EL FACTORIAL P (P UN NUMERO PRIMO) CON LOS NIVELES DE BLOQUES EN FUNCION DE LOS EFECTOS CONFUNDIDOS

DANIEL LOYOLA LICEA

T E S I S

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
EN ESTADISTICA EXPERIMENTAL

Universidad Autonoma Agraria Antonio Narro

PROGRAMA DE GRADUADOS

Buenavista, Saltillo, Coah.

NOVIEMBRE DE 1991

Tesis elaborada bajo la supervisión del comité particular de asesoría y aprobada como requisito parcial, para optar al grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN
ESTADISTICA EXPERIMENTAL

COMITE PARTICULAR

Asesor principal: ____________________________
M.C. Emilio Padrón Corral

Asesor: ____________________________
M.C. Regino Morones Reza

Asesor ____________________________
M.C. Félix de Jesús Sánchez Pérez

____
Dr. José Manuel Fernández Brondo
Subdirector de Asuntos de Postgrado

Buenavista, Saltillo, Coahuila. Noviembre 1991

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a la Universidad Autónoma Agraria "Antonio Narro" por el apoyo y la oportunidad que me brindó para realizar el proyecto de Postgrado.

Agradezco al M.C. Emilio Padrón C. su colaboración en la elaboración de este trabajo.

DEDICATORIA

A Daniela

COMPENDIO

El Factorial P^n (P un número primo) con los niveles de Bloques en función de los efectos confundidos.

POR

DANIEL LOYOLA LICEA

MAESTRIA

ESTADISTICA EXPERIMENTAL

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. NOVIEMBRE 1991.

M.C. Emilio Padrón Corral - Asesor -

Palabras claves: Diseño, Factorial, Número, Primo

En este trabajo se presenta un método para obtener las ecuaciones normales, los estimadores y sumas de cuadrados del factorial P^n (P un número primo) utilizando las técnicas de teoría de campos para el análisis y construcción de diseños factoriales.

El método permite trabajar directamente el modelo lineal de cualquier diseño factorial y obtener en términos algebráicos y en función explícita de los productos observados las ecuaciones normales, los estimadores y sumas de cuadrados.

ABSTRACT

The P^n factorial (P a prime number) with the block levels as functions of the confounded effects.

by

DANIEL LOYOLA LICEA

MASTER OF SCIENCE

EXPERIMENTAL STATISTICS

UNIVERSIDAD AUTONOMA AGRARIA ANTONIO NARRO

BUENAVISTA, SALTILLO, COAHUILA. NOVEMBER, 1991.

M.C. Emilio Padron Corral - Advisor -

Keywords: Experimental design, factorial, prime number

A method is presented to obtain the normal equations, the parameter estimated and sums of squares of the P^n factorial (P being a prime number) through utilization of the fields theory techniques for the analysis and setting up of factorial experimental designs.

The proposed method allows direct derivation of the liner model of any factorial experimental design, to obtain its normal equations, the parameter estimators, and the sums of squares in algebraic forms as explicit functions of the observed products.

INDICE DE CONTENIDO

Página

INTRODUCCION

En este trabajo se utilizó el método basado en la Teoría de Campos de Galois para el análisis y construcción de diseños factoriales y se representó el modelo lineal del Factorial P^n, (p un primo), expresando al subíndice para identificar bloques en función de los subíndices para los niveles de los factores y de los efectos factoriales que se confunden en las repeticiones del experimento.

Con esta representación, toda la información del diseño queda incluída en el modelo, la notación permite obtener formalmente del modelo y en términos algebráicos las ecuaciones normales, las que con los estimadores y sus sumas de cuadrados pueden expresarse directamente en función de los productos observados.

La definición del subíndice para niveles de bloques en forma funcional, es la innovación introducida en esta tesis.

Con esta definición y la metodología que aquí se propone, es posible trabajar el modelo lineal de cualquier diseño factorial P^n de manera sencilla.

Los resultados aquí obtenidos permiten cubrir una de las necesidades que se han observado en el área de la estadística, como es la de simplificar la enseñanza de los factoriales P^n.

En el capítulo segundo se presenta el material básico de conceptos fundamentales del sistema P^n necesario para el desarrollo de la tesis. Consiste en una breve descripción del sistema P^n en el marco del método conocido como de Teoría de Campos. Se introducen los conceptos de efectos e interacciones y se aborda el tema de confusión.

El tercer capítulo es esencialmente el procedimiento utilizado para obtener las ecuaciones normales y la suma de cuadrados para el análisis de varianza. Se muestra el método con un diseño en bloques completos al azar, el modelo lineal se representa en función de los efectos factoriales según las definiciones dadas para ellos en el capítulo primero. Se obtienen los estimadores y las sumas de cuadrados en términos directos de los productos observados. Esto último es una pequeña contribución de este trabajo.

En el cuarto capítulo se aborda el diseño factorial P^n con esquema de confusión, se define el subíndice δn para niveles de bloques para cualquier sistema de confusión.

Los resultados aquí obtenidos permiten cubrir una de las necesidades que se han observado en el área de la estadística, como es la de simplificar la enseñanza de los factoriales P^n.

En el capítulo segundo se presenta el material básico de conceptos fundamentales del sistema P^n necesario para el desarrollo de la tesis. Consiste en una breve descripción del sistema P^n en el marco del método conocido como de Teoría de Campos. Se introducen los conceptos de efectos e interacciones y se aborda el tema de confusión.

El tercer capítulo es esencialmente el procedimiento utilizado para obtener las ecuaciones normales y la suma de cuadrados para el análisis de varianza. Se muestra el método con un diseño en bloques completos al azar, el modelo lineal se representa en función de los efectos factoriales según las definiciones dadas para ellos en el capítulo primero. Se obtienen los estimadores y las sumas de cuadrados en términos directos de los productos observados. Esto último es una pequeña contribución de este trabajo.

En el cuarto capítulo se aborda el diseño factorial P^n con esquema de confusión, se define el subíndice δ_n para niveles de bloques para cualquier sistema de confusión.

Se obtienen los estimadores y sus sumas de cuadrados. El capítulo finaliza con dos ejemplos ilustrativos del método propuesto.

Los fundamentos teóricos para elaborar este trabajo se han obtenido principalmente de Kempthorne (1952). En esta obra el autor expone de manera amplia los experimentos factoriales utilizando consideraciones geométricas o de teoría de campos finitos de Galois.

ALGUNOS FUNDAMENTOS DEL SISTEMA FACTORIAL P^n

El experimento factorial P^n comprende n factores cada uno a P niveles, siendo P un número primo. Un método muy conocido para su análisis y construcción utilizado para desarrollar este trabajo es el relacionado con la Teoría de Campos Finitos de Galois. Una exposición de esta teoría de campos y su relación con el sistema P^n puede encontrarse en Kempthorne (1952) y en Martínez (1988). Para los propósitos de este estudio es necesario solamente presentar algunos resultados principales.

Debe recordarse que todos los números mayores que P − 1 que resulten de una operación algebráica deberán sustituirse por su residuo módulo P.

Efectos e Interacciones.

Dados n factores a, b, c.... en un arreglo factorial , las P^n combinaciones de tratamientos pueden representarse por $(x_1, x_2 ... x_n)$ en donde x_1 define los niveles del primer factor, x_2 los del segundo y así sucesivamente, cada x_i toma valores enteros de cero a p − 1.

El efecto principal del primer factor está dado por el contraste entre los productos de las combinaciones de tratamientos representados por:

$$x_1 = 0, \; x_1 = 1, \; \ldots\ldots \; x_1 = p - 1$$

y este tiene p - 1 grados de libertad.

La interacción de dos factores, por ejemplo de a y b, tiene en total $(p-1)^2$ grados de libertad que pueden dividirse en p - 1 conjuntos de p - 1 grados de libertad, representados como sigue:

Los contrastes entre los P totales de las combinaciones de tratamientos que satisfacen:

$$x_1 + x_2 = 0, 1, 2, \ldots\ldots, p - 1 \pmod{p}$$

los contrastes entre los p totales de las combinaciones de tratamientos que satisfacen:

$$x_1 + 2x_2 = 0, 1, 2, \ldots, p - 1 \pmod{p}$$

y así sucesivamente hasta los contrastes entre los P totales de las combinaciones de tratamientos para los cuales:

$$x_1 + (p-1)x_2 = 0, 1, 2, \ldots\ldots, p - 1 \pmod{p}$$

En el orden anterior los contrastes se denotan por AB, AB^2, ...AB^{P-1} y se definen como los efectos factoriales en que se divide la interacción de los factores a y b, esta interacción se representa por A X B.

La interacción de tres factores a,b,c tiene en total $(p-1)^3$ grados de libertad y puede dividirse en $(P-1)^2$ comparaciones de p totales cada una, representadas por:

$$x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p - 1 \pmod p$$

donde α_2 y α_3 toman todos los valores de uno a (p −1), los contrastes anteriores se denotan por $AB^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$ y se definen como los efectos factoriales en que se divide la interacción de tres factores a, b, c denotada por A X B X C.

En general, los efectos factoriales pueden darse por la comparación de p conjuntos de p^{n-1} combinaciones de tratamientos, cada uno con p − 1 grados de libertad, representados por las P ecuaciones:

$$\sum \alpha_i x_i = K \pmod p \qquad (2.1)$$

donde K = 0, 1, 2, ..., p − 1, cada α_i toma valores de cero a p − 1 y al menos una α_i es diferente de cero. Con cada combinación lineal.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

se usa el símbolo $A^{\alpha_1}\ B^{\alpha_2}\ C^{\alpha_3}\ \ldots$ para denotar los contrastes correspondientes.

Para obtener una numeración completa y única de los efectos factoriales, es necesario adoptar al principio un orden para las letras y la regla de que la potencia de la primera letra en cada símbolo debe ser la unidad. Lo anterior implica que el coeficiente en la primera x_i no nula de (1.1) se haga igual a uno. Esto siempre puede hacerse observando que para λ = 1, 2, ..., p − 1 e ι = 0, 1, 2, ..., p − 1 los sistemas de ecuaciones.

$$\sum \alpha_i x_i = k \pmod{p} \tag{2.2}$$

y

$$\lambda \sum \alpha_i x_i = j \pmod{p}$$

son los mismos pero en orden diferente. De esta manera, el contraste $A^2\ B\ C$ es igual al contraste AB^2C^2, cuando $p = 3$.

Los Productos de las Combinaciones de Tratamientos en Función de Efectos e Interacciones

Para el factorial 2^n, el producto de una combinación de tratamientos puede expresarse en función de efectos e interacciones. Si se prueban tres factores a, b, c, el producto T_{ijk} de las unidades que reciben la combinación de tratamientos (i,j,k) es dado por

$$2T_{ijk} = \text{media} + (-1)^{i-1} A + (-1)^{j-1} B + (-1)^{i+j-2} A\ B$$
$$+ (-1)^{k-1} C + (-1)^{i+k-2} AC + (-1)^{j+k-2} BC + (-1)^{i+j+k-3} ABC$$

en donde los subíndices i, j, k son ceros o unos. A se define como la diferencia entre el promedio de las unidades que reciben el factor a al nivel uno, menos el promedio de las unidades que reciben el factor a al nivel cero. En términos algebráicos:

$$A = \frac{1}{2} (a - 1)\ (b + 1)\ (c + 1)$$

en donde la expresión debe de expanderse y las combinaciones de tratamientos sustituídos por sus correspondientes productos.

Las interacciones AB y ABC se definen como:

$$AB = \frac{1}{4}\,(a - 1)\;(b - 1)\;(c + 1)$$

$$ABC = \frac{1}{4}\,(a - 1)\;(b - 1)\;(c - 1)$$

En el caso general de n factores a, b, c,...cada uno a P niveles, los efectos e interacciones no pueden representarse por una simple diferencia puesto que existen p − 1 diferencias. Cuando[1] el efecto principal del factor a en el nivel i se define como el producto promedio de las combinaciones de tratamientos para los cuales $x_1 = i$ menos la media general μ y se denota por A_i, cuando para cualquier efecto factorial se denota por $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots\ \alpha_{1i} + \alpha_{2j} + \alpha_{3k} \ldots$ al promedio de las p^{n-1} combinaciones de tratamientos para los cuales:

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots . = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots$ menos la media μ, entonces el producto real $T_{ijk\ldots}$ en las unidades que reciben la combinación de tratamientos $(i,\ j,\ k\ldots)$ puede representarse por:

$$T_{ijk\ldots} = \mu + \sum_{(\alpha_1,\ \alpha_2 \ldots)} A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots_{\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \ldots} \qquad (2.3)$$

---

[1]Recuerde que los componentes de los efectos factoriales pueden definirse sin incluir la media μ.

donde la sumatoria se extiende sobre todos los posibles valores de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ excepto $(0, 0, \ldots 0)$. En este trabajo se adoptarán las definiciones anteriores para los efectos e interacciones y en consecuencia la de $T_{ijk\ldots}$ según la ecuación (2.3).

Confusión

Cuando un experimento con arreglo factorial deba ensayarse en bloques incompletos, es a veces necesario o conveniente diseñar el experimento en bloques de menor tamaño que el de una repetición completa. La técnica de confusión es útil para lograr este tipo de diseño y de las razones para usar bloques de menor tamaño se pueden señalar las siguientes.

Para experimentos de campo, principalmente en la Agricultura, se recomienda que el tamaño de los bloques no debe exceder de 16 unidades experimentales, además de que la varianza total de las observaciones tiende a aumentar en general cuando se incrementa el tamaño de los bloques.

Otras razones pueden ser limitaciones económicas o de materia prima para ensayar con repeticiones completas, que pueden ser grandes aun con un número moderado de factores.

Por último, la disminución de la varianza usando bloques incompletos, permite mayor información sobre ciertos efectos que la que se obtendría usando repeticiones completas.

En contraparte a las bondades debidas a la confusión, se pierde información sobre los efectos confundidos.

Un experimento confundido parcialmente se obtiene cuando efectos factoriales diferentes se confunden en cada una de las repeticiones completas del diseño.

En este tipo de diseño es posible obtener información sobre los efectos confundidos. Esta información se obtiene de las repeticiones en que no se confunden estos efectos. Como el diseño trata con bloques de menor tamaño que el de una repetición completa, se tiene una disminución de la varianza y por tanto un incremento en la información en relación a la varianza que se obtendría con un experimento en situaciones análogas pero con repeticiones o bloques completos.

Formación de Bloques por Confusión

Con la técnica de confusión las P^n combinaciones en una repetición completa pueden dividirse en p^{n-s} bloques de tamaño p^s $(s < n)$. Considere la formación de P bloques cada uno de tamaño p^{n-1}. Los $p - 1$ grados de libertad para bloques pueden obtenerse de cualquiera de los $p - 1$ grados de libertad dados para los efectos factoriales representados en general por $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$ ... El primer block se forma con las combinaciones de tratamientos que satisfacen:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots = 0$$

El segundo por:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots = 1$$

y así sucesivamente. Cualquier contraste para bloques, da el mismo contraste que para $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$ ..., se dice entonces que el efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$ ..., se ha confundido completamente con bloques. Considere ahora la formación de p^2 bloques cada uno de tamaño p^{n-2}, los $p^2 - 1$ grados de libertad para bloques pueden obtenerse eligiendo además del efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$..., a cualquier otro efecto $A^{\beta_1} B^{\beta_2} C^{\beta_3}$ ..., en donde $\alpha_i \neq \beta_i$. Un primer block se puede formar con las combinaciones de tratamientos que satisfacen las ecuaciones simultáneas.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots\ldots = 0 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

Un segundo block por las combinaciones de tratamientos que satisfacen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots . = 0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots . = 1 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

En general, cualquier block se forma con las combinaciones de tratamientos que satisfacen las ecuaciones simultáneas:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p - 1 \\ \beta_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots = 0.\ 1.\ 2.\ \dots,\ p - 1 \end{array}\right\} \pmod{p}$$

habiendo p^2 pares de ecuaciones igual al número de bloques.

Observese que cualquier contraste para $A^{\alpha_1}\ B^{\alpha_2}\ C^{\alpha_3}$ ..., o para $A^{\beta_1}\ B^{\beta_2}\ C^{\beta_3}$ ..., queda mezclado con los contrastes para bloques, se dice entonces que estos efectos se confunden completamente con bloques.

Puede demostrarse que si dos efectos, abreviados por las letras X e Y, se confunden completamente con bloques, también se confunden los efectos dados por XY, XY^2, XY^3 ... XY^{p-1}; este resultado se conoce como la regla de la interacción generalizada.

Con $X = A^{\alpha_1}\ B^{\alpha_2}\ C^{\alpha_3}$ ..., $Y = A^{\beta_1}\ B^{\beta_2}\ C^{\beta_3}$ ..., se confunden $(p + 1)$ conjuntos de $(p - 1)$ grados de libertad cada uno, dando en total $(p + 1)(p - 1) = p^2 - 1$ grados de libertad igual al número de grados de libertad para bloques.

En el caso general, para formar p^{n-s} bloques de tamaño p^{s}, se eligen n − s efectos factoriales independientes:

$$A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}, \quad A^{\beta_1} B^{\beta_2} C^{\beta_3}, \quad A^{\lambda_1} B^{\lambda_2} C^{\lambda_3}$$

Los bloques se forman con las combinaciones de tratamientos que satisfacen simultáneamente los sistemas de ecuaciones:

$$\sum \alpha_i x_i = 0,\ 1,\ 2, \ldots .\ p - 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

$$\sum \beta_i x_i = 0,\ 1,\ 2, \ldots .\ p - 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

.

.

$$\sum \lambda_i x_i = 0,\ 1,\ 2, \ldots .\ p - 1 \ (\mathrm{mod}\ p)$$

Con n-s sumatorias en el lado izquierdo, los n-s efectos seleccionados para construir los bloques se conocen como generadores del diseño y la independencia de ellos es en el sentido de que la matriz de los coeficientes de las x_i, con los números reducidos el módulo P es de rango completo.

FACTORIAL P^n EN BLOQUES COMPLETOS AL AZAR

En este capítulo se utilizó el diseño en bloques completos al azar con arreglo factorial de un experimento con n factores cada uno a P niveles.

El objetivo es presentar el método para obtener las ecuaciones normales y las sumas de cuadrados cuando el modelo lineal se expresa con los efectos factoriales definidos como en el capítulo anterior, se introduce la notación para sumar los diferentes términos del modelo lineal.

Modelo Lineal

Representando por $Y_{ijk}\ldots$ a una variable aleatoria que define el producto observado sobre la unidad experimental que recibe el tratamiento (i, j, $k\ldots$) y por $E_{ijk}\ldots$ el error correspondiente a esa observación con las suposiciones usuales para prueba de hipótesis.

El modelo lineal de un experimento factorial p^n en r bloques completos al azar, puede expresarse como:

$$Y_{ijk\ldots n} = r_n + T_{ijk\ldots} + E_{ijk\ldots n.} \qquad (3.1)$$

en donde n indica el número de bloques o repetición y toma valores de cero a r-1. Los niveles $i,j,k,...$ toman valores enteros de cero a p-1, r_n es la contribución de la n-ésima repetición o bloque completo y $T_{ijk...}$ es el producto verdadero de la combinación de tratamientos $(i, j, k...)$.

Expresando $T_{ijk...}$ como en la ecuación (2.3) del capítulo anterior y desarrollando la sumatoria, la forma del modelo lineal sería como la siguiente:

$$Y_{ijk...n} = \mu + r_n + A_i + B_j + AB_{i+j} + AB^2_{i+2j} + ... + C_k + AC_{i+k} + AC^2_{i+2k} + ... + BC_{j+k} + BC^2_{j+2k} + ... + E_{ijk...n} \qquad (3.2)$$

Reglas para Sumar en el Modelo Lineal

En esta sección se establece el método para sumar en ambos miembros del modelo lineal dado en (3.2), para los diferentes niveles de sus parámetros. Antes es necesario establecer las siguientes consideraciones.

Los niveles particulares de los niveles de los factores se representarán con los mismos subíndices utilizados para definirlos, pero con una comilla superior. Es decir i' es un valor particular de i.

Cuando los subíndices en los factores aparecen asociados por la operación de suma,

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u' \qquad (3.3)$$

los valores de $(i', j', k', \ldots, u')$ serán aquellos que satisfacen alguna de las siguientes p ecuaciones:

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u' = \lambda \ (\mathrm{mod}\ p) \qquad (3.4)$$

Puede demostrarse que el número de combinaciones posibles $(i', j', k', \ldots u')$ que satisfacen cualquiera de las ecuaciones anteriores es p^{u-1}. Con n factores, los n−u subíndices en las combinaciones $(i', j', k', \ldots, u', \ldots, n)$ diferentes de $(i', j', k', \ldots, u')$ varían de cero a p − 1 y el número de combinaciones entre ellos es p^{n-u}. De esta manera existen $p^{u-1}\, p^{n-u} = p^{n-1}$ combinaciones posibles de $(i', j', k', \ldots u', \ldots, n)$. Este resultado será utilizado con frecuencia.

Cuando se deseen obtener las ecuaciones normales correspondientes a un efecto particular, el cual puede denotarse por:

$$A^{\alpha'_1} B^{\alpha'_2} C^{\alpha'_3} \ldots U^{\alpha'_u}_{\ \alpha'_1 i' + \alpha'_2 j' + \alpha'_3 k' + \ldots + \alpha'_u u'} \qquad (3.5)$$

Con $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_u)$ una elección dada del conjunto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$; se deberá sumar en ambos miembros del modelo (3.2) sobre todas las combinaciones posibles de $(i', j', k', \ldots, u', \ldots, n)$ tomando en cuenta las restricciones (3.4), pero con α' en lugar de α.

Si $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3 \ldots}{}_{\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \ldots}$ es un efecto diferente del que se da en (3.5), la suma siguiente será nula.

$$\sum_{(i', j', k', \ldots, u', \ldots, n)} A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3 \ldots}{}_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots}$$

La regla puede decirse de la siguiente manera: Si la combinación lineal $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' \ldots + \ldots$ es diferente de $\alpha'_1 i' + \alpha'_2 j' + \alpha'_3 k' + \ldots + \alpha'_u u'$ entonces

$$\sum_{(i', j', k', \ldots u', \ldots, n)} A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3 \ldots}{}_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' \ldots} = 0 \tag{3.6}$$

Esta regla es una consecuencia de la definición de los efectos factoriales como una desviación de la media.

Por la misma definición de los efectos factoriales:

$$\sum_{(i, j, k, \ldots n)} A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3 \ldots}{}_{\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots} = 0 \tag{3.7}$$

Con la sumatoria sin restricción alguna sobre los niveles. Otro resultado derivado de la misma definición es:

$$\sum A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3 \cdots} \quad \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots = 0 \qquad (3.8)$$

Cuando la suma se extiende sobre todos los valores del subíndice $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots$

Restricciones Sobre el Modelo y Condición de no Estimabilidad.

Los resultados mostrados en (3.6), (3.7) y (3.8) son restricciones propias sobre el modelo, no son condiciones establecidas para obtener una solución a las ecuaciones normales. La condición que se establecerá aquí para poder obtener una solución a las ecuaciones normales es:

$$\sum_{n=0}^{r-1} \hat{r}_n = 0 \qquad (3.9)$$

en donde $\hat{r}_n$ son las estimadas de r_n.

Ecuaciones Normales

El procedimiento para obtener las ecuaciones normales para cada parámetro en el modelo (3.2) será el de igualar el valor esperado del total de las observaciones que entran con cada parámetro, al valor esperado de todos los parámetros en esas observaciones.

Ecuación Normal de μ

La ecuación normal para la media μ, se obtiene de sumar ambos miembros del modelo (3.2) sobre todas las combinaciones $(i, j, k, \ldots, n)$, después de tomar el valor esperado en ambos miembros, la ecuación es:

$$\mu\colon\ r\, P^{n}\, \hat{\mu} + p^{n} \sum_{n} \hat{r}_{n} + \sum_{(i,j,k,\ldots,n)} (\hat{A}_{i} + \hat{B}_{j} + \widehat{AB}_{i+j} + \widehat{AB}^{2}_{i+2j} + \ldots) = \sum_{(i,j,k,\ldots,n)} Y_{i,j,k,\ldots,n} \qquad (3.10)$$

tomando en cuenta las restricciones del modelo y la condición de no estimabilidad.

$$\mu\colon\ r\, P^{n}\, \hat{\mu} = \sum_{(i,j,k,\ldots,n)} Y_{i,j,k,\ldots n} \qquad (3.11)$$

Ecuaciones Normales de r_n

Este apartado comienza con la siguiente observación. Si en una combinación $(i,j,k,\ldots)$ no aparece el subíndice n, (para repeticiones), quiere decir que esta combinación no contempla los niveles de n.

Las ecuaciones normales para cada r_n se obtendrán en forma representativa, esto es, se considerará la $r_{n'}$-ésima ecuación, en donde n′es el n′-ésimo valor de n.

De esta manera, haciendo n = n'en el modelo (3.2) y sumando en ambos miembros sobre todas las combinaciones (i, j, k, ...), después de tomar el valor esperado se tiene:

$$r_{n'} : P^n \hat{\mu} + P^n \hat{r}_{n'} + \sum_{(i,j,k,\ldots)} (\hat{A}_i + \hat{B}_j + \widehat{AB}_{i+j} + \widehat{AB}^2_{i+2j} + \ldots) = \sum_{(i,j,k,\ldots)} Y_{ijk\ldots n'}$$

$$n' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1. \qquad (3.12)$$

de acuerdo a las restricciones sobre el modelo.

$$r_{n'} : P^n \hat{\mu} + P^n \hat{r}_{n'} = \sum_{(i,j,k,\ldots)} Y_{i,j,k,\ldots n'}$$

$$n' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1. \qquad (3.13)$$

<u>Ecuaciones Normales para Efectos Factoriales</u>

Para obtener una ecuación representantiva de todas las ecuaciones normales de los componentes de un efecto factorial denotadas por $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}$ $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots + \alpha_u u$ se cambian por índices con prima, todos los niveles (i,j,k,...) que entran en $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots \alpha_u u$ y se suma en ambos miembros del modelo lineal sobre todas las combinaciones (i', j', k',...u',...n) tomando en cuenta cada una de las siguientes restricciones:

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u' = \lambda \pmod p$$

Cuando $\lambda \pmod p = 0 \pmod p$, se obtienen las ecuaciones normales de $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}_{o}$, después de que se haya tomado el valor esperado. La ecuación representativa para los componentes del efecto señalado con anterioridad es

$$A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u} \quad \alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u':$$

$$r\, P^{n-1}\, \hat{\mu} + P^{n-1} \sum_n \hat{r}_n + \sum_{(i',j',k',\ldots,u',\ldots,n)} (\hat{A}_i + \hat{B}_j +$$

$$+ \widehat{AB}_{i+j} + \widehat{AB^2}_{i+2j} + \ldots)$$

$$= \sum_{(i',j',k',\ldots u'\ldots,n)} Y_{i',\, j',\, k',\ldots\, u'\ldots n}$$

Para $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u' = \lambda \pmod p$ (3.14)

De acuerdo a la regla (3.6) y la condición (3.9), el primer miembro de (3.14) puede reducirse a

$$r\, P^{n-1}\, \hat{\mu} + r\, P^{n-u} \sum_{(i',j',k',\ldots,u')} \widehat{A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}} \quad \alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots$$

$$= r\, P^{n-1}\, \hat{\mu} + r\, P^{n-1}\, \widehat{A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}} \quad \alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots$$

(3.15)

dado que existen P^{u-1} valores de $(i', j', k',\ldots, u')$ que satisfacen cada restricción en (3.14). Finalmente la ecuación normal queda de la siguiente forma:

$$r \quad P^{n-1} \quad \hat{\mu} \quad + \quad r \quad P^{n-1} \quad \widehat{A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}} \quad \alpha_1 i' + \alpha_2 j' +$$

$$= \sum_{(i',j',k',\ldots,u',\ldots,n)} Y_{i'j'k'\ldots u'\ldots n}$$

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u' = \lambda \pmod p$$

(3.16)

Como casos particulares de (3.16), la ecuación normal representativa de las ecuaciones de A_i y de AB_{i+j} son:

$$A_{i'}: \; r\,P^{n-1}\,\hat{\mu} + r\,P^{n-1}\,\hat{A}_{i'} = \sum_{(i',j,k,\ldots,n)} Y_{i',j,k\ldots n}$$

$$i' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p-1$$

(3.17)

$$AB_{i'+j'}: \; r\,P^{n-1}\,\hat{\mu} + r\,P^{n-1}\,\widehat{AB}_{i'+j'} = \sum_{(i',j',k,\ldots,n)} Y_{i'j'k\ldots n}$$

$$i' + j' = 0,\ 1,\ 2\ldots p-1 \pmod p$$

(3.18)

Despejando $\hat{A}_{i'}$ en (3.17)

$$\hat{A}_{i'} = \frac{1}{r\,P^{n-1}} \sum_{(i',j,k,\ldots,n)} Y_{i'j,k,\ldots n} - \hat{u}$$

(3.19)

Observe que esta es la definición para $A_{i'}$, esto es, $A_{i'}$ se define como el producto promedio de las observaciones para las cuales $x_1 = i'$ menos la media general μ.

Sumas de Cuadrados

Para obtener expresiones para las sumas de cuadrados sencillas de ser operadas.

La suma:

$$\sum_{(i', j', k', ...u', ..., n)} Y_{i'j'k'...u'...n} \qquad (3.20)$$

con las condiciones:

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + ... + \alpha_u u' = \lambda \pmod p$$

se escribirá como:

$$\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + ... + \alpha_u u'} Y_{i'j'k'....u'...n} \qquad (3.21)$$

con $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + ... + \alpha_u u'$ reducido el módulo P.

De esta manera

$$\sum_{(i', j', k, ..., n)} Y_{i'j'k...n} = \sum_{\substack{i'+2j' \\ i'+2j' = 0, 1, 2, ..., p-1 \pmod p}} Y_{i',j', k...n}$$

$$= \sum_{i'+2j'=0} Y_{i'j'k...n} + \sum_{i'+2j'=1} Y_{i'j'k} + ...$$

$$+ \sum_{i'+2j'=p-1} Y_{i'j'k...n} \qquad (3.22)$$

<u>Suma de Cuadrados para</u> $\hat{\mu}$

La estimada $\hat{\mu}$ y su suma de cuadrados S.C. se obtienen utilizando (3.11) y son respectivamente:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{r\,P^{n}} \sum_{(i,j,k,\dots,n)} Y_{ijk\dots n} = \frac{1}{r\,P^{n}}\, Y_{\dots\,\dots} \tag{3.23}$$

$$S.\,C.\,(\hat{\mu}) = \frac{(Y_{\dots\,\dots})^{2}}{r\,P^{n}} \tag{3.24}$$

En donde como es usual un punto indica suma sobre el índice que reemplaza.

Suma de Cuadrados para r_n

El estimador para cada $r_{n'}$ se obtiene de (3.13) y (3.22)

$$\hat{r}_{n'} = \frac{1}{P^{n}}\, Y_{\dots\,.n'} - \frac{1}{rP^{n}}\, Y_{\dots\,\dots} \tag{3.25}$$

y la suma de cuadrados es:

$$S.C.\,(\hat{r}_n) = \sum_{n'=0}^{r-1} \left[\left(\frac{1}{P^{n}}\, Y_{\dots\,.n'} - \frac{1}{rP^{n}}\, Y_{\dots\,\dots} \right) (Y_{\dots\,.n'}) \right]$$

$$= \frac{1}{P^{n}} \sum_{n'=0}^{r-1} (Y_{\dots\,.n'})^{2} - \frac{(Y_{\dots\,\dots})^{2}}{rP^{n}} \tag{3.26}$$

Suma de Cuadrados para Efectos Factoriales

Para cualquier efecto factorial la expresión para la suma de cuadrados se obtiene de las ecuaciones (3.16) y (3.22).

$$S.C.\ (A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u} \quad \alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots) =$$

$$\sum_{\alpha'_1 i + \alpha_2 j' + \ldots} [(\frac{1}{rP^{n-1}} \sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots} Y_{i'j'\ldots n} - \frac{Y_{\ldots\ \ldots}}{rP^n}) (\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots} Y_{i'j'\ldots n})$$

$$= \frac{1}{rP^{n-1}} [(\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots = 0} Y_{i'j'\ldots n})^2 + (\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots = 1} Y_{i'j'\ldots n})^2 + \ldots + (\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots = p-1} Y_{i'j'\ldots n})^2 - \frac{(Y_{\ldots\ \ldots})^2}{rP^n}$$

Como ejemplos: La suma de cuadrados del efecto principal A del factor a es:

$$S.C.(A) = \frac{1}{rP^{n-1}} [(\sum_{i'=0} Y_{i'jk\ldots n})^2 + (\sum_{i'=1} Y_{i'jk\ldots n})^2 + \ldots + (\sum_{i'=p-1} Y_{i'jk\ldots n})^2] - \frac{(Y_{\ldots\ \ldots})^2}{rP^n}$$

La suma de cuadrados de la interacción AB^2 de los factores a y b es:

$$S.C.(AB^2) = \frac{1}{rP^{n-1}} [(\sum_{i' + 2j' = 0} Y_{i'j'k\ldots n})^2 + (\sum_{i' + 2j' = 1} Y_{i'j'k\ldots n})^2 + \ldots + (\sum_{i' + 2j' = p-1} Y_{i'j'k\ldots n})^2] - \frac{(Y_{\ldots\ \ldots})^2}{rP^n}$$

EL FACTORIAL P^n (P UN NUMERO PRIMO) CON LOS NIVELES DE BLOQUES EN FUNCION DE LOS EFECTOS CONFUNDIDOS

La parte central de este trabajo es la definición del subíndice δ_n para niveles de bloques y su introducción en el modelo lineal del experimento factorial P^n con esquema de confusión.

Cuando el modelo lineal se representa con los efectos factoriales definidos como en el segundo capítulo y con δ_n definido en función de los efectos confundidos en la n-ésima repetición del experimento, es posible obtener formalmente de esta representación del modelo lineal las ecuaciones normales y las sumas de cuadrados para el análisis de varianza.

Este capítulo contiene una exposición del modelo lineal del experimento factorial P^n con esquema de confusión, la definición del subíndice δ_n para niveles de bloques, las reglas para operar con este subíndice, las ecuaciones normales y las sumas de cuadrados para el análisis de varianza.

Se trabaja con una partición de la suma de cuadrados y se presentan dos ejemplos ilustrativos para el cálculo directo.

Modelo Lineal del Diseño Factorial P^n con Esquema de Confusión

El modelo lineal para el experimento factorial general P^n puede escribirse como:

$$Y_{ijk...nm} = r_n + b_{nm} + T_{ijk...} + E_{ijk...n} \tag{4.1}$$

en donde n es el subíndice para repetición, m el subíndice para bloques, b_{nm} la contribución del m-ésimo bloque dentro de la repetición n, $T_{ijk...}$ el producto real de la combinación de tratamientos $(i,j,k...n)$ y $E_{ijk...n}$ la componente de error con las suposiciones usuales para prueba de hipótesis.

El subíndice n tomará valores de cero a r-1 y los subíndices $i,j,k,...$ valores de cero a p-1.

Expresando $T_{ijk...}$ en función de los efectos factoriales, (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Y_{ijk...nm} = \mu &+ r_n + b_{nm} + A_i + B_j + AB_{i+j} + AB^2_{i+2j} + \ldots \\ &+ AB^{p-1}_{i+(p-1)j} + C_k + AC_{i+k} + AC^2_{i+2k} + \ldots + \\ &AC^{p-1}_{i+(p-1)k} + BC_{j+k} + BC^2_{j+2k} + \ldots + \\ &BC^{p-1}_{j+(p-1)} + \ldots + E_{ijk...n} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Este modelo puede representar experimentos con confusión parcial o total y como casos particulares el de experimentos en bloques completos al azar.

El Subíndice δn para Niveles de Bloques

En esta sección se define al subíndice δn para identificar bloques dentro de repeticiones, la introducción de δn en el modelo lineal es la parte medular de esta tésis. Para poder definir a δn primero se considera el caso en que se confunde un efecto en cada repetición, después se generaliza la definición de δn para cuando dos o más efectos se confunden en cada repetición del experimento.

Con un efecto confundido con bloques en cada repetición, cada repetición tendrá P bloques cada uno de tamaño P^{n-1}.

Suponga que en la n-ésima repetición se confunde el efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots$. Un primer block se forma con las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \quad \ldots = 0 \pmod p$$

un segundo con las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \ldots = 1 \pmod p$$

y así sucesivamente.

Si se hace que los niveles de los bloques y por lo tanto el subíndice m tome valores de cero a p-1 y el bloque b_{nm} con m = 0 se forma con las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \ldots = 0 \pmod p$$

Si el bloque b_{nm} con m = 1 se forma con las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots = 1 \bmod p$$

siguiendo con este procedimiento, si el bloque b_{nr} se forma con las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots = r \bmod p$$

entonces es posible sustituir al subíndice m para niveles de block por el subíndice δn , si

$$\delta n = (\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots) \qquad (4.3)$$

en donde las α_i son las correspondientes del efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots$ que se confunde en la n-ésima repetición. δn representa a través de n el número de repetición y por medio de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots)$ al efecto que se confunde en esa repetición.

Con m sustituída por δn , los parámetros b_{nm} se expresarán como $b_{n\delta n}$. Por otra parte, como δn es un subíndice funcional que depende de los niveles de las componentes de los efectos confundidos; según la definición (4.3) los parámetros $b_{n\delta n}$ serán tratados de manera semejante que cualquier efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3 \ldots} \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \ldots$ dado que $b_{n\delta n}$ es de la forma

$$b_{n\delta n} = b_{n(\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k+\ldots)} \qquad (4.4)$$

Considere ahora el caso en que dos efectos $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$ ..., $A^{\beta_1} B^{\beta_2} C^{\beta_3}$ ... se confunden en la n-ésima repetición del experimento.

Los bloques se forman por las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots = \lambda \bmod p \qquad (4.5)$$

$$\beta_2 i + \beta_2 j + \beta_3 k + \ldots = \varepsilon \bmod p$$

en este caso δn se definirá como

$$\delta n = \{(\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots),(\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k + \ldots)\} \qquad (4.6)$$

en donde las combinaciones lineales dentro de los paréntesis toman independientemente cada una los valores,

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1 \pmod p).$$

Los p^2 valores de δn ,uno para cada bloque, pueden relacionarse uno a uno con los pares de valores $\{(\lambda),\ (\varepsilon)\}$ de las combinaciones lineales de δn definida en (4.6). Una forma de hacerlo se muestra en la tabla siguiente.

Tabla 4.1

δn	$\{(\lambda), (\varepsilon)\}$
0	$\{(0). (0)\}$
1	$\{(1), (0)\}$
.	.
.	.
.	.
$P - 1$	$\{(p-1), (0)\}$
P	$\{(0), (1)\}$
$P + 1$	$\{(0), (2)\}$
.	.
.	.
.	.
$P^2 - 1$	$\{(p-1), (p-1)\}$

Con $\lambda = 0$ y $\varepsilon = 0$, el valor $\delta n = 0$ representa las combinaciones de tratamientos en la n-ésima repetición y en el bloque dado por

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots = 0 \text{ mod } p$$

$$\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k + \ldots = 0 \text{ mod } p$$

Si un tercer efecto $A^{x_1} B^{x_2} C^{x_3} \ldots$ se confunde en la n-ésima repetición , los bloques se formarán con las combinaciones de tratamientos que satisfacen

$$\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots = \lambda \text{ mod } p$$

$$\beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k + \ldots = \varepsilon \text{ mod } p \qquad (4.7)$$

$$X_1 i + X_2 j + X_3 k + \ldots = \psi \text{ mod } p$$

Para esta situación δn se define como

$$\delta n = \{(\alpha_1 i+\alpha_2 j+\ldots),(\beta_1 i+\beta_2 j+\ldots),(X_1 i+X_2 j+\ldots)\} \qquad (4.8)$$

La definición de δn para cualquier número de efectos confundidos en la n-ésima repetición, se da en forma semejante a los casos anteriores. Los valores de δn deben relacionarse biunivocamente con los valores de $\{(\lambda), (\varepsilon), (\psi), ...\}$ en la forma que se desee hacerlo.

Reglas para Sumar con δn

Cuando δn se sustituye por m, es necesario conocer las reglas para sumar en el modelo lineal para los diferentes valores de δn y para sumar los estimadores de $b_{n\delta n}$. Estas reglas se derivan tanto de las restricciones propias del modelo como las de no estimabilidad impuestas para obtener una solución a las ecuaciones normales.

A continuación se presenta la condición de no estimabilidad para los estimadores de los bloques en cada repetición.

Si $\hat{b}_{n\delta n}$ denota el estimador de $b_{n\delta n}$, entonces

$$\sum_{(i,j,k,...)} \hat{b}_{n\delta n} = 0 \qquad (4.9)$$

para cada n, en donde la suma es sobre todos los valores de (i,j,k,. . .) y δn debe expresarse según su definición. Los valores de δn se definen según lo expuesto en la sección anterior.

Por otra parte, si la combinación lineal

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots$$

no está contenida en la definición de δn , se tendrá

$$\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots} \hat{b}_{n\delta n} = 0 \qquad (4.10)$$

En la siguiente sección, para obtener las ecuaciones normales de cada $b_{n\delta n}$ se sumará sobre δn.

Suponga que $\delta n = k$ y que el k-ésimo block se forma con las combinaciones $(i', j', k', \ldots)$ que cumplen

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots = \lambda \bmod p$$

$$\beta_1 i' + \beta_2 j' + \beta_3 k' + \ldots = \varepsilon \bmod p$$

$$\begin{array}{ll} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

la siguiente suma

$$\sum_{\delta n} \quad \text{para} \quad \delta n = k$$

se extenderá sobre esas combinaciones $(i', j', k', \ldots)$.

Además

$$\sum_{\delta n} A^{\alpha_1'} B^{\alpha_2'} C^{\alpha_3'} \ldots_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots} = 0 \qquad (4.11)$$

Si el subíndice $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots$ no está contenido en la definición de δn. Sin embargo, si este subíndice está contenido en la definición de δn se tendrá:

$$\sum_{\delta n} A^{\alpha'_1} B^{\alpha'_2} C^{\alpha'_3} \ldots_{\alpha'_1 i + \alpha'_2 j + \alpha'_3 k \ldots} =$$

$$P^{n-z} \; A^{\alpha'_1} B^{\alpha'_2} C^{\alpha'_3} \ldots_{\lambda} \qquad (4.12)$$

cuando $\alpha'_1 i + \alpha'_2 j + \alpha'_3 k + \ldots = \lambda$ mod p y Z es el número de efectos confundidos en la n-ésima repetición.

El resultado dado en (4.11) se deriva de la definición de los efectos factoriales como una desviación de la media, es por lo tanto una de las restricciones propias del modelo.

Por último, para las estimaciones $\hat{r}_n$ de las repeticiones r_n, la condición de no estimabilidad sobre los estimadores $\hat{r}_n$ necesaria para una solución a las ecuaciones normales será

$$\sum_{n} \hat{r}_n = 0 \qquad (4.13)$$

Ecuaciones Normales del Factorial P^n Con Esquema de Confusión

Cuando m se sustituye por δn, el modelo lineal (4.2) queda de la siguiente forma

$$Y_{ijk\ldots n\delta n} = \mu + r_n + b_{n\delta n} + A_i + B_j + AB_{i+j} + AB^2_{i+2j} + \ldots + E_{ijk\ldots n} \qquad (4.14)$$

Con esta representación del modelo lineal, el procedimiento para obtener las ecuaciones normales será el de igualar el valor esperado del total de las observaciones que entran en cada parámetro con el valor esperado de los parámetros en esas observaciones.

En lo sucesivo, se denotará por Z el número de efectos confundidos en cada repetición del experimento. De esta manera δn tomará cada uno de los valores de cero a P^{z-1}.

Ecuación Normal para μ

La ecuación para μ se obtiene de sumar en ambos miembros de (4.14) sobre todas las combinaciones $(i,j,k,...,n)$. Después de tomar el valor esperado, se tiene

$$\mu\textbf{:}\; rP^{n}\,\hat{\mu} + P^{n}\sum \hat{r}_{n} + \sum_{(i,j,k,...,n)} \hat{b}_{n\delta n} + \sum_{(i,j,k,...,n)} (\hat{A}_{i} +$$

$$\hat{B}_{j} + \hat{AB}_{i+j} + \ldots + AB^{2}_{i+2j} + \ldots +) = \sum_{(i,j,k,...,n)} Y_{ijk...n\delta n}$$

$$= Y_{...\delta}. \qquad (4.15)$$

Considerando las restricciones propias del modelo expuestas en (3.7) del Capítulo 3 y las condiciones de no estimabilidad dadas en (4.9) y (4.13) de la sección anterior, la ecuación para μ se reduce a

$$\mu\textbf{:}\; r\,P^{n}\,\hat{\mu} = Y_{...\delta}. \qquad (4.16)$$

Ecuaciones Normales para r_n

Para obtener una ecuación representativa de todas las ecuaciones normales de r_n, se hace $n = n'$ en donde n' es un valor de n, la ecuación para $r_{n'}$ se obtiene sumando sobre todas las combinaciones $(i,j,k,\ldots,n')$ en donde n' se considera constante. Después de tomar el valor esperado

$$r_{n'}:\ P^n \hat{\mu} + P^n \hat{r}_{n'} + \sum_{(i,j,k,\ldots,n')} \hat{b}_{n'\delta n'} +$$

$$\sum_{(i,j,k,\ldots,n')} (\hat{A}_i + \hat{B}_j + \hat{AB}_{i+j}$$

$$+ AB^2_{i+2j} + \ldots +) = Y_{\ldots n'\delta n'} \qquad (4.17)$$

$n' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1$

ecuación que se reduce a

$$r_{n'}:\ P^n \hat{\mu} + P^n \hat{r}_{n'} = Y_{\ldots n'\delta n'} \qquad (4.18)$$

$n' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1$

Ecuaciones Normales Para $b_{n\delta n}$

Para obtener una ecuación normal representativa de cada parámetro $b_{n\delta n}$ se hace $n = n'$ y $\delta n = \delta n'$ en donde n' es un valor dado de n.

Esta ecuación se obtiene al sumar sobre δn, en ambos miembros del modelo lineal dado en (4.14). Obsérvese que esto implica sumar sobre las combinaciones de tratamientos $(i', j', k', \ldots, n')$ que cumplen para cada δn, con sistemas de ecuaciones semejantes a las presentadas en

(4.7). El número de ecuaciones y su estructura depende por supuesto de los efectos factoriales que se confunden en la n'-ésima repetición del experimento.

La ecuación normal representativa de cada $b_{n\delta n}$ es

$$b_{n'\delta n'}: \quad P^{n-z}\hat{\mu} + P^{n-z}\,\hat{r}_{n'} + P^{n-z}\,\hat{b}_{n'\delta n'} + \sum_{\delta n'} (\hat{A}_{i'} + \hat{B}_{j'} + \widehat{AB}_{i'+j'} + \widehat{AB}^2_{i'+2j'} + \ldots)$$

$$= \sum_{\delta n'} Y_{i'j'k'\ldots n'\delta n'} \qquad (4.19)$$

$n' = 0, 1, 2, \ldots, r-1 \qquad \delta n' = 0, 1, 2, \ldots, P^{z-1}$

De acuerdo a las ecuaciones (4.11) y (4.12), los únicos efectos factoriales que no se cancelan en esta igualdad son aquellos que se confunden en la repetición con $n = n'$. Esto muestra en particular que las estimadas de los efectos confundidos no pueden separarse de bloques.

Ecuaciones Normales para Efectos no Confundidos

Para obtener una ecuación representativa de todas las ecuaciones normales de las componentes

$$A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}_{\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k + \ldots}$$

de un efecto factorial no confundido en ninguna repetición del experimento, se cambian por índices con prima, todos los niveles ($i, j, k, \ldots$) que entran en $\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k +$

$\ldots + \alpha_u u$ y se suma en ambos miembros del modelo lineal sobre todas las combinaciones $(i', j', k', \ldots, u', \ldots n)$, en donde

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots \alpha_u u' = \lambda \bmod p$$

$$\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p-1$$

como esta combinación lineal no está contenida en ninguna

$$\delta n' = \{(\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots), (\beta_1 i' + \beta_2 j' + \beta_3 k' + \ldots), \ldots\}$$

la siguiente suma será nula.

$$\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u'} \hat{b}_{n'} \delta_{n'} = 0 \qquad (4.20)$$

Cuando se suman los estimadores $\hat{r}_n$ sobre la combinación lineal $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u'$ o equivalentemente sobre las combinaciones de tratamientos $(i', j', k', \ldots, u', \ldots n)$ se tiene

$$\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u'} \hat{r}_n = p^{n-1} \sum_n \hat{r}_n = 0 \qquad (4.21)$$

Considerando estos dos últimos resultados, las ecuaciones normales para efectos no confundidos tienen la siguiente forma

$$A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}{}_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots + \alpha_u u'} :$$

$$r\, p^{n-1} \hat{u} + r\, p^{n-1} \widehat{A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}}_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots}$$

$$= \sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots} Y_{i'j'k' \ldots n\delta n}$$

en donde:

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots = \lambda \qquad (4.22)$$

λ es el residuo módulo P de $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \ldots + \alpha_u u'$, toma los valores 0,1,2,. . . , P−1

Ecuaciones Normales para Efectos Confundidos

Si el efecto $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}$ se confunde en la repetición n = n*, las ecuaciones normales para sus componentes se obtienen sumando en ambos miembros del modelo lineal (4.14) para toda n excepto n = n* y sobre todas las combinaciones $(i', j', k', \ldots, n)$, después de tomar el valor esperado, las ecuaciones normales son:

$$A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}{}_{\alpha_1 i' + {}_2\alpha j' + \ldots} :$$

$$(r - 1)\ P^{n-1}\ \hat{u} + P^{n-1} \sum_{n \neq n^*} \hat{r}_n \quad +$$

$$(r - 1)P^{n-1} A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots U^{\alpha_u}{}_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots}$$

$$= \sum_{(i',j',k',\ldots n)} Y_{i'j'k'\ldots n\delta n}$$

con:

$$\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' + \ldots + \alpha_u u' = \lambda$$

$$n \neq n^* \qquad (4.23)$$

como antes λ es el residuo módulo P de $\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \alpha_3 k' +$

Factor de Corrección

El factor de corrección se obtiene directamente de (4.16) y es igual a

$$F.C. = \frac{(Y_{\ldots\delta.})^2}{rP^n} = \frac{T^2}{rP^n} \qquad (4.24)$$

Suma Total de Cuadrados

La suma total de cuadrados (corregida) es

$$\sum_{(i,j,k,\ldots,n)} (Y_{ijk\ldots n\delta n})^2 - F.C. \qquad (4.25)$$

Suma de Cuadrados de Repeticiones

Para obtener la suma de cuadrados de repeticiones se despeja $\hat{r}_{n'}$ de la ecuación (4.18).

$$\hat{r}_{n'} = \frac{Y_{\ldots n'\delta n'}}{P^n} - \hat{u} \qquad (4.26)$$

luego

$$S.C.\ (rep) = \sum_n \left(\frac{Y_{\ldots n\delta n}}{P^n} - \hat{u} \right) (Y_{\ldots n\delta n})$$

$$= \sum_n \frac{(Y_{\ldots n\delta n})^2}{P^n} - F.C. \qquad (4.27)$$

para n = 0, $Y_{\ldots o\delta o} = \sum Y_{ijk\ldots o\delta o}$ es el total de las observaciones en la repetición n = 0. Recuerde que δo forma todos los bloques en esa repetición.

Sumas de Cuadrados de Block (Dentro de Repeticiones)

Esta suma de cuadrados es la del estimador alias

$$\hat{b}_{n\delta_n} + \sum A^{\alpha_1} B^{\hat{\alpha}_2} C^{\alpha_3} \tag{4.28}$$

el segundo término de esta expresión denota la suma de los estimadores de los efectos confundidos en la n-ésima repetición.

La solución para este estimador se obtiene de (4.19) como

$$\hat{b}_{n\delta_n} + \sum A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots = \frac{1}{p^{n-z}} \sum_{\delta_n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta_n}$$

$$- \hat{u} - \hat{r}_n = \frac{1}{p^{n-z}} \sum_{\delta_n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta_n} - \frac{Y_{\ldots n\delta_n}}{p^n}$$

(4.29)

en donde se ha utilizado la ecuación (4.18) para sustituir a $- \hat{u} - \hat{r}_n$.La suma de cuadrados de block (dentro de repeticiones) se obtiene de (4.19) y (4.29) como

$$\sum_{n\delta_n} [(\frac{1}{p^{n-z}} \sum_{\delta_n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta_n} - \frac{Y_{\ldots n\delta_n}}{p^n})$$

$$(\sum_{\delta_n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta_n})] = \frac{1}{p^{n-z}} \sum_{n\delta_n} (\sum_{\delta_n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta_n})^2$$

$$- \frac{1}{p^n} \sum_{n\delta_n} (Y_{\ldots n\delta_n}) (\sum_{\delta_n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta_n}) \tag{4.30}$$

n varía de cero a r − 1 y δ_n de cero a P^{z-1}, corriendo la doble sumatoria $\sum_{n\delta_n}$ primero sobre n, la expresión anterior se desarrolla como:

$$\frac{1}{P^{n-z}}\left[\sum_{\delta_0}\left(\sum_{\delta_0} Y_{i'j'k'\ldots 0\delta_0}\right)^2 + \sum_{\delta_1}\left(\sum_{\delta_1} Y_{i'j'k'\ldots 1\delta_1}\right)^2\right.$$

$$\left. + \ldots + \sum_{\delta_{r-1}}\left(\sum_{\delta_{r-1}} Y_{i'j'k'\ldots r-1\delta_{r-1}}\right)^2\right] - \frac{Y_{\ldots 0\delta_0}}{P^n}$$

$$\sum_{\delta_0}\left(\sum_{\delta_0} Y_{i'j'k'\ldots 0\delta_0}\right) - \frac{Y_{\ldots 1\delta_1}}{P^n}\sum_{\delta_1}\left(\sum_{\delta_1} Y_{i'j'k'\ldots 1\delta_1}\right)$$

$$- \ldots - \frac{Y_{\ldots r-1\delta_{r-1}}}{P^n}\sum_{\delta_{r-1}}\left(\sum_{\delta_{r-1}} Y_{i'j'k'\ldots r-1\delta_{r-1}}\right)$$

reagrupando términos se obtiene lo siguiente

$$\frac{1}{P^{n-z}}\sum_{\delta_0}\left(\sum_{\delta_0} Y_{i'j'k'\ldots 0\delta_0}\right)^2 -$$

$$\frac{Y_{\ldots 0\delta_0}}{P^n}\sum_{\delta_0}\left(\sum_{\delta_0} Y_{i'j'k'\ldots 0\delta_0}\right) +$$

$$\frac{1}{P^{n-z}}\sum_{\delta_1}\left(\sum_{\delta_1} Y_{i'j'k'\ldots 1\delta_1}\right)^2 -$$

$$\frac{Y_{\ldots 1\delta_1}}{P^n}\sum_{\delta_1}\left(\sum_{\delta_1} Y_{i'j'k'\ldots 1\delta_1}\right) + \ldots +$$

$$\frac{1}{P^{n-z}}\sum_{\delta_{r-1}}\left(\sum_{\delta_{r-1}} Y_{i'j'k'\ldots r-1\delta_{r-1}}\right)^2 -$$

$$\frac{Y_{\ldots r-1\delta_{r-1}}}{P^n}\sum_{\delta_{r-1}}\left(\sum_{\delta_{r-1}} Y_{i'j'k'\ldots r-1\delta_{r-1}}\right) \qquad (4.31)$$

Los primeros dos términos representan la suma de cuadrados de block (dentro de la repetición cero), los siguientes dos, la de block (dentro de la repetición uno) y así sucesivamente.

El primer término entre paréntesis en (4.31) es

$$\sum_{\delta o} Y_{i'j'k'\ldots o\delta o} \qquad (4.32)$$

este representa al total de los productos observados en la repetición cero, cuando $\delta o = 0$, resulta el total de los productos en el bloque cero de la repetición cero, cuando $\delta o = 1$ el de los del bloque uno de la repetición cero, y cuando $\delta o = P^z - 1$ los del bloque $P^z - 1$ en esta repetición.

De esta manera

$$\sum_{\delta o} \left(\sum_{\delta o} Y_{i'j'k'\ldots o\delta o} \right)^2 = \left(\sum_{\delta o=o} Y_{i'j'k'\ldots oo} \right)^2 +$$

$$\left(\sum_{\delta o=1} Y_{i'j'k'\ldots 11} \right)^2 + \ldots$$

es igual al (total del bloque boo)^2 + (total del bloque bo_1)^2 + ...

Por otra parte

$$Y_{\ldots o\delta o} \qquad (4.33)$$

es el total de las observaciones de la repetición cero, y

$$\sum_{\delta o} \left(\sum_{\delta o} Y_{i'j'k'\ldots o\delta o} \right) = \sum_{\delta o=o} Y_{i'j'k'\ldots oo} +$$

$$\sum_{\delta 0=1} Y_{i'j'k'\ldots 01} + \ldots$$

es igual al (total del bloque b_{00}) + (total del bloque b_{01}) + ..., la suma de estos totales es el total de la repetición cero.

Así, los dos primeros términos en (4.31) son iguales a

$$\frac{(\text{Suma de cuadrados de los totales de bloques en } n = 0)}{P^{n-z}} -$$

$$\frac{(\text{Total de la repetición cero})^2}{P^n}$$

resultados semejantes se obtienen analizando de dos en dos los demás términos de (4.31).

Suma de Cuadrados de Block (y Repeticiones)

La suma de cuadrados de repeticiones y la de block (dentro de repeticiones) pueden partirse para formar la suma de cuadrados de block (y repetición) de la siguiente forma:

Escribiendo la ecuación (4.18) para r_n como

$$P^n \hat{u} + P^n \hat{r}_n = R_n$$

donde:

$$R_n = Y_{\ldots n\delta n} \qquad (4.34)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

y la ecuación (4.19) para $b_{n\delta n}$ como

$$P^{n-z}\,\hat{u} + P^{n-z}\,\hat{r}_n + P^{n-z}\,\hat{B}_{n\delta n} = B_{n\delta n} \tag{4.35}$$

en donde se ha hecho

$$\hat{B}_{n\delta n} = \hat{b}_{n\delta n} + \sum A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$$

$$B_{n\delta n} = \sum_{\delta n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta n} \tag{4.36}$$

la suma $\sum A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3}$ tiene el mismo significado que en (4.28).

De (4.34) y (4.36) la suma de cuadrados de repeticiones más la de block (dentro de repeticiones) queda expresada como

$$\sum_n \hat{r}_n R_n + \sum_{n\delta n} \hat{B}_{n\delta n} B_{n\delta n}$$

$$= \sum_n \hat{r}_n R_n + \sum_{n\delta n} \left(\frac{B_{n\delta n}}{P^{n-z}} - \hat{u} - \hat{r}_n \right) B_{n\delta n}$$

$$= \sum_n \hat{r}_n R_n - \sum_{n\delta n} \hat{r}_n B_{n\delta n} + \sum_{n\delta n} \left(\frac{B_{n\delta n}}{P^{n-z}} - \hat{u} \right) B_{n\delta n} \tag{4.37}$$

para n = 0, los dos primeros términos dan cero, esto es

$$\hat{r}_o R_o - \sum_{\delta o} \hat{r}_o B_{o\delta o} = \hat{r}_o R_o - \hat{r}_o\,(B_{oo} + B_{o1} + B_{o2} + \ldots)$$

$$= \hat{r}_o R_o - \hat{r}_o R_o$$

$$= 0$$

lo mismo sucede para n = 1, 2, ..., r−1.

De esta manera (4.37) se reduce a

$$\sum_{n\delta n} \left(\frac{B_{n\delta n}}{p^{n-z}} - \hat{u} \right) B_{n\delta n} \tag{4.38}$$

que es la suma de cuadrados para block (y repeticiones).

Reformulando esta suma de cuadrados se tiene

$$\sum_{n\delta n} \left(\frac{B_{n\delta n}}{p^{n-z}} - \hat{u} \right) B_{n\delta n} =$$

$$\sum_{n\delta n} \left[\left(\frac{1}{p^{n-z}} \sum_{\delta n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta n} - \hat{u} \right) \left(\sum_{\delta n} Y_{i'j'k'\ldots n\delta n} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{p^{n-z}} \left[\sum_{\delta o} \left(\sum_{\delta o} Y_{i'j'k'\ldots o\delta o} \right)^2 + \right.$$

$$\sum_{\delta 1} \left(\sum_{\delta 1} Y_{i'j'k'\ldots 1\delta 1} \right)^2 + \ldots +$$

$$\left. \sum_{\delta r-1} \left(\sum_{\delta r-1} Y_{i'j'k'\ldots r-1\delta r-1} \right)^2 \right]$$

$$- \hat{u} \left[\sum_{\delta o} \left(\sum_{\delta o} Y_{i'j'k'\ldots o\delta o} \right) + \sum_{\delta 1} \left(\sum_{\delta 1} Y_{i'j'k'\ldots 1\delta 1} \right) + \right.$$

$$\left. \ldots + \sum_{\delta r-1} \left(\sum_{\delta r-1} Y_{i'j'k'\ldots r-1\delta r-1} \right) \right]$$

$$= \left(\frac{\text{Suma de cuadrados de los totales de block}}{p^{n-z}} \right) - \text{F.C.}$$

(4.39)

Sumas de Cuadrados para Efectos Confundidos

La suma de cuadrados para cada efecto confundido se obtiene de (4.23); su expresión es

$$\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots} \left(\frac{1}{(r-1)P^{n-1}} \sum_{\substack{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots \\ n \neq n^*}} Y_{i'j'k' \dots n\delta n} - \hat{\mu} - \frac{1}{(r-1)} \sum_{n \neq n^*} \hat{r}_n \right) \left(\sum_{\substack{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots \\ n \neq n^*}} Y_{i'j'k' \dots n\delta n} \right) \qquad (4.40)$$

Sumas de Cuadrados para Efectos no Confundidos

De las ecuaciones normales (4.22) para efectos factoriales no confundidos, la suma de cuadrados tiene la siguiente forma

$$\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots} \left(\frac{1}{rP^{n-1}} \sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots} Y_{i'j'k' \dots n\delta n} - \hat{u} \right) \left(\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots} Y_{i'j'k' \dots n\delta n} \right)$$

$$= \frac{1}{rP^{n-1}} \sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots} \left(\sum_{\alpha_1 i' + \alpha_2 j' + \dots} Y_{i'j'k' \dots n\delta n} \right)^2 - F.C. \qquad (4.41)$$

Procedimiento para el Cálculo

Un procedimiento para el cálculo de los estimadores y sumas de cuadrados utilizando el método descrito en las secciones anteriores, consiste en formar los bloques de cada repetición y asignar a ellos un valor de δn. Este procedimiento facilita los cálculos numéricos.

Ejemplo: Arreglos Tabulares

Considere por ejemplo un factorial 3^3 en donde se confunden las interacciones AB y AC^2 en la repetición n=0.

Los nueve bloques se forman con las combinaciones de tratamientos que cumplen

$$i + j = \lambda \bmod 3$$

$$i + 2k = \varepsilon \bmod 3$$

en donde λ y ε toman cada una los valores 0, 1, 2.Según la definición de δn, para este caso se tiene

$$\delta o = \{(i+j),\ (i+2k)\}$$

Cada par de λ,ε da un block, los nueve bloques con una posible asignación de los valores de δo son

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
	000	002	001	010	012	011	020	022	021
	121	120	122	101	100	102	111	110	112
	212	211	210	222	121	220	202	201	200
λ,ε	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2
δo	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Para los cálculos de cualquier estimación, es conveniente formar primero las combinaciones de tratamientos que cumplen con los diferentes valores de sus subíndices, por ejemplo, para las componentes $AB^2C^2_{i+2j+2k}$, $\hat{AB}^2C^2_0$ requiere de conocer los productos de las combinaciones de tratamientos que cumplen $i' + 2j' + 2k' = 0$, de forma semejante para los componentes $\hat{AB^2C^2}_1$, $\hat{AB}^2C^2_2$, el arreglo tabular de las combinaciones de tratamientos es

211	121	102
202	100	212
122	112	200
012	002	111
220	210	022
021	011	010
000	020	120
101	222	221
110	201	001
$i'+2j'+2k'=0$	$i'+2j'+2k'=1$	$i'+2j'+2k'=2$

Ejemplo: Factorial 3^3 con Dos Repeticiones y Confusión de DS^2N y DS^2N^2

El siguiente ejemplo es el de un factorial 3^3 relacionado con los efectos de fecha de lluvia, espaciamiento de surcos y sulfato de amonio sobre caña de azúcar, en donde los efectos se denotan por D. S. y N respectivamente. El experimento consiste en dos repeticiones con DS^2N y DS^2N^2 confundidos. Este ejemplo ha sido tomado del libro de diseños y análisis de experimentos de O. Kempthorne, se reproduce aquí con fines de ilustración y para comprobar algunos resultados.

En la tabla 4.2 se muestran los datos, la función δn en cada repetición, los valores asignados a ella y los bloques del experimento. DS^2N se confunde en la repetición n = 0 y DS^2N^2 en la repetición n = 1. Los datos fueron originalmente codificados por la ecuación x = 100(Y-16), donde Y es el por ciento de azúcar.

Factor de Corrección

Con r = 2, P y n = 3. El factor de corrección es

$$F.C. = \frac{(Y_{....\delta.})^2}{rP^n} = \frac{1}{54}(Y_{...0\delta 0} + Y_{...1\delta 1})^2 =$$

$$\frac{1}{54}(Y_{20100} + Y_{20111} + Y_{00000} + Y_{00010} + \ldots +$$

$$Y_{02102} + Y_{02110})^2$$

$$= \frac{1}{54}(53 + 39 + 79 + 47 + \ldots + 70 + 36)^2$$

$$= \frac{(2964)^2}{54} = 162.690.66$$

Tabla 4.2

Repetición n = 0			Repetición n = 1		
$\delta_0=i+2j+k$	Tratamiento dsn	% de azúcar cod.	$\delta_1=i+2j+2k$	Tratamiento dsn	% de azúcar cod.
	201	53		211	43
	000	79		202	42
	011	105		122	30
$\delta_0 = 0$	022	-2	$\delta_1 = 0$	012	10
Block b_{00}	102	79	Block b_{10}	220	108
	220	56		021	36
	212	59		000	47
	110	62		101	33
	121	44		110	44
	012	70		121	79
	202	50		100	88
	001	100		112	39
$\delta_0 = 1$	210	105	$\delta_1 = 1$	002	18
Block b_{01}	020	50	Block b_{11}	210	88
	122	79		011	53
	111	105		020	21
	100	85		222	39
	221	36		201	39
	222	21		102	44
	200	59		212	42
	101	47		200	27
$\delta_1 = 2$	211	96	$\delta_1 = 2$	111	4
Block b_{02}	010	30	Block b_{12}	022	56
	112	13		010	33
	120	65		120	105
	002	85		221	68
	021	70		001	27

Suma Total de Cuadrados

$$\sum_{(i,j,k,n)} (Y_{ijkn\delta n})^2 - F.C.$$

$$= (53^2 + 39^2 + 79^2 + 47^2 + \ldots + 70^2 + 36^2) -$$

$$162.690.66 = 43,225.34$$

Suma de Cuadrados de Block (y repeticiones)

El total Boo del bloque boo se obtiene de (4.36) haciendo n = 0 y $\delta o = 0$

$$Boo = \sum_{\delta o=o} Y_{i'j'k'oo} = \sum_{i'+2j'+k'=o} Y_{i'j'k'oo}$$

en donde $\delta o = i'+2j'+k'$, este total es el de los productos con $\delta o = 0$, dados en la tabla 4.2. La suma de cuadrados de block y repeticiones es

$$\frac{Boo^2 + Bo1^2 + Bo2^2 + B1o^2 + B11^2 + B12^2}{9} - F.C. =$$

$$\frac{535^2 + 680^2 + \ldots + 406^2}{9} - 162{,}690.66 =$$

6,131.79

Sumas de Cuadrados de D

La ecuación (4.41) expresa la suma de cuadrados para efectos no confundidos. La suma de cuadrados de D es

$$S.C.(D) = \frac{1}{rP^{n-1}} \sum_{i'} (\sum_{i'} Y_{i'jkn\delta n})^2 - F.C.$$

$$= \frac{1}{18} [(\sum_{i'=o} Y_{i'jkn\delta n})^2 + (\sum_{i'=1} Y_{i'jkn\delta n})^2 +$$

$$(\sum_{i'=2} Y_{i'jkn\delta n})^2] - F.C.$$

$$= \frac{1}{18} [(Y_{0...\delta.})^2 + (Y_{1...\delta.})^2 + (Y_{2...\delta.})^2] - F.C.$$

$$= \frac{888^2 + 1045^2 + 1031^2}{18} - F.C. = 838.78$$

Suma de Cuadrados de DS

$$S.C.(DS) = \frac{1}{18} \sum_{i'+j'} (\sum_{i'+j'} Y_{i'j'kn\delta n})^2 - F.C.$$

$$= \frac{1}{18} [(\sum_{i'+j'=0} Y_{i'j'kn\delta n})^2 + (\sum_{i'+j'=1} Y_{i'j'kn\delta n})^2$$

$$(\sum_{i'+j'=2} Y_{i'j'kn\delta n})^2] - F.C.$$

$$= \frac{1}{18} [(Y_{00..\delta.} + Y_{12..\delta.} + Y_{21..\delta.})^2 +$$

$$(Y_{01..\delta.} + Y_{10..\delta.} + Y_{22..\delta.})^2 + (Y_{02..\delta.} +$$

$$Y_{20..\delta.} + Y_{11..\delta.})^2] - F.C.$$

$$= \frac{1}{18} [(356 + 402 + 433)^2 + (301 + 376 + 328)^2 +$$

$$(321 + 270 + 267)^2 - F.C.$$

$$= \frac{1191^2 + 1005^2 + 768^2}{18} - F.C. = 4994.34$$

Suma de Cuadrados de DS^2

$$S.C.(DS^2) = \frac{1}{18} \sum (\sum Y_{i'j'kn\delta n})^2 - F.C.$$

$$= \frac{1}{18}\,[(Y_{00..\delta.} + Y_{11..\delta.} + Y_{22..\delta.})^2 +$$

$$(Y_{10..\delta.} + Y_{21..\delta.} + Y_{02..\delta.})^2 +$$

$$(Y_{01..\delta.} + Y_{12..\delta.} + Y_{20..\delta.})^2] - F.C.$$

$$= \frac{1}{18}\,[(356 + 267 + 328)^2 + (376 + 433 + 231)^2 +$$

$$(301 + 402 + 270)^2] - F.C.$$

$$= \frac{951^2 + 1040^2 + 973^2}{18} - F.C. = 238.78$$

La interacción D x S = 4994.34 + 238.78 = 5233.12

Suma de Cuadrados de DS^2N, Confundido

DS^2N se confunde en la repetición n = 0, su suma de cuadrados se obtiene haciendo n* = 0 en (4.40).

$$S.C.(DS^2N) = \frac{1}{9} \sum_{i'+2j'+k'} \Big(\sum_{i'+2j'+k'} Y_{i'j'k'1\delta_1} \Big)^2$$

$$- (\hat{\mu} + \hat{r}_1) \sum_{i'+2j'+k'} \Big(\sum_{i'+2j'+k'} Y_{i'j'k'1\delta_1} \Big)$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{i'+2j'+k'} \Big(\sum_{i'+2j'+k'} Y_{i'j'k'1\delta_1} \Big)^2 - \frac{(Y_{...1\delta_1})^2}{27}$$

en donde se ha usado la ecuación (4.18) para sustituir $\hat{u} + \hat{r}_1$ por $\frac{Y_{...1\delta_1}}{n}$, no es difícil demostrar que el factor de $\hat{u} + \hat{r}_1$ es $Y_{...1\delta_1}$.

El siguiente arreglo tabular muestra las combinaciones de tratamientos para los diferentes valores de $i' + 2j' + k'$ y los productos observados en n = 1.

Tabla 4.3

$i'+2j'+k'=0$	%	$i'+2j'+k'=1$	%	$i'+2j'+k'=2$	%
201	39	012	10	222	39
000	47	202	42	200	27
011	53	001	27	101	33
022	56	210	88	211	43
102	44	020	21	010	33
220	108	122	30	112	39
212	42	111	4	120	105
110	44	100	88	002	18
121	79	221	68	021	36
	512		378		373

$Y_{...1\delta_1}$ es el total de la repetición n = 1. La suma de cuadrados de DS^2N es

$$S.C.(DS^2N) = \frac{512^2 + 378^2 + 373^2}{9} - \frac{1263^2}{27} = 1381.55$$

Es conocido que existen métodos breves para el cálculo de la suma de cuadrados de efectos no confundidos, lo que no ocurre para los demás efectos, en este ejemplo, el cálculo resulta ser bastante simple para efectos confundidos.

LITERATURA CITADA

Addelman, S. 1961. Irregular Fractions of the 2^n Factorial Experiments. Technometrics Vol. 3, No. 4 p. 483.

Kempthorne, O. 1952. The Designs and Analysis of Experiments. 7 ed. John Wiley and Sons. New York, N.Y. p. 206-211, 234-353.

Kempthorne, O. and Federed, W.T. The General Theory of Prime - Power lattice Designs. Biometrics, March 1948 p. 54-59.

Martínez G., A. 1988. Diseños Experimentales. Métodos y Elementos de Teoría. Trillas, México. p. 185, 240-241.

A P E N D I C E

COMENTARIOS

Este trabajo fue motivado por la necesidad de tener un método alternativo para trabajar el modelo lineal de los experimentos factoriales P^n, en donde los efectos factoriales entraran en el modelo según fueron definidos en el segundo capítulo.

La literatura presenta pocos ejemplos en donde se muestra la forma de obtener las ecuaciones normales utilizando la representación del modelo lineal citado anteriormente. Adelman (1961) por ejemplo, refiere que esta representación es especialmente útil para el factorial 2^n, en donde al desarrollar los componentes de los efectos factoriales, el modelo adquiere una forma simple, con subíndices cero o uno en los efectos y con coeficientes en ellos de uno o menos uno.

Kempthorne (1952), aún cuando expone un factorial de la serie mixta 3 x 2 x 2, utiliza una representación diferente para el modelo lineal y menciona someramente la manera de obtener las ecuaciones normales por el método de mínimos cuadrados.

En esa misma obra, en el capítulo 15, sobre confusión parcial en experimentos 2^n, el autor refiere que "es difícil desarrollar una notación que permita escribir algebráicamente todas las sumas de cuadrados, de tal manera que ellos deberán ser descritas".

Martínez (1988) presenta la siguiente notación

$$\sum_i X_i^2 - F.C.$$

para expresar la suma de cuadrados del efecto factorial X_i, en donde X_i es la i-ésima componente de $A^{\alpha_1} B^{\alpha_2} C^{\alpha_3} \ldots$ y la suma es sobre todos productos de las combinaciones de tratamientos que satisfacen $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = i \pmod p$.

Obsérvese que en esta notación no entran directamente los productos observados $Y_{ijk} \ldots$ como es usual para los diseños experimentales . Este autor, no presenta el modelo lineal comò se hace en este trabajo, ni tampoco mencidna la relación entre la suma de cuadrados anterior y los efectos factoriales según como los define en el modelo.