\nu) \\ &= I_{Z_X} \left(e^{it\nu} \frac{1}{\phi(\nu)} \right), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

es un proceso estacionario con función de distribución espectral F .

Solución. Sea $G(\nu)$ la función de distribución espectral de $\{X_t\}$ de manera que $dG(\nu) = E[|dZ_X(\nu)|^2]$. Por lo tanto la condición $E[|dZ_X(\nu)|^2] = |\phi(\nu)|^2 dF(\nu)$ significa que $dG(\nu) = |\phi(\nu)|^2 dF(\nu)$, y entonces

$$\int_{(-\pi, \pi]} |g(\nu)|^2 dG(\nu) = \int_{(-\pi, \pi]} |g(\nu)|^2 |\phi(\nu)|^2 dF(\nu) \tag{4.3.5}$$

para cualquier $g(\cdot)$ definido sobre $(-\pi, \pi]$. Usando esta relación con $g(\lambda) = 1/\phi(\lambda)$, se sigue que

$$\int_{(-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{\phi(\lambda)} \right|^2 dG(\lambda) = \int_{(-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{\phi(\lambda)} \right|^2 |\phi(\lambda)|^2 dF(\lambda) = F(\pi) < \infty$$

donde la segunda igualdad se debe a la condición $1 = \phi(\lambda)[1/\phi(\lambda)]$ en $L^2(F)$. Esto demuestra que $1/\phi(\lambda)$ es un miembro de $L^2(G)$ y, en consecuencia, $e^{it\lambda}/\phi(\lambda) \in L^2(G)$. A partir de este punto, se sigue que la integral estocástica especificando a Y_t está bien definida. Finalmente, note que $E[Y_t] = 0$ (pues $E[Z(\lambda)] = 0$ para cada λ) mientras que, recordando que la representación $g \mapsto I_{Z_X}(g)$ es un isomorfismo entre $L^2(G)$ y $\overline{\text{sp}}\{X_s, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) &= \langle Y_{t+h}, Y_t \rangle \\ &= \left\langle I_{Z_X} \left(e^{i(t+h)\nu} \frac{1}{\phi(\nu)} \right), I_{Z_X} \left(e^{it\nu} \frac{1}{\phi(\nu)} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle e^{i(t+h)\nu} \frac{1}{\phi(\nu)}, e^{it\nu} \frac{1}{\phi(\nu)} \right\rangle_{L^2(G)} \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} \frac{e^{i(t+h)\nu}}{\phi(\nu)} \overline{\left(\frac{e^{it\nu}}{\phi(\nu)} \right)} dG(\lambda) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} \frac{e^{ih\nu}}{|\phi(\nu)|^2} dG(\lambda). \end{aligned}$$

Entonces, recordando que $dG(\lambda) = |\phi(\lambda)|^2 dF(\lambda)$,

$$\text{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ih\nu} dF(\lambda);$$

esta ecuación muestra que:

- (i) $\text{Cov}(Y_{t+h}, Y_t)$ no depende de t , así que $\{Y_t\}$ es estacionario, y
- (ii) $\gamma_Y(h) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ih\nu} dF(\lambda)$, mostrando que F es la función de distribución espectral de $\{Y_t\}$. □

El siguiente resultado se refiere a una propiedad fundamental en la teoría de series de Fourier. La función indicadora de un intervalo cuyos extremos son puntos de continuidad de una función de distribución, es el límite, en $L^2(F)$, de sus aproximaciones de Fourier.

Ejemplo 4.3.3. Sea $h_n(\lambda)$ la aproximación de Fourier de orden n para $I_{(\nu, \omega]}(\lambda)$, que es,

$$h_n(\lambda) = \sum_{|j| \leq n} \alpha_j e^{ij\lambda}$$

donde

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{(\nu, \omega]}(\lambda) e^{-ij\lambda} d\lambda$$

recuerde ahora las siguientes propiedades de $\{h_n\}$:

- (i) $\max_{\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cada conjunto abierto E que contiene a ν y ω .
- (ii) $\max_{\lambda \in [-\pi, \pi]} |h_n(\lambda)| \leq M < \infty$.

Utilizando estos hechos establezca el siguiente resultado: Si F es la función de la distribución espectral de la sucesión estacionaria $\{X_n\}$ y si ν y ω son puntos de continuidad de F tal que $-\pi < \nu < \omega < \pi$, entonces

$$h_n(\cdot) \xrightarrow{L^2(F)} I_{(\nu, \omega]}(\lambda).$$

Solución. Dado $\delta > 0$, defina $E_\delta = (-\delta + \nu, \nu + \delta) \cup (-\delta + \omega, \omega + \delta)$ y note que, seleccionando al número δ suficientemente pequeño, puede suponerse que $E_\delta \subset (-\pi, \pi)$. Observe ahora que

$$|h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)| \leq \begin{cases} \max_{\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E_\delta} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)|, & \lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E_\delta, \\ M + 1, & \text{si } \lambda \in E_\delta \end{cases}$$

De esta relación se desprende que

$$\begin{aligned} & \int_{[-\pi, \pi]} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)|^2 dF(\lambda) \\ & \leq \left(\max_{\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E_\delta} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)| \right)^2 \int_{[-\pi, \pi] \setminus E_\delta} dF(\lambda) \\ & \quad + (M + 1)^2 \int_{E_\delta} dF(\lambda). \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

A continuación, observe que $\int_{E_\delta} dF(\lambda) = \int_{(\nu - \delta, \nu + \delta) \cup (\omega - \delta, \omega + \delta)} F(d\lambda) \rightarrow 0$ cuando $\delta \downarrow 0$, puesto que ν y ω son puntos de continuidad de F . Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta^* > 0$ tal que

$$(M + 1)^2 \int_{E_{\delta^*}} dF(\lambda) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3.7}$$

Ahora, utilizando, la propiedad (i), se desprende que

$$\begin{aligned} & \left(\max_{\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E_{\delta^*}} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)| \right)^2 \int_{[-\pi, \pi] \setminus E_{\delta^*}} dF(\lambda) \\ & \leq \left(\max_{\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E_{\delta^*}} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)| \right)^2 F(\pi) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

así que hay un entero positivo N tal que

$$\left(\max_{\lambda \in [-\pi, \pi] \setminus E_{\delta^*}} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)| \right)^2 \int_{[-\pi, \pi] \setminus E_{\delta^*}} dF(\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } n \geq N.$$

Reemplazando δ por δ^* en (4.3.6), el desplegado anterior y (4.3.7) implican que

$$\int_{[-\pi, \pi]} |h_n(\lambda) - I_{(\nu, \omega]}(\lambda)|^2 dF(\lambda) \leq \varepsilon, \quad \text{si } n \geq N,$$

mostrando que $h_n \xrightarrow{L^2(F)} I_{(\nu, \omega]}$. □

El problema que se analiza a continuación, es determinar el filtro lineal que conduce de una serie $\{X_t\}$ a otra serie $\{Y_t\}$, cuando se conoce la representación de $\{Y_t\}$ como una integral estocástica respecto al proceso de incrementos ortogonales asociado a $\{X_t\}$.

Ejemplo 4.3.4. Sea $\{Z(\nu), -\pi \leq \nu \leq \pi\}$ un proceso de incrementos ortogonales con $E[|Z(\nu_2) - Z(\nu_1)|^2] = a(\nu_2 - \nu_1)$, $\nu_2 \geq \nu_1$. Muestre que

$$Y_t = \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2) e^{it\nu} dZ(\nu),$$

es un proceso estacionario y determine su densidad espectral y varianza. Si

$$X_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{i\nu t} dZ(\nu),$$

encuentre los coeficientes del filtro lineal que, al ser aplicado a $\{Y_t\}$, produce la serie $\{X_t\}$.

Solución. Observe que la función de distribución espectral F asociada a $\{Z(\lambda)\}$ satisface $F(\nu_2) - F(\nu_1) = E[|Z(\nu_2) - Z(\nu_1)|^2] = a(\nu_2 - \nu_1)$, $\nu_2 \geq \nu_1$, así que

$$dF(\nu) = a d\nu.$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned} \|(\pi - |\nu|/2)e^{it\nu}\|_{L^2(F)}^2 &= a \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)^2 d\nu \\ &= 2a \int_0^\pi (\pi - \nu/2)^2 d\nu, \end{aligned}$$

esto es,

$$\|(\pi - |\nu|/2)e^{it\nu}\|_{L^2(F)}^2 = \frac{7a\pi^3}{12}.$$

y entonces, como $(\pi - |\nu|/2)e^{it\nu}$ pertenece a $L^2(F)$, la integral estocástica que define a Y_t esta bien definida. También, note que $E[Y_t] = 0$ y que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) &= \left\langle \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)e^{i(t+h)\nu} dZ(\nu), \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)e^{it\nu} dZ(\nu) \right\rangle \\ &= \left\langle (\pi - |\nu|/2)e^{i(t+h)\nu}, (\pi - |\nu|/2)e^{it\nu} \right\rangle_{L^2(F)} \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)e^{i(t+h)\nu} \overline{(\pi - |\nu|/2)e^{it\nu}} dF(\nu) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)^2 e^{ih\nu} dF(\nu) \\ &= a \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)^2 e^{ih\nu} d\nu, \end{aligned}$$

lo cual muestra que $\text{Cov}(Y_{t+h}, Y_t)$ no depende de t , así que $\{Y_t\}$ es estacionario, y la función de autocovarianza de la serie está dada por

$$\gamma_Y(h) = a \int_{(-\pi, \pi]} (\pi - |\nu|/2)^2 e^{ih\nu} d\nu.$$

Por lo tanto, la densidad espectral de $\{Y_t\}$ es $f_Y(\nu) = a(\pi - |\nu|/2)^2$. Para concluir, note que si el filtro lineal $\{k\}$ se aplica a $\{X_t\}$ para producir $\{Y_t\}$ debe tenerse que

$$Y_t = \int_{(-\pi, \pi]} e^{it\lambda} (e^{-i\lambda}) dZ(\lambda);$$

comparando esta expresión con la fórmula que define a Y_t , se desprende que $(e^{-i\lambda}) = \pi - |\lambda|/2$ o, equivalentemente,

$$(e^{i\lambda}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k e^{ik\lambda} = \pi - |\lambda|/2.$$

A partir de esta igualdad se desprende que

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |\lambda|/2) e^{-ik\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - \lambda/2) \cos(|k|\lambda) d\lambda.$$

Por lo tanto

$$k = \begin{cases} 3\pi/4, & \text{if } k = 0, \\ (1 - (-1)^{|k|})/(\pi h^2), & \text{if } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

concluyendo el argumento. □

4.4. Existencia de Procesos ARMA

El problema de investigar la existencia de un proceso estacionario $\{X_t\}$ que satisfaga las ecuaciones ARMA

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

donde $\phi(z)$ y $\theta(z)$ son polinomios, es básico en el análisis de series de tiempo. Cuando $\phi(z)$ no se anula en puntos z con módulo 1, estas ecuaciones tienen solución (Chacón Hernández, 2010). En el siguiente ejemplo se demuestra, por medio de la teoría espectral, que si $\phi(z) = 0$ para algún punto z con $|z| = 1$, entonces no existe proceso estacionario que satisfaga las anteriores ecuaciones ARMA.

Ejemplo 4.4.1. Muestre que si $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ son polinomios sin raíces comunes y si $\phi(z) = 0$ para algún número complejo con $|z| = 1$, entonces las ecuaciones ARMA

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \quad (4.4.1)$$

no tienen solución estacionaria.

Solución. Suponga que (4.4.1) se satisface por una serie estacionaria $\{X_t\}$ y defina

$$Y_t = \phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

en este caso $\{Y_t\}$ es también estacionaria. Sea F_Y, F_X y F_Z las funciones de distribución espectral de las series $\{Y_t\}$, $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$, respectivamente. Con esta notación,

$$dF_Y(\lambda) = |\phi(e^{-i\lambda})|^2 dF_X(\lambda) = |\theta(e^{-i\lambda})|^2 dF_Z(\lambda)$$

y entonces, para cada función compleja $g(\cdot)$ definida sobre $[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \int_{(-\pi, \pi]} |g(\lambda)|^2 dF_Y(\lambda) &= \int_{(-\pi, \pi]} |g(\lambda)|^2 |\phi(e^{-i\lambda})|^2 dF_X(\lambda) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]} |g(\lambda)|^2 |\theta(e^{-i\lambda})|^2 dF_Z(\lambda) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Ahora, sea \mathcal{C} el conjunto de ceros de $\phi(e^{-i\lambda})$:

$$\mathcal{C} = \{\omega \in (-\pi, \pi] \mid \phi(e^{-i\omega}) = 0\},$$

y defina

$$g(\lambda) = \frac{1}{\phi(e^{-i\lambda})}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}, \quad \text{y} \quad g(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathcal{C};$$

Con esta notación,

$$g(\lambda)\phi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \in \lambda \in (-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C} \\ 0, & \text{if } \lambda \in \mathcal{C}, \end{cases}$$

y

$$g(\lambda)\theta(\lambda) = \begin{cases} \theta(e^{-i\lambda})/\phi(e^{-i\lambda}), & \text{if } \lambda \in \lambda \in (-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C} \\ 0, & \text{if } \lambda \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

A partir de la segunda igualdad en (4.4.2) aplicada a esta función $g(\cdot)$ se desprende que

$$\int_{(-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}} dF_X(\lambda) = \int_{(-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 dF_Z(\lambda);$$

donde $\int_{(-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}} dF_X(\lambda) \leq \int_{(-\pi, \pi]} dF_X(\lambda) = F_X(\pi) < \infty$; por lo tanto,

$$\infty > \int_{(-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 dF_Z(\lambda). \quad (4.4.3)$$

Suponga ahora que \mathcal{C} no es vacío, y seleccione $\omega_0 \in \mathcal{C}$, de manera que $e^{-i\omega_0}$ es una raíz $\phi(\cdot)$. Puesto que $\theta(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ no tienen raíces comunes, recordando que \mathcal{C} es finito se sigue que existe $\delta > 0$ tal que

$$[\omega_0 - \delta, \omega_0] \subset (-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}, \quad \text{y} \quad \theta(e^{-i\lambda}) \neq 0 \quad \text{para} \quad \lambda \in [\omega_0 - \delta, \omega_0]. \quad (4.4.4)$$

Ahora, sean $m > 0$ la multiplicidad de la raíz $e^{-i\omega_0}$ de $\phi(\cdot)$, y note que en este caso

$$\phi(e^{-i\lambda}) = (1 - e^{i\omega_0} e^{-i\lambda})^m \tilde{\phi}(e^{-i\lambda}), \quad \text{donde} \quad \tilde{\phi}(e^{-i\omega_0}) \neq 0. \quad (4.4.5)$$

Sin pérdida de generalidad, $\delta > 0$ puede ser seleccionado de tal forma que, además de (4.4.4), $\tilde{\phi}(e^{-i\lambda}) \neq 0$ cuando $\lambda \in [\omega_0 - \delta, \omega_0]$; con esta elección, existe una constante positiva B tal que $|\theta(e^{-i\lambda})/\tilde{\phi}(e^{-i\lambda})|^2 \geq B$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 &= \frac{1}{|1 - e^{i\omega_0} e^{-i\lambda}|^{2m}} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\tilde{\phi}(e^{-i\lambda})} \right|^2 \\ &\geq \frac{B}{|1 - e^{i\omega_0} e^{-i\lambda}|^{2m}}, \quad \lambda \in [\omega_0 - \delta, \omega_0]. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

A continuación, note que

$$|1 - e^{i\omega_0} e^{-i\lambda}| = |(e^{i\omega_0} - e^{i\lambda})e^{-i\lambda}| = |e^{i\omega_0} - e^{i\lambda}|;$$

utilizando que

$$|e^{i\omega_0} - e^{i\lambda}|/|\lambda - \omega_0| \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad \lambda \rightarrow \omega_0,$$

$\delta > 0$ puede ser elegido de tal manera que la siguiente relación es también válida para alguna constante $b > 0$:

$$|1 - e^{i\omega_0} e^{-i\lambda}| \leq b|\lambda - \omega_0|, \quad \lambda \in [\omega_0 - \delta, \omega_0].$$

Combinando este hecho con (4.4.6) se obtiene

$$\left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 \geq \frac{B}{b^{2m}} \frac{1}{|\lambda - \omega_0|^{2m}}, \quad \lambda \in [\omega_0 - \delta, \omega_0].$$

Puesto que $[\omega_0 - \delta, \omega_0] \subset (-\pi, \pi] \setminus \mathcal{C}$, (4.4.3) implica que

$$\infty > \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0} \frac{1}{|\lambda - \omega_0|^{2m}} dF_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0} \frac{1}{|\lambda - \omega_0|^{2m}} d\lambda,$$

donde para establecer la segunda igualdad se usó que el ruido blanco $\{Z_t\}$ tiene densidad espectral $\sigma^2/(2\pi)$. Sin embargo, puesto que m es positiva,

$$\int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0} 1/|\lambda - \omega_0|^{2m} d\lambda = \infty,$$

estableciendo una contradicción con el desplegado previo. Consecuentemente, si $\theta(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ no tienen raíces comunes, una serie estacionaria $\{X_t\}$ que satisfaga las ecuaciones ARMA no existe cuando el polinomio autorregresivo tiene una raíz en el círculo unitario. \square

4.5. Representación Causal

Considera un proceso ARMA $\{X_t\}$

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

donde $\phi(z)$ y $\theta(z)$ son polinomios que satisfacen $\phi(0) = \theta(0) = 1$. Cuando $\phi(z) = 0$ para algún z con $|z| < 1$, es difícil determinar la función de autocovarianza de $\{X_t\}$, y es conveniente construir un polinomio $\tilde{\phi}(z)$ y un ruido blanco $\{Z_t\}$ tales que

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \theta(B)\tilde{Z}_t, \quad \{\tilde{Z}_t\} \sim WN(0, \tilde{\sigma}^2),$$

donde $\tilde{\phi}(z) \neq 0$ si $|z| \leq 1$. En este caso, la representación anterior se denomina causal y el siguiente problema trata con la construcción del polinomio $\tilde{\phi}(z)$ y del proceso $\{\tilde{Z}_t\}$. Para otro enfoque, vea (Martínez Martínez, 2010).

Ejemplo 4.5.1. Sea $\{X_t\}$ Una solución estacionaria de las ecuaciones

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

donde

$$\phi(z) = (1 - a_1^{-1}z) \cdots (1 - a_r^{-r}z)(1 - a_{r+1}^{-1}z) \cdots (1 - a_p^{-1}z),$$

y

$$|a_i| > 1, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad |a_i| < 1, \quad i = r + 1, \dots, p.$$

Defina

$$\tilde{\phi}(z) = (1 - a_1^{-1}z) \cdots (1 - a_r^{-r}z)(1 - \bar{a}_{r+1}z) \cdots (1 - \bar{a}_p z),$$

y muestre (calculando la densidad espectral) que $\{\tilde{\phi}(B)X_t\}$ tiene la misma función de autocovarianza que $\{|a_{r+1} \cdots a_p| \theta(B)Z_t\}$. Por lo tanto existe un ruido blanco $\{\tilde{Z}_t\}$ en términos del cual $\{X_t\}$ tiene la representación causal

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \theta(B)\tilde{Z}_t.$$

¿Cuál es la varianza de \tilde{Z}_t ?

Solución. Como punto de partida, observe que para cualquier número complejo $a \neq 0$ con $|a| \neq 1$ y $\lambda \in (-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} |1 - a^{-1}e^{-i\lambda}| &= |a^{-1}e^{-i\lambda}(ae^{i\lambda} - 1)| \\ &= |a|^{-1}|\overline{ae^{i\lambda} - 1}| \\ &= |a|^{-1}|\bar{a}e^{-i\lambda} - 1| \\ &= |a|^{-1}|1 - \bar{a}e^{-i\lambda}|. \end{aligned}$$

Así, la especificación del polinomio $\tilde{\phi}(\cdot)$ implica que

$$\left| \frac{\tilde{\phi}(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right| = \prod_{i=r+1}^p |a_i|. \quad (4.5.1)$$

Recuerde ahora que la densidad espectral del polinomio $\{X_t\}$ está dada por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2$$

de manera que la densidad espectral del proceso $\{Y_t = \tilde{\phi}(B)X_t\}$ es

$$\begin{aligned} f_Y(\lambda) &= |\tilde{\phi}(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\tilde{\phi}(e^{-i\lambda})|^2 \left| \frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2 \prod_{i=r+1}^p |a_i|^2}{2\pi} |\theta(e^{-i\lambda})|^2 \end{aligned}$$

la cual coincide con la densidad espectral de un proceso de promedios móviles $\{\theta(B)Z_t^*\}$, donde $Z_t^* = (\prod_{i=r+1}^p |a_i|)Z_t$. Para concluir, se construirá un ruido blanco $\{\tilde{Z}_t\}$ tal que $\{X_t\}$ satisface las ecuaciones ARMA

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \theta(B)\tilde{Z}_t.$$

Primero, defina los polinomios

$$\phi_1(z) = (1 - a_1^{-1}z) \cdots (1 - a_r^{-1}z), \quad \text{y} \quad \phi_2(z) = (1 - a_{r+1}^{-1}z) \cdots (1 - a_p^{-1}z),$$

y

$$\tilde{\phi}_2(z) = (1 - \bar{a}_{r+1}z) \cdots (1 - \bar{a}_p z).$$

Con esta notación, a partir de (4.5.1) se desprende que

$$\tilde{\phi}(z) = \phi_1(z)\tilde{\phi}_2(z),$$

y entonces

$$\left| \frac{\tilde{\phi}_2(e^{-i\lambda})}{\phi_2(e^{-i\lambda})} \right| = \left| \frac{\tilde{\phi}(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})} \right| = \prod_{i=r+1}^p |a_i|. \quad (4.5.2)$$

Escribiendo las ecuaciones originales $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$ como

$$\phi_2(B)\phi_1(B)X_t = \theta(B)Z_t$$

se desprende que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(B)X_t &= \tilde{\phi}_2(B)\phi_1(B)X_t \\ &= \theta(B) (B)Z_t, \quad \text{donde} \quad (z) = \frac{\tilde{\phi}_2(z)}{\phi_2(z)}; \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

definiendo

$$\tilde{Z}_t = (B)Z_t, \quad (4.5.4)$$

la densidad espectral de $\{\tilde{Z}_t\}$ es dado por

$$F_{\tilde{Z}}(\lambda) = | (e^{-i\lambda})|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2 \prod_{i=r+1}^p |a_i|^2}{2\pi}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de la definición de en (4.5.3) y (4.5.2).

Por consiguiente,

$$\{\tilde{Z}_t\} \sim WN(0, \tilde{\sigma}^2), \quad \text{donde } \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \prod_{i=r+1}^p |a_i|^2;$$

combinando las ecuaciones ARMA en (4.5.3) con la especificación \tilde{Z}_t en (4.5.4) se desprende que $\tilde{\phi}(B)X_t = \theta(B)\tilde{Z}_t$. \square

4.6. Procesos con Función de Ditrribución Simétrica

En esta sección se estudian procesos con incrementos ortogonales cuya función de distribución espectral es simétrica. El resultado que se desea establecer es el siguiente.

Theorem 4.31. Sea $\{Z(\lambda)\}$ un proceso de incrementos ortogonales con función de densidad espectral simétrica $f(\lambda)$. En este caso,

- (i) $Z(\lambda) - Z(\lambda_0) = \overline{Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)}$.
- (ii) $\{\overline{Z(\lambda)}\}$ es un proceso de incrementos ortogonales con la misma función de densidad espectral $f(\cdot)$

Si $g(\lambda) \in L^2(f)$ es una función real par, entonces

- (iii) $\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dZ(\lambda)$ es real, y
- (iv) $\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dZ(\lambda) = \int_{(0, \pi]} g(\lambda) dZ(\lambda) + \int_{(0, \pi]} g(\lambda) d\overline{Z(\lambda)}$.

Demostración.

- (i) Para empezar, note que si g es una función par acotada, los coeficientes de Fourier $\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) e^{i\lambda k}$ son reales. Usando este hecho con

$$g(\lambda) = I_{[-\lambda, -\lambda_0]}(\lambda) + I_{[\lambda_0, \lambda]}(\lambda) \quad (4.6.1)$$

se desprende que en la n -ésima aproximación de Fourier para esta función $g(\lambda)$

$$h_n(\lambda) = \sum_{|k| \leq n} \beta_k e^{i\lambda k}, \text{ donde}$$

$$\beta_k = \int_{(-\pi, \pi]} [I_{[-\lambda, -\lambda_0]}(\lambda) + I_{[\lambda_0, \lambda]}(\lambda)] e^{-i\lambda k} d\lambda$$

los coeficientes β_k son reales. Puesto que $|h_n(\cdot) - g(\cdot)| \leq M$ para alguna constante M y $h_n(\lambda) \rightarrow g(\omega)$ para cualquier $\omega \neq \lambda, \lambda_0, -\lambda, -\lambda_0$, el teorema de convergencia acotada implica que $\|h_n - g\|_{L^2(f)}^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, propiedad que, por la continuidad de la integral estocástica, implica la convergencia

$$I_Z(h_n) \rightarrow I_Z(g) \quad \text{en media cuadrática.}$$

Observando que $I_Z(h_n) = \sum_{|k| \leq n} \beta_k I_Z(e^{i\lambda k}) = \sum_{|k| \leq n} \beta_k X_k$ se sigue que $I_Z(h_n)$ es una variable aleatoria real, pues las variables X_k toman valores reales y la anterior convergencia desplegada implica que

$$\begin{aligned} I_Z(g) &= I_Z(I_{[-\lambda, -\lambda_0]}(\lambda)) + I_Z(I_{[\lambda_0, \lambda]}(\lambda)) \\ &= [Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)] + [Z(\lambda) - Z(\lambda_0)] \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

es una variable aleatoria real. Por otro lado, si g es una función impar, sus coeficientes de Fourier son imaginarios puros, y aplicando esta observación a la función $g(\lambda) = I_{[-\lambda, -\lambda_0]}(\lambda) - I_{[\lambda_0, \lambda]}(\lambda)$, un argumento similar al

precedente muestra que los coeficientes α_k en la aproximaciones de Fourier $\tilde{h}_n = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k e^{i\lambda k}$ para esta función impar g son todos imaginarios, y que $\|I(\tilde{h}_n) - g\|_{L^2(f)}^2 \rightarrow 0$. Así, $I_Z(\tilde{h}_n) \rightarrow I_Z(g)$ en media cuadrática; puesto que

$I_Z(\tilde{h}_n) = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k I_Z(e^{i\lambda k}) = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k X_k$, se desprende que $I_Z(\tilde{h}_n)$ toma sólo valores imaginarios, y por lo tanto $I_Z(g)$ también lo hace:

$$[Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)] - [Z(\lambda) - Z(\lambda_0)] \quad (4.6.3)$$

toma sólo valores imaginarios.

Ahora, escriba

$$[Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)] = X + iY, \quad [Z(\lambda) - Z(\lambda_0)] = X_1 + iY_1$$

Con esta notación, (4.6.2) implica que $X + iY + (X_1 + iY_1) = X + X_1 + i(Y + Y_1)$ es real, y entonces

$$Y_1 = -Y$$

De manera similar, (4.6.3) implica que $X + iY - (X_1 + iY_1) = X - X_1 + i(Y - Y_1)$ es imaginario puro de manera que

$$X = X_1$$

Las tres últimas relaciones desplegadas implican

$$Z(\lambda) - Z(\lambda_0) = \overline{Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)},$$

estableciendo la parte (i).

(ii) Solo note que, para $-\pi < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 \leq \pi$

$$\begin{aligned} & \langle \overline{Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)}, \overline{Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3)} \rangle \\ &= E[(\overline{Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)})(\overline{Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3)})] \\ &= E[\overline{Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1)}(Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3))] \\ &= \langle Z(\lambda_4) - Z(\lambda_3), Z(\lambda_2) - Z(\lambda_1) \rangle = 0, \end{aligned}$$

así que $\{\overline{Z(\lambda)}\}$ tiene incrementos ortogonales .

(iii) Sea g como en (4.6.1), esto es,

$$g(\nu) = I_{[-\lambda, -\lambda_0]}(\nu) + I_{[\lambda_0, \lambda]}(\nu),$$

donde $-\pi \leq \lambda_0 < \lambda < \pi$. Para esta función

$$\int_{(-\pi, \pi]} g(\nu) dZ(\nu) = [Z(\lambda) - Z(\lambda_0)] + [Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)]$$

$$\int_{(0, \pi]} g(\nu) dZ(\nu) = [Z(\lambda) - Z(\lambda_0)]$$

y

$$\int_{(0, \pi]} g(\nu) d\overline{Z(\nu)} = [\overline{Z}(\lambda) - \overline{Z}(\lambda_0)] = \overline{Z(\lambda) - Z(\lambda_0)} = Z(-\lambda_0) - Z(-\lambda)$$

donde la segunda igualdad sigue de la parte (i). Estos tres últimos desplegados muestran que, cuando g es como en (4.6.1),

$$\int_{(-\pi, \pi]} g(\nu) dZ(\nu) = \int_{(0, \pi]} g(\nu) dZ(\nu) + \int_{(0, \pi]} g(\nu) d\overline{Z(\nu)} \quad \text{es real.}$$

Por la linealidad de la integral estocástica, esta igualdad es también válida cuando $g = \sum c_k g_k$ es una combinación lineal de funciones g_k de la forma (4.6.1), y entonces, puesto que cada función real par en $L^2(f)$ se puede aproximar en media cuadrática por una secuencia de tales combinaciones, la continuidad de las integrales estocásticas implica que la anterior igualdad desplegada es válida para todo $g \in L^2(f)$, estableciendo las partes (iii) y (iv). \square

4.7. Un Ejemplo Sobre Movimiento Browniano

Un movimiento Browniano es un proceso estacionario de incrementos ortogonales $\{B(\lambda)\}$ tal que $B(\lambda_1) - B(\lambda_0)$ tiene distribución normal con media nula y varianza $a|\lambda_1 - \lambda_0|$. Estos procesos desempeñan un papel importante en la teoría general de la probabilidad (Billingsley, 1995) y, desde luego, en el estudio de series de tiempo. El siguiente ejemplo trata con un movimiento Browniano.

Ejemplo 4.7.1. Sea $\{B(\lambda), -\pi \leq \lambda \leq \pi\}$ un movimiento browniano. Si $g \in L^2(d\lambda)$ es una función simétrica de valores reales, muestre que el proceso definido por

$$X_t = \int_{(-\pi,0]} \sqrt{2} \cos(t\nu)g(\nu)dB(\nu) + \int_{(0,\pi]} \sqrt{2} \sin(t\nu)g(\nu)dB(\nu),$$

para $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, es un proceso estacionario Gaussiano (normal) con función de densidad espectral $g^2(\lambda)\sigma^2/(2\pi)$. Inversamente, suponga que $\{X_t\}$ es un proceso estacionario real Gaussiano con proceso de incrementos ortogonales $Z(\lambda)$ y función de densidad espectral $f(\lambda)$ estrictamente positiva. Muestre que el proceso

$$B(\lambda) = \int_{(0,\lambda]} f^{-1/2}(\nu)[dZ(\nu) + \overline{dZ(\nu)}], \quad \lambda \in [0, \pi]$$

es un movimiento Browniano.

Solución. La función de distribución espectral del movimiento Browniano en este problema es $F(\lambda) = \sigma^2(\lambda + \pi)/(2\pi)$. Ahora, defina

$$f_t(\nu) = \sqrt{2} \cos(t\nu)g(\nu)I_{(-\pi,0]}(\nu) + \sqrt{2} \sin(t\nu)g(\nu)I_{(0,\pi]}(\nu),$$

y note que

$$X_t = \int_{(-\pi,\pi]} f_t(\lambda)dB(\lambda).$$

Como es el caso de cada integral estocástica con respecto a un proceso de incremento ortogonal, $E[X_t] = 0$. Para calcular la función de autocovarianza de $\{X_t\}$,

observe que

$$\begin{aligned}
\langle X_{t+h}, X_t \rangle &= \langle f_{t+h}, f_t \rangle_{L^2(F)} \\
&= \int_{(-\pi, \pi]} f_{t+h}(\lambda) f_t(\lambda) dF(\lambda) \\
&= \int_{(-\pi, 0]} 2 \cos((t+h)\lambda) \cos(t\lambda) g^2(\lambda) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\
&\quad + \int_{(0, \pi]} 2 \sin((t+h)\lambda) \sin(t\lambda) g^2(\lambda) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\
&= \int_{(0, \pi]} 2 \cos((t+h)\lambda) \cos(t\lambda) g^2(\lambda) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\
&\quad + \int_{(0, \pi]} 2 \sin((t+h)\lambda) \sin(t\lambda) g^2(\lambda) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda
\end{aligned}$$

donde se empleó que el $\cos(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son funciones pares para establecer la última igualdad. Empleando la identidad

$$\cos(h\nu) = \cos((t+h)\nu - t\nu) = \cos((t+h)\nu) \cos(t\nu) + \sin((t+h)\nu) \sin(t\nu)$$

se desprende que

$$\begin{aligned}
\langle X_{t+h}, X_t \rangle &= \int_{(0, \pi]} 2 \cos(h\nu) g^2(\nu) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\nu \\
&= \int_{(-\pi, \pi]} \cos(h\nu) g^2(\nu) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\nu \\
&= \int_{(-\pi, \pi]} e^{ih\nu} g^2(\nu) \frac{\sigma^2}{2\pi} d\nu
\end{aligned}$$

mostrando que

- (i) $\langle X_{t+h}, X_t \rangle$ no depende de t , así que $\{X_t\}$ es estacionario, y
- (ii) $\gamma_X(h) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{ih\nu} g^2(\nu) \sigma^2 / (2\pi) d\nu$ para cualquier h , esto es, $g^2(\nu) \sigma^2 / (2\pi)$ es la densidad espectral de $\{X_t\}$.

El proceso $\{X_t\}$ es *Gaussiano*. Para verificar esta afirmación, seleccione enteros arbitrarios t_1, \dots, t_n y considere el vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$. Dado $\varepsilon > 0$, para cualquier i , hay una función escalonada

$$f_{t_i}^\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^i I_{(a_k^i, b_k^i]}(\lambda), \quad \text{tal que } \|f_{t_i}^\varepsilon(\lambda) - e^{it\lambda}\|_{L^2(F)}^2 < \varepsilon. \quad (4.7.1)$$

Observando que

$$I_B(f_{t_i}^\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^i [B(b_k^i) - B(a_k^i)], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

se desprende que $(I_B(f_{t_1}^\varepsilon), I_B(f_{t_2}^\varepsilon), \dots, I_B(f_{t_n}^\varepsilon))$ tiene una distribución Gaussiana, pues el vector es una combinación lineal de variables Gaussianas independientes. Además, la desigualdad en (4.7.1) implica que

$$\|X_{t_j} - I_B(f_{t_j}^\varepsilon)\| = \|I(e^{it_j\lambda}) - I_B(f_{t_j}^\varepsilon)\| = \|e^{it_j\lambda} - f_{t_j}^\varepsilon\|_{L^2(F)} \leq \varepsilon F(\pi),$$

y entonces

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = \text{m. s. lim}_{\varepsilon \searrow 0} (I_B(f_{t_1}^\varepsilon), I_B(f_{t_2}^\varepsilon), \dots, I_B(f_{t_n}^\varepsilon));$$

como los límites en la media cuadrática de vectores Gaussianos son también Gaussianos, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ tiene una distribución Gaussiana.

Recordatorio 4.31. Un argumento similar muestra que si $\{Z(\lambda)\}$ es un proceso con incrementos ortogonales Gaussianos, entonces $\int_{(-\pi, \pi]} g(\lambda) dZ(\lambda)$ es una variable aleatoria Gaussiana.

Conversamente, suponga que $\{X_t\}$ es un proceso estacionario real gaussiano con procesos de incrementos ortogonales $\{Z(\lambda)\}$ con densidad espectral $f(\lambda)$ la cual es positivo en $[-\pi, \pi]$. Primero, se mostrará que el proceso $\{W(\lambda), \lambda \in [0, \pi]\}$ definido por

$$W(\lambda) = \int_{[-\lambda, \lambda]} f^{-1/2}(\nu) dZ(\nu)$$

es un movimiento Browniano.

(a) Observe que

$$W(\lambda) - W(\lambda_0) = \int_{[-\lambda, -\lambda_0] \cup (\lambda_0, \lambda]} f^{-1/2}(\nu) dZ(\nu)$$

para $0 \leq \lambda_0 < \lambda \leq \pi$,

así el incremento $W(\lambda) - W(\lambda_0)$ tiene una distribución gaussiana (vea Recordatorio 4.31 anterior). Además,

$$\begin{aligned} \|W(\lambda) - W(\lambda_0)\|^2 &= \int_{[-\lambda, -\lambda_0] \cup (\lambda_0, \lambda]} |f^{-1/2}(\nu)|^2 dF_Z(\nu) \\ &= \int_{[-\lambda, -\lambda_0] \cup (\lambda_0, \lambda]} |f^{-1/2}(\nu)|^2 f(\nu) d\nu \quad (4.7.2) \\ &= \int_{[-\lambda, -\lambda_0] \cup (\lambda_0, \lambda]} d\nu = 2(\lambda - \lambda_0) \end{aligned}$$

(b) Ahora seleccione α_0 y α tal que $0 \leq \lambda_0 < \lambda < \alpha_0 < \alpha \leq \pi$. En este caso

$$W(\alpha) - W(\alpha_0) = \int_{[-\alpha, -\alpha_0] \cup (\alpha_0, \alpha]} f^{-1/2}(\nu) dZ(\nu);$$

donde las regiones $[-\alpha, -\alpha_0] \cup (\alpha_0, \alpha]$ y $[-\lambda, -\lambda_0] \cup (\lambda_0, \lambda]$ son disjuntas, se desprende que $\langle W(\alpha) - W(\alpha_0), W(\lambda) - W(\lambda_0) \rangle = 0$, así el proceso $\{W(\lambda)\}$ es de incrementos ortogonales.

(c) $W(\lambda)$ es real. Esta es consecuencia del Teorema 4.31 (iii), donde $f(\lambda)$ es una función real par.

De (a)–(c) se desprende que $\{W(\lambda), \lambda \in [0, \pi]\}$ es un movimiento Browniano cuya función de distribución espectral es determinado por $dF_W(\lambda) = 2d\lambda$. Para concluir, advierta que por el teorema 4.31(iv) resulta

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \int_{[-\lambda, \lambda]} f^{-1/2}(\nu) dZ(\nu) \\ &= \int_{[0, \lambda]} f^{-1/2}(\nu) dZ(\nu) + \int_{[0, \lambda]} f^{-1/2}(\nu) d\overline{Z}(\nu) \\ &= \int_{[0, \lambda]} f^{-1/2}(\nu) [dZ(\nu) + d\overline{Z}(\nu)] \\ &= B(\lambda); \end{aligned}$$

Consecuentemente, $\{B(\lambda)\}$ es un proceso browniano. □

4.8. Aproximación de un Salto

Para concluir con este trabajo, dado una serie de tiempo $\{X_t\}$ con procesos de incrementos ortogonales $\{Z(\lambda)\}$, ahora se analizará como aproximar un salto $Z(\lambda) - Z(\lambda-)$ en términos de las observaciones $\{X_t\}$.

Ejemplo 4.8.1. Considere el kernel de orden n de Dirichlet:

$$D_n(y) = \sum_{|k| \leq n} e^{iyk} = \begin{cases} \frac{\sin[(n+1/2)y]}{\sin(y/2)}, & \text{if } y \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\} \\ 2n+1, & \text{if } y = 0. \end{cases}$$

Muestre que para alguna función de distribución espectral $F(\cdot)$ y $\theta \in (-\pi, \pi]$, la función

$$\lambda \mapsto \frac{D_n(\lambda - \theta)}{2n+1}, \quad \lambda \in (-\pi, \pi]$$

converge en $L^2(F)$ a la función indicadora del conjunto $\{\theta\}$. Use este resultado para deducir que $Z(\theta) - Z(\theta-)$ es el límite en $L^2(F)$ de

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{|j| \leq n} X_j e^{i\lambda j}$$

Solución. Se usarán las siguientes propiedades (i) y (ii):

(i) $(2n+1)^{-1}D_n(\cdot)$ es acotada por 1:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2n+1} D_n(y) \right| &= \frac{1}{2n+1} \left| \sum_{|k| \leq n} e^{iyk} \right| \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \sum_{|k| \leq n} |e^{iyk}| \leq \frac{1}{2n+1} (2n+1) = 1 \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} D_n(y) = 0$ para $y \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$ y $\frac{1}{2n+1} D_n(0) = 1$ para toda n .

Para verificar esta segunda aseveración note que $\sin(y/2) \neq 0$ para $y \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$; entonces, ya que $|\sin(\cdot)| \leq 1$,

$$\left| \frac{1}{2n+1} D_n(y) \right| = \left| \frac{\sin[(n+1/2)y]}{2n+1} \right| \left| \frac{1}{\sin(y/2)} \right| \leq \frac{1}{2n+1} \frac{1}{|\sin(y/2)|} \rightarrow 0.$$

Por otro lado, la igualdad $(2n+1)^{-1}D_n(0) = 1$ es válida por la especificación de D_n .

Usando estas propiedades, la conclusión deseada puede ser obtenida como sigue:

Sea $\theta \in (-\pi, \pi]$ arbitraria y fija, considere la siguiente función

$$((2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta) - I_{\{\theta\}}(\lambda)), \quad \lambda \in (-\pi, \pi].$$

Note ahora que $\lambda - \theta \in (-2\pi, 2\pi)$ cuando $\lambda \in (-\pi, \pi]$, y entonces

$$\begin{aligned} & |((2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta) - I_{\{\theta\}}(\lambda))| \\ & \leq |((2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta))| - |I_{\{\theta\}}(\lambda)| \leq 2 \end{aligned} \tag{4.8.1}$$

por la propiedad (i), mientras la propiedad (ii) implica que

$$\begin{aligned} & \text{Para } \lambda \neq \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |(2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta) - I_{\{\theta\}}(\lambda)| = 0, \quad \text{y} \\ & \text{si } \lambda = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |(2n+1)^{-1}D_n(\theta - \theta) - I_{\{\theta\}}(\theta)| = |1 - 1| = 0, \end{aligned}$$

esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta) - I_{\{\theta\}}(\lambda)| = 0, \quad \text{para toda } \lambda \in (-\pi, \pi].$$

Esta última convergencia y (4.8.1) permiten aplicar el teorema de convergencia acotada para obtener

$$\int_{(-\pi, \pi]} |(2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta) - I_{\{\theta\}}(\lambda)|^2 dF(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{como } n \rightarrow \infty,$$

esto es, $\{(2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta)\}$ converge a $I_{\{\theta\}}(\lambda)$ en $L^2(F)$. A partir de este punto, la continuidad de la integral estocástica permite obtener

$$I_Z((2n+1)^{-1}D_n(\lambda - \theta)) \rightarrow I_Z(I_{\{\theta\}}(\lambda)) \text{ en media cuadrática.}$$

Observe ahora que

$$(2n + 1)^{-1} D_n(\lambda - \theta) = (2n + 1)^{-1} \sum_{|k| \leq n} e^{-i\theta k} e^{i\lambda k},$$

relación que, por la linealidad de la integral, implica que

$$\begin{aligned} I_Z((2n + 1)^{-1} D_n(\lambda - \theta)) &= (2n + 1)^{-1} \sum_{|k| \leq n} e^{-i\theta k} I_Z(e^{i\lambda k}) \\ &= (2n + 1)^{-1} \sum_{|k| \leq n} e^{-i\theta k} X_k \end{aligned}$$

y recordando que $I_Z(I_{\{\theta\}}(\lambda)) = Z(\theta) - Z(\theta-)$, los dos desplegados precedentes implican que

$$(2n + 1)^{-1} \sum_{|k| \leq n} e^{-i\theta k} X_k \rightarrow Z(\theta) - Z(\theta-) \text{ converge en media cuadrática,}$$

estableciendo la conclusión deseada. □

LITERATURA CITADA

- [1]. T. M. Apostol (1980), *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.
- [2]. A. A. Borovkov (1999), *Mathematical Statistics*, Gordon and Breach, New York
- [3]. P. Billingsley (1995), *Probability and Measure*, Wiley, New York.
- [4]. P. J. Brockwell y R. A. Davis (1998), *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York.
- [5]. J. C. Chacón Hernández (2010), *Un Criterio Integral de Causalidad Para Procesos ARMA*, Tesis de Maestría en Estadística Aplicada, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Saltillo Coah., MÉXICO.
- [6]. E. Dudewicz y S. Mishra (1998). *Mathematical Statistics*, Wiley, New York.
smallskip
- [7]. W. A. Fuller (1998), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley, New York.
- [8]. W. Fulks (1980), *Cálculo Avanzado*, Limusa, México, D. F.
- [9]. F. A. Graybill (2000), *Theory and Application of the Linear Model*, Duxbury, New York.
- [10]. F. A. Graybill (2001), *Matrices with Applications in Statistics* Duxbury, New York.
- [11]. D. A. Harville (2008), *Matrix Algebra Form a Statistician's Perspective*, Springer-Verlaf, New York.
- [12]. K. Hoffman y R. Kunze (1975), *Linear Algebra*, Prentice-Hall, New York.
- [13]. A. I. Khuri (2002), *Advanced Calculus with Applications in Statistics*, Wiley, New York.
- [14]. S. Lipschutz (1995), *Linear Algebra*, McGraw-Hill, New York.

- [15]. N. Y. Martínez Martínez (2010), Implementación Cuadrática del Algoritmo de Innovaciones Aplicado a una Serie Estacionaria, Tesis de Maestría en Estadística Aplicada, Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, Saltillo Coah., MÉXICO.
- [16]. W. Rudin (1984), Real and Complex Analysis, *McGraw-Hill*, New York.
- [17]. H. L. Royden (2003), Real Analysis, *MacMillan*, London.
- [18]. J. Shao (2010), Mathematical Statistics, *Springer*, New York.
- [19]. R. H. Shumway y D. S. Stoffer (2006), Time Series Analysis and Its Applications With R Examples, *Springer-Verlag*, New York. Edition
- [20]. G. Strang, (2003), Linear Algebra, *Prentice-Hall*, New York.
- [21]. D. Wackerly, W. Mendenhall y R. L. Scheaffer (2009), Mathematical Statistics with Applications, *Prentice-Hall*, New York.